Thème : forces de contact sur un fluide

APPLICATIONS DIRECTES

1. Mesure de pression en statique

A quelle différence de pression correspond une hauteur d'eau de 1mm ?
Par quelle hauteur d'eau exprimerait-on la pression atmosphérique ?
Avant une remontée rapide vers la surface, pourquoi les plongeurs sous-marins vident-ils leurs poumons de l'air qu'il contient ?
Quel serait le volume atteint à la surface par 3L d'air dans les poumons à 10 m de profondeur ?

2. Force de pression sur un barrage vertical

Soit un barrage constitué d'un mur droit vertical. La hauteur de l'eau est h=5m, la largeur du cours d'eau est $\ell = 4$m.

1. Exprimer la pression de l'eau en fonction de l'altitude z. On suppose que le fond du barrage est à l'altitude z = 0.
2. Donner l'expression de la résultante des forces de pression élémentaires exercée par l'eau et l'air sur un élément de surface $dS = \ell dz$ du barrage.
3. En déduire la résultante des forces de pression subie par le barrage.
4. En déduire la force exercée par le sol sur le mur pour maintenir le barrage en équilibre. Que se passerait-il si cette force était insuffisante ?

3. Nivellement barométrique

On assimile l'atmosphère à de l'air, supposé parfait de masse molaire M en équilibre isotherme.
Déterminer la pression de l'atmosphère en fonction de l'altitude z.
Calculer la différence de pression relative maximale entre le pied et le sommet de la tour Burj Khalifa de Dubaï, haute de 828 m, sachant que la température moyenne est de 25°C en hiver et 40°C en été.

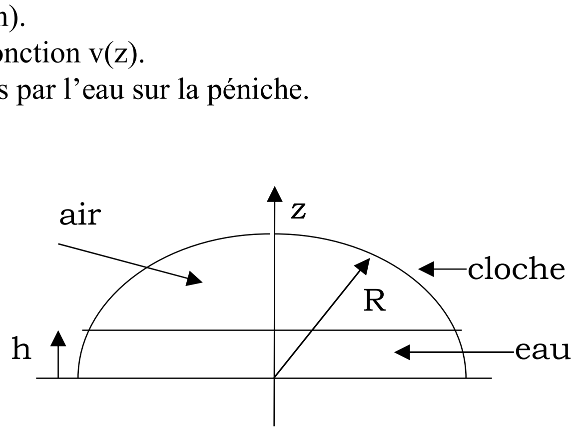
4. Traction d'une péniche sur un canal

Une péniche de surface S est animée d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V_0\vec{u}_x$ sur l'eau d'un canal de profondeur h, au repos et de viscosité η.

1. Justifier que le champ des vitesses à l'intérieur du canal et sous la péniche peut se mettre sous la forme $v(x, z)\,\vec{u}_x$. L'axe Oz est vertical, orienté vers le haut.
2. Quelle est la conséquence de l'incompressibilité du fluide sur le champ des vitesses ?
3. Donner en la justifiant l'expression de v(z=0) et v(z=h).
4. Déterminer la forme la plus simple possible pour la fonction v(z).
5. En déduire l'expression des forces de contact exercées par l'eau sur la péniche.

EXERCICES

I. Soulèvement d'une calotte sphérique :



On considère la cloche hémisphérique de masse m, de rayon R, renversée sur le plan horizontal ci-contre, remplie d'eau sur une hauteur h, puis d'air à la pression P°. La pression de l'air à l'extérieur de la cloche est P°.

1. Exprimer la pression P(z) dans l'eau, en fonction de P°, z et h.
2. Représenter la résultante des forces de pression élémentaires $d\overrightarrow{F_p}$ qui s'exercent sur un élément dS de la paroi de la cloche.
3. Quelle est la direction $\vec{u}$ et le sens des forces de pression $\overrightarrow{F_p} = F_p\vec{u} = \int d\,\overrightarrow{F_p}$ qui s'exercent sur l'ensemble de la cloche ?
4. En remarquant que $F_p = \int d\,\overrightarrow{F_p}.\vec{u}$ déterminer la hauteur d'eau minimale pour laquelle la

cloche va se soulever.

5. Quelle doit être la valeur maximale de h ? En déduire une condition sur m pour que la cloche puisse se soulever.

II. <u>Modèle de la troposphère</u>

On considère que l'atmosphère terrestre est un gaz parfait compressible.

Dans la troposphère, entre 0 et 11 km d'altitude, on peut considérer que la température varie selon une loi affine du type $T = T_0 - B z$.

1. Montrer que dans ce cas la pression P peut s'exprimer en fonction de l'altitude z selon la loi : $P = P_0 [1 - B z/T_0]^a$

avec $a = gM / RB$, g étant l'intensité du champ de pesanteur terrestre et M la masse molaire de l'air.

2. En déduire la relation donnant la masse volumique en fonction de l'altitude.
3. A.N. : z = 11 km ; à z = 0, P_0 = 1 bar et T_0 = 288 K ; B = 6,5 K.km^{-1}. Calculer T(z), P(z) et la masse volumique de l'air.

III. <u>Ascension d'un ballon sonde</u> :

On modélise l'atmosphère par de l'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire M, en équilibre isotherme à la température T.

1. Montrer que la pression de l'air en fonction de l'altitude peut être modélisée par

$P(z) = P_o.\exp(-z/H)$ où H est une grandeur que l'on exprimera en fonction des données.

2. Un ballon sonde de masse m sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon contient initialement n moles de H_2. L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M_{air} en équilibre isotherme à la température T_o=273 K

a) Quelle est la force ascensionnelle qui s'exerce sur le ballon ? Déterminer n_o, la quantité minimale de H_2 assurant le décollement de celui-ci pour m=50 kg, et évaluer le volume V_o correspondant du ballon à l'altitude nulle de départ.

On suppose $n_i > n_o$.

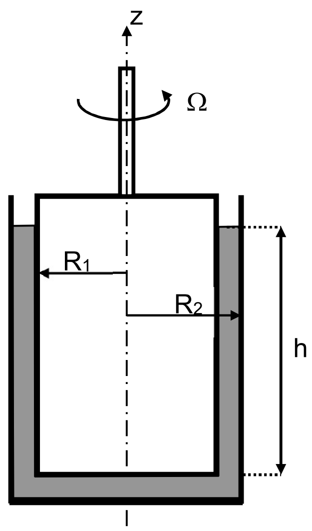
b) Comment évolue le volume du ballon, supposé fermé, lorsque l'altitude augmente ? Le volume du ballon (initialement flasque) ne peut dépasser une valeur notée V_1 sans que celui-ci n'éclate. Montrer que cela implique l'existence d'une altitude z_1 maximale atteinte par le ballon.

c) En fait au-delà de l'altitude z_1, le ballon possède une soupape qui lui permet d'évacuer du gaz à volume constant V_1. Montrer que cela lui permet d'atteindre une nouvelle altitude maximale z_2.

IV. <u>Interface huile-eau dans un tube en U</u> :

On considère un tube en U rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 10 cm par rapport au fond. La section du tube est s = 1 cm^2. On ajoute 2 cm^3 d'huile, de densité 0,6, dans une des branches du tube. A quelle hauteur se trouve l'interface entre l'eau et l'huile ? A quelle hauteur se trouve la surface libre de l'eau ?

V. Viscosimètre de Couette



Cet appareil (inventé par M. Couette en 1890) est constitué de deux cylindres concentriques de rayons R_1 et R_2 ; $R_2 > R_1$, de hauteur h. Le fluide homogène, incompressible, assimilé à un fluide newtonien, de viscosité dynamique inconnue η occupe l'espace entre les deux cylindres. Le grand cylindre est immobile, tandis que le cylindre intérieur tourne à vitesse angulaire uniforme $\Omega_1 = \Omega$ autour de l'axe vertical Oz.

La différence $R_2 - R_1 = e$ est faible devant R_1 et devant h ; ainsi les effets de bord (fond du récipient et niveau supérieur) seront négligés. Les forces de pesanteur demeurent négligeables devant les forces de frottement visqueux.

1. Justifier que le champ de vitesse est orthoradial et que la vitesse ne dépend que de r, distance à l'axe de rotation.

On montre que le champ des vitesses peut se mettre sous la forme :

$$V(r) = Ar + B/r.$$

2. Quelles sont les unités de A et B ?
3. Exprimer A et B en fonction de Ω, e et R_1 en utilisant les conditions aux limites. Tracer V(r).
4. Justifier que l'écoulement est stationnaire. Est-il uniforme ? Déterminer le débit massique à travers une section droite du cylindre.
5. Les contraintes visqueuses s'exerçant sur la couche fluide cylindrique de rayon r sont réductibles à des forces par unité de surface dΣ, qui en coordonnées cylindriques s'écrivent : $\frac{\overrightarrow{dF}_{vis}}{d\Sigma} = -\,\eta\, r \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right)\ \overrightarrow{e_\theta}$. Déterminer le moment résultant exercé par les forces de viscosité sur le cylindre de rayon R_1.
6. Le cylindre est mis en rotation grâce à un moteur à courant continu de constante électromécanique ϕ. Montrer que la mesure du courant parcourant le moteur permet de déterminer le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

VI. Ecoulement de Poiseuille cylindrique :

On veut déterminer le profil de vitesse $v_Z(r)$ de l'écoulement stationnaire d'un fluide qui s'écoule dans un tube horizontal de longueur *L* et de section circulaire de rayon a. On supposera l'écoulement parallèle à l'axe *Oz* du tube, stationnaire et laminaire, de coefficient de viscosité η.

1. A quelle condition sur la pression p(z) l'écoulement s'effectue-t-il dans le sens z croissant ?
2. Que vaut $v_Z(a)$? que peut-on dire du sens de variation de la fonction $v_Z(r)$? Quelle est la valeur de la force de viscosité en r=0 ?
3. On choisit comme système une particule fluide cylindrique de rayon r<a, centrée sur l'axe du cylindre, et de longueur dz. Effectuer le bilan des actions, projeté sur l'axe Oz. On suppose que la pression ne dépend pas de r.
4. On suppose que cette particule évolue à vitesse constante dans l'écoulement stationnaire, en déduire une relation entre dp/dz et dv(r)/dr.
5. On pose $\frac{\partial p}{\partial z} = -K$ (avec $K > 0$). Déterminer v_Z en fonction de *K*, η, *a* et *r* en utilisant les conditions aux limites déterminées en 2.
6. Tracer le profil des vitesses dans la conduite.
7. Calculer le débit volumique q_V en fonction de *K*, η, et *a*.