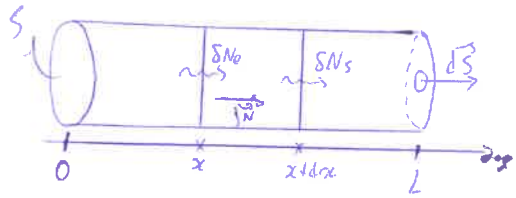
Groupe 4 : TD 19 : Exercice 1 : TB ①



et $n(0) = n(L) = 0$.

1) On effectue un bilan de particules sur le système élémentaire situé entre x et $x+dx$:

$$N(t+dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s + \underbrace{dN_{\text{créés}} - dN_{\text{disp.}}}_{d^2N_p \text{ par définition}}$$

↳ neutrons créés.

Alors, $N(t+dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s + d^2 N_p$ car $\frac{\delta N}{dt} = \phi(\vec{j_N})$

$\Leftrightarrow d\tau\,(n(t+dt) - n(t)) = dt(j_N \cdot S(x) - j_N \cdot S(x+dx)) + d^2 N_p$

$\Leftrightarrow \frac{\partial n}{\partial t} dt\, d\tau = -\frac{\partial j_N}{\partial x} dx\, S + d^2 N_p$

$\Leftrightarrow \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x} + k n(x,t)$

Or, d'après la loi de Fick : $\vec{j_N} = -D\,\vec{\text{grad}}(n) = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{u_x}$ ici.

Alors, $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + k n(x,t)$ CQFD.

2. On se place en régime stationnaire :

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + kn = 0$$

$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{k}{D} n = 0$ on pose $\frac{1}{\delta^2} = \frac{k}{D} \Leftrightarrow \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{k}{D}}$

d'où $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2} n = 0$

Alors, $n(x) = A\cos\left(\frac{x}{\delta}\right) + B\sin\left(\frac{x}{\delta}\right)$

Or, en $x = 0$, $n(0) = 0$ d'où $A = 0$

D'où, $n(x) = B(\sin(x/\delta))$

Et de plus, $n(L_s) = 0$ et il n'y a aucun x pour lequel $n(x) = 0$, à part $x=0$ et $x = L$.

D'où, $B\sin(\frac{L_s}{\delta}) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{L_s}{\delta} = \pi$

$\Leftrightarrow L_s = \pi \times \delta$

$\Leftrightarrow L_s = \pi\sqrt{\frac{D}{k}}$

Finalement, la seule longueur valide de barreau est $L_s = \pi\sqrt{\frac{D}{k}}$

3. On donne la solution $n(x,t)$ de la forme : $n(x,t) = h(x)e^{-t/\tau}$

Alors, $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} + k\,n(x,t)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\tau}h(x)e^{-t/\tau} = D\,h''(x)e^{-t/\tau} + k\,h(x)e^{-t/\tau}$

$\Leftrightarrow \frac{h(x)}{\tau} + k\,h(x) = -D\,h''(x)$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{\tau D} + \frac{k}{D})h(x) + h''(x) = 0$ on pose $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{\tau D} + \frac{k}{D}}$

D'où, $h(x) = A\cos(\frac{x}{\delta}) + B\sin(\frac{x}{\delta})$

Or, en $x = 0$, $n(0,t) = 0$ d'où $h(0) = 0$

$\Leftrightarrow A = 0$

et de plus, $n(L,t) = 0$ d'où $h(L) = 0$

$\Leftrightarrow B\sin(\frac{L}{\delta}) = 0$

Alors, comme dans la question 2, $\frac{L}{\delta} = \pi$

Alors finalement, $L = \pi\delta$

$\Leftrightarrow \pi(\sqrt{\frac{1}{\tau D} + \frac{k}{D}}) = L$

$\Leftrightarrow \tau = k - (\frac{L}{\pi})^2 \times D$

Or, pour $\tau < 0$, le système diverge.

$$\Leftrightarrow k - \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \times D < 0$$

$$\Leftrightarrow L > \pi \sqrt{\frac{k}{D}} = L_s$$

Donc on retrouve que le système diverge pour $L > L_s$.

Si $L > L_s$, on assimile le réacteur à une bombe nucléaire.

↳ système divergent !

(C'est en raccordant 2 tiges de plutonium radioactif que les bombes transportées par les américains ont explosé sur Hiroshima en 1945) groupe 5. ex II TD19 Bon travail.

de particules dans l'angle. → A montrer à partir d'un bilan

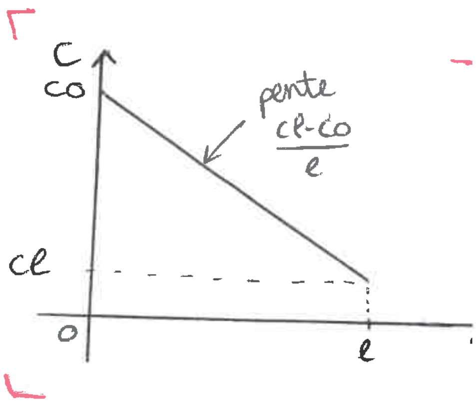
1) D'après l'équation de diffusion : $\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$,

en régime stationnaire $D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$

$\Rightarrow c(x) = Ax + B$

$c(0) = c_0 = B$

$c(\ell) = c_\ell = Ax + c_0 \iff A = \frac{c_\ell - c_0}{\ell}$

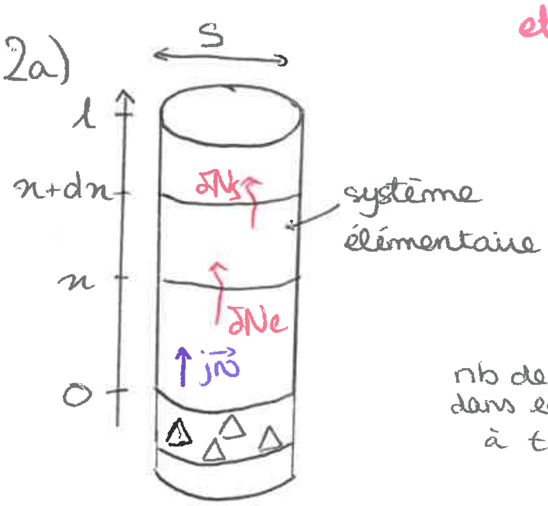


$\iff c(x) = \frac{c_\ell - c_0}{\ell} x + c_0$

grâce à la loi de Fick : $j_N = -D \frac{\partial c}{\partial x} = -D \frac{c_\ell - c_0}{\ell}$

et $\Phi = j_N S = SD \frac{c_0 - c_\ell}{\ell}$

2a)



bilan de particule dans le système élémentaire situé entre x et $x+dx$

$N(t+dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s$

nb de particule dans le système à $t+dt$; nb de particule dans le système à t ; particule qui entrent dans le système à x ; particule qui sortent du système à $x+dx$

$\iff C_t(t+dt) S dx - C_t(t) S dx = j_N(x) S dt - j_N(x+dx) S dt$

$\iff \frac{\partial C_t}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x} \xrightarrow[\text{Fick}]{\text{loi de}} \frac{\partial C_t}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

Par ailleurs, $c_t(x,t) = c(x,t) + c_f(x,t) = c(x,t)(1+K_s)$

$\Rightarrow (1+K_s) \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \iff \frac{\partial c}{\partial t} = D' \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

Ainsi $D' = \frac{D}{1+K_s}$

B

b) $c(0,t) = c_0$ signifie qu'en $x=0$, il y a une concentration importante de déchets nucléaires. → et que la concentration ne varie pas dans le temps.

Or on $c(\ell,t) = 0$ signifie qu'en $x=\ell$ il n'y a plus dechet nucléaire.

Ils ne se diffusent pas jusqu'en ℓ.) B

$c(0<x<\ell, 0) = 0$ → à l'instant initial la diffusion n'a pas commencé.

c) en regime stationnaire : $D' \dfrac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow c_0(x) = Ax + B$$

$$c_0(0) = c_0 = B$$

$$c_0(\ell) = 0 = A\ell + c_0 \Leftrightarrow A = -\frac{c_0}{\ell}.$$

$$\Leftrightarrow c_0(x) = c_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$ ✓ cqfd.

d) On sait que $c(x,t) = c_0(x) - c'(x,t)$

On sait que $\dfrac{\partial c}{\partial t} = +D' \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(c_0(x) - c'(x,t))}{\partial t} = D' \frac{\partial^2(c_0(x) - c'(x,t))}{\partial x^2}$$

OR $\dfrac{\partial c_0(x)}{\partial t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 c_0(x)}{\partial x^2} = 0$

Donc $\dfrac{\partial c'}{\partial t} = D' \dfrac{\partial^2 c'}{\partial x^2}$

Ainsi les conditions aux limites vérifiées par $c'(x,t)$

$c'(0,t) = 0 \Leftarrow c(0,t) = c_0(0) - c'(0,t) \Leftrightarrow c'(0,t) = c_0 - c_0 = 0$

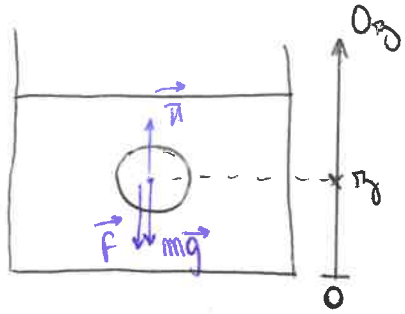
$c'(\ell,t) = 0 \Leftarrow c(\ell,t) = c_0(\ell) - c'(\ell,t) \Rightarrow c'(\ell,t) = 0 - 0 = 0.$

TB

TD 19 : Ex. 3 Groupe 3

→ allez jusqu'au bout des exercices... c'est possible...

1)



On détermine l'équation différentielle de la vitesse de la macromolécule :

* ~~système~~ : macromolécule soumis à son poids, la poussée d'Archimède et une force visqueuse

⚠ $\vec{\pi}$ est opposé au poids !

* PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - f\vec{v} + \vec{\pi}$ où $\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}}\,\vec{g}$

$\Leftrightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{f}{m}\vec{v} = \vec{g} \cancel{+} - \dfrac{m_{\text{fluide}}}{m}\vec{g}$

Or, $\dfrac{m_{\text{fluide}}}{m} = \dfrac{\rho V}{\rho_0 V} = \dfrac{\rho}{\rho_0}$

Donc $\underline{\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{f}{m}\vec{v} = \vec{g}\left(1 \cancel{+} - \dfrac{\rho}{\rho_0}\right)}$

2) On exprime la vitesse limite $\vec{v_\ell}$:

$\vec{v_\ell} = \vec{cte} \Rightarrow \dfrac{d\vec{v_\ell}}{dt} = \vec{0}$

Ainsi, $\dfrac{f}{m}\vec{v_\ell} = \vec{g}\left(1 \cancel{+} - \dfrac{\rho}{\rho_0}\right) \Leftrightarrow \underline{\vec{v_\ell} = \dfrac{m\vec{g}}{f}\left(1 \cancel{+} - \dfrac{\rho}{\rho_0}\right)} = -\dfrac{mg}{f}\left(1 - \dfrac{\rho}{\rho_0}\right)\vec{u_z}$

3) Par définition, $\phi(\vec{j_E}) = \iint_S \vec{j_E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{\delta N}{dt}$

Donc $[\vec{j_E}] = \cancel{mol}$ molécules $\cdot\, m^{-2}\cdot s^{-1}$ (1'ai')

Or, par homogénéité, mol$_{\text{écules}}\,m^{-2}\cdot s^{-1}$ = mol$_{\text{écules}}\,m^{-3}\cdot m\; s^{-1} = [C\cdot\vec{v_\ell}]$

Ainsi, $\underline{\vec{j_E} = C(z)\vec{v_\ell}}$

z S ↓$v_\ell\, dt$

$\vec{j_E}\cdot\vec{S}$ = nombre de particules qui franchissent S pendant dt

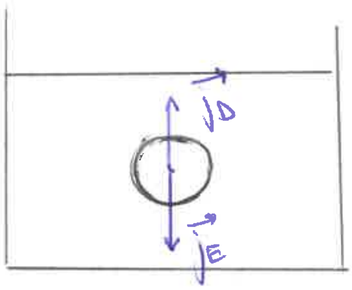
$= C(z)\, v_\ell\, dt\, S$

4) Par définition, $\vec{j_D} = -D \frac{\partial C}{\partial z} \vec{u_z}$

On en déduit la dimension de D :

$$[D] = \frac{mol \cdot m^{-2} \cdot s^{-1} \cdot m}{mol \cdot m^{-3}} = m^2 \cdot s^{-1}$$

5)



pas tout à fait les deux flux sont opposés...
$\frac{\delta N}{dt} = (\vec{j_D} + \vec{j_S}) \cdot \vec{S} = 0$.

En régime stationnaire, la macromolécule est à l'équilibre

Donc $\vec{j_E} + \vec{j_D} = \vec{0}$ oui

$$\Leftrightarrow -D \frac{\partial C}{\partial z} \vec{u_z} - C(z) \frac{mg}{f}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \vec{u_z} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial z} + C(z) \times \frac{1}{D} \frac{mg}{f}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow C(z) = A e^{-z/L} \quad \text{où} \quad L = \frac{Df}{mg\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)}$$

et A une constante d'intégration

en $z = 0$ $C(z) = C_0$.

6) /

$$\frac{C(z=0)}{C(z)} = \frac{1}{e^{-z/L}} = 2$$

$$\Rightarrow L = \frac{z}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} = 2,88 \text{ cm}.$$

d'où $m = \frac{Df}{g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) L}$ avec $D = \frac{k_B T}{f}$

$$= \frac{k_B T}{g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) L} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298}{9,8\,(1 - 0,8)\, 2,88 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 7,3 \cdot 10^{-20} \text{ kg}.$$

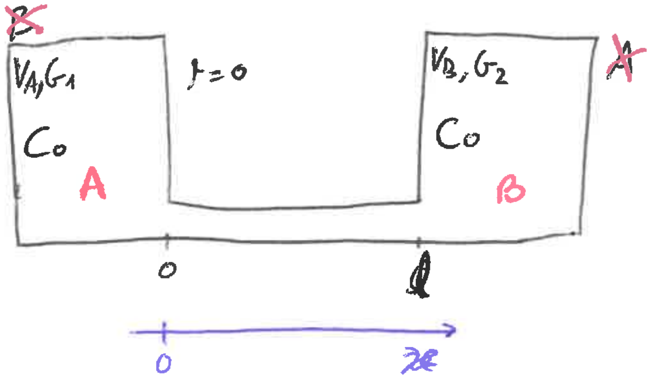
$M = N_A \cdot m = 6,02 \times 7,3 \cdot 10^{-20} = 44 \cdot 10^{3}$ kg$\cdot$mol^{-1}

c'est énorme !

→ Mesures optiques par absorption par exemple

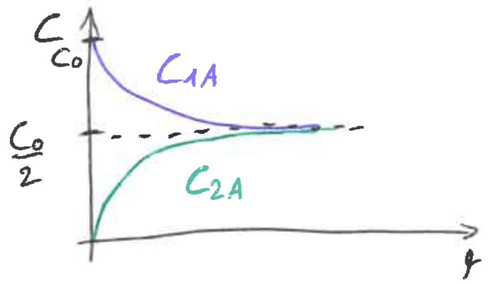
Groupe n°7 : TD 19 ~~sean~~ n° 4

Bon travail.



1- à $t>0$, G_1 va se propager dans le tube pour aller vers B jusqu'à atteindre une concentration $\frac{C_0}{2}$ dans A et B, réciproquement pour G_2 qui va de B vers A

dans A :



les courbes sont censé être symétrique par rapport à la droite $c = \frac{C_0}{2}$

TB

2- comme l'écoulement est supposé stationnaire dans le tube (ce qui revient à négliger ~~la distance~~ l devant δ, la distance caractéristique de propagation du gaz) on suppose que ~~l'air~~ le gaz sortant de A est instantanément dans B   B

l'équation de diffusion donne donc

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = 0 \iff C_1(x) = x\frac{\partial C_1}{\partial x}(0,t) + C_1(0,t)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}(0) = \frac{C_{1A}-C_{1B}}{0-l} = -\frac{\Delta C_1(t)}{l} \qquad C_1(0,t) = C_{1A}(t)$$

ainsi on a $\boxed{C_1(x) = C_{1A}(t) - \frac{x}{l}\Delta C_1(t)}$ B

3- même raisonnement pour C_2 en notant qu'on ne connaît pas $C_2(0,t)$ mais $C_2(l,t) = C_{2B}(t)$

ainsi $\boxed{C_2(x) = C_{2B}(t) \mp \frac{x+l}{l}\Delta C_2(t)}$ où $\Delta C_2 = C_{2B} - C_{2A}$

en $x = l$ $C_2(l) = C_{2B}$ OK

$\boxed{C_2(x) = C_{2B} \pm \frac{-x+l}{l}\Delta C_2(t)}$

en $x = 0$ $C_2(0) = C_{2B} + (C_{2B} - C_{2A})$?

erreur...

signe ⊖

$\boxed{C_2(x) = C_{2A} + \frac{x}{l}\Delta C_2}$

4- Loi de Fick : $j_N(x) = -D\dfrac{\partial C}{\partial x}$ or $\dfrac{\partial C_1}{\partial x} = -\dfrac{\Delta C_1}{\ell}$ donc $j_{a_1}(x) = \dfrac{D}{\ell}\Delta C_1$

~~La loi de Fick étant locale on peut la rendre globale en intégrant entre A et B pour obtenir~~

$$\cancel{j_{a_1}(\ell) - j_{a_1}(0) = -D\Delta C_1}$$

5- dans A : en notant N_1 le nombre de particules de G_1

$N_1(t+dt) = N_1(t) - \delta N_{1S}$ ou δN_{1S} est le nombre de particule sortant de A pendant dt.

en $x=0$, $\delta N_{1S} = S j_{e_1} \cancel{dx\,dt} = \dfrac{SD}{\ell}\Delta C_1 \cancel{dx\,dt}$

alors
$$N_1(t+dt) - N_1(t) = \Delta_t N_1 = -\frac{SD}{\ell}\Delta C_1 \cancel{dx\,dt}$$
où $\Delta_t N_1$ représente la variation temporelle de N_1 dans A, on a alors $\Delta_t N_1 \simeq \dfrac{\partial N_1}{\partial t} \simeq \dfrac{\partial C_{1A}}{\partial t} V_A$

on a donc
$$\frac{\partial C_{1A}}{\partial t} = -\frac{SD}{\ell V_A}\Delta C_1 \quad : (1_A)$$

on effectue la même démarche en B pour avoir ↳ les particules 1 entrent dans B.

$$\frac{\partial C_{1B}}{\partial t} = \frac{SD}{\ell V_B}\Delta C_1 \quad : (1_B)$$

$(1_A)-(1_B)$:
$$\frac{\partial C_{1A}}{\partial t} - \frac{\partial C_{1B}}{\partial t} = \frac{\partial (C_{1A}-C_{1B})}{\partial t} = -\frac{SD}{\ell}\Delta C_1\left(\frac{1}{V_A}+\frac{1}{V_B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Delta C_1}{\partial t} = -\frac{SD}{\ell}\Delta C_1 \underbrace{\left(\frac{V_A+V_B}{V_A V_B}\right)}_{=\frac{1}{V_0}}$$

$$\frac{\partial \Delta C_1}{\partial t} + \frac{SD}{\ell V_0}\Delta C_1 = 0$$

on a donc $\Delta C_1(t) = C_0\, e^{-\frac{SD}{\ell V_0}t}$ posons $\tau = \dfrac{\ell V_0}{SD}$ alors $\Delta C_1 = C_0\, e^{-t/\tau}$

de même $\Delta C_2 = C_0\, e^{-t/\tau}$.

B

6- <u>AN:</u> $\tau = \frac{\ell V_0}{DS} = \frac{\ell V_A V_B}{DS(V_A+V_B)}$

$$= \frac{10\times10^{-2}\times10^{-3}\times10^{-3}}{1,74\times10^{-5}\times2\times10^{-3}\times1\times10^{-2}}$$

$$\tau = 2,9\times10^{4}\,s \simeq 8\,h\ !$$

oui

NON

on cherche t_0 tel que $\cancel{\Delta C_1(t_0) = \frac{C_0}{2}} = C_{1A}(t_0) - C_{1B}(t_0)$

$$\boxed{C_{1B}(t_0) = \frac{C_{1A}(t_0)}{2}}$$

$\Leftrightarrow\ e^{-t_0/\tau} = \frac{1}{2}$

$t_0 = \tau \ln(2)$

<u>AN:</u> $t_0 = 2,0\times10^{4}\,s \simeq 5,5\,h\ !$

a conservation de la quantité totale de particules

$$N_1 = C_0 V_0 = C_{1A} V_0 + C_{1B} V_0$$

$$\Rightarrow C_0 = C_{1A}(t_0) + C_{1B}(t_0)$$

$$C_0 = C_{1A}(t_0) + \frac{C_{1A}(t_0)}{2}$$

$$= \frac{3C_{1A}(t_0)}{2}$$

$$C_{1A}(t_0) = \frac{2}{3}C_0$$

$$C_{1B}(t_0) = \frac{C_0}{3}$$

$$\Delta C_1(t_0) = C_{1A}(t_0) - C_{1B}(t_0)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) C_0$$

$$= \frac{C_0}{3}$$

$$\Rightarrow\ e^{-t/\tau} = \frac{1}{3}$$

$$t_0 = \tau \ln 3$$

$$\underline{t_0 = 8,8\,h}$$