SEYIFCU Yunis
AGOSY Antoine

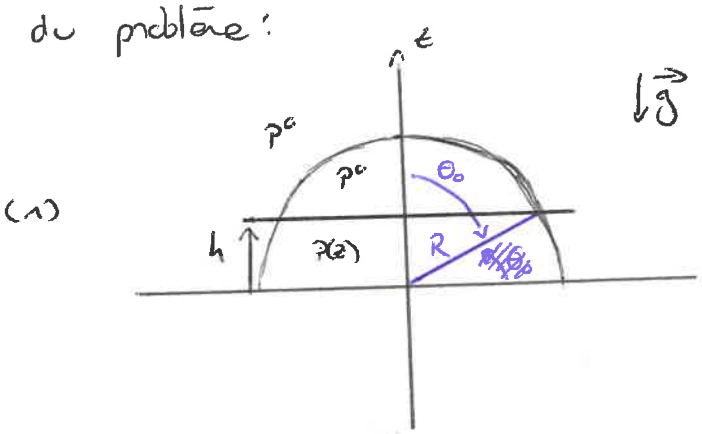
Exercice I TD 2 1

Soulèvement d'une calotte sphérique

TB

1. Pour cette question, utilisons la relation fondamentale de la statique : $\overrightarrow{grad}(P) = \rho\vec{g}$. avec ρ = masse volumique de l'eau.

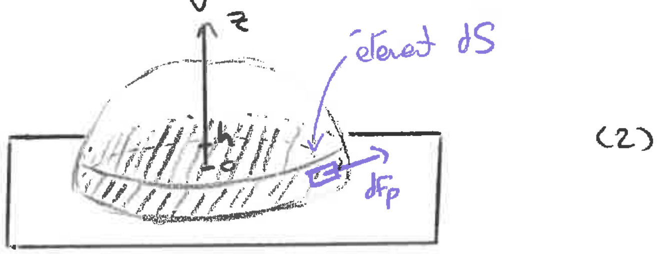
Schéma du problème :



Dans l'eau donc, $\overrightarrow{grad}(P) = \frac{dP}{dz}\vec{u_z} = \rho\vec{g} = -\rho g\,\vec{u_z}$

masse volumique du fluide

Schéma en 3D :



Ainsi, comme $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ (projection sur $(O,\vec{u_z})$)

$\Rightarrow P(z) = -\rho g z + C$

Or $P(h) = P^0 = -\rho g h + C$

Donc $C = \rho g h + P^0$ et ainsi, $\underline{P(z) = P^0 + \rho g(h-z)}$

2. On a représenté $\vec{dF_p}$ sur le schéma (2).

Remarque, $\vec{dF_p} = P_{eau}\vec{dS} - P_{air}\vec{dS}$

$= [P^0 + \rho g(h-z)]dS\,\vec{u_r} - P^0 dS\,\vec{u_r}$

(en repère sphérique)

Donc $\underline{\vec{dF_p} = \rho g(h-z)\,dS\,\vec{u_r}}$

3. Par symétrie du système, on peut déduire que la résultante $\vec{F_p}$ des forces de pression est dirigée selon $\vec{u} = \vec{u_z}$.

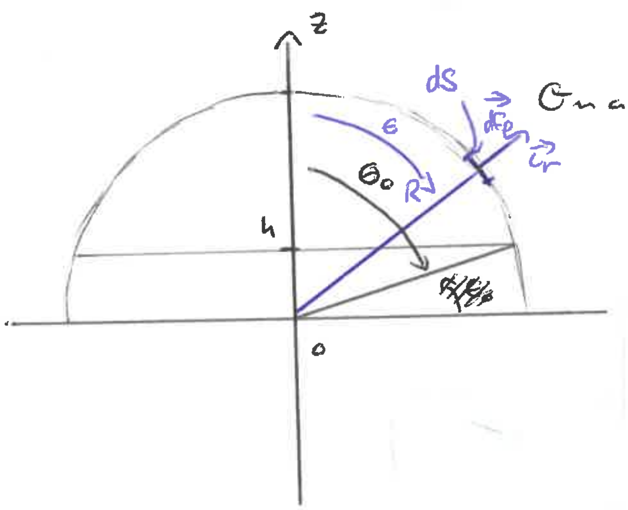
4.

On rappelle que $\vec{dF_p} = \rho g (h-z) dS \vec{u_r}$

Ainsi si on se place dans le repère sphérique,

$\vec{dF_p} \cdot \vec{u_z} = \rho g (h-z) \cos(\theta) dS$

Reprenons le schéma et introduisons quelques notations :



On a que $h = R \cos \theta_0$

~~Pour se faciliter la tache, nous allons considérer dS comme une tranche horizontale de la demi-sphère (possible grace a un symétries du système.~~

Donc $dS = r d\theta \cdot r \sin \theta \, d\varphi$ (on est toujours en sphérique)

Par ~~symétrie~~ invariance de rotation d'angle φ du système,

$dS = 2\pi R^2 \sin \theta \, d\theta$ oui

Et Finalement donc $\vec{dF_p} \cdot \vec{u_z} = \rho g (h-z) 2\pi R^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta = dF$

On d'après ce que l'on a écrit,

$h = R\cos(\theta_0)$ et $z = R\cos(\theta)$

Donc $\vec{dF_p} \cdot \vec{u_z} = \rho g 2\pi R^3 (\cos(\theta_0) - \cos(\theta)) \cos\theta \sin\theta \, d\theta$

Il nous faut integrer ceci de θ_0 à $\frac{\pi}{2}$ (là où il y a de l'eau) : oui

$$\int_0^{\theta_0} \vec{dF_p} \cdot \vec{u_z} = 2\pi R^3 \rho g \left[\cos\theta_0 \int_{\theta_0}^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta - \int_{\theta_0}^{\pi/2} \cos^2(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \right]$$

$u = \sin(\theta)$; $u = \cos(\theta)$

$$= 2\pi R^3 \left[\cos\theta_0 \int_{\sin(\theta_0)}^{1} u\,du + \int_{\cos(\theta_0)}^{0} u^2\,du \right] \cdot \rho g$$

$$= 2\pi R^3 \left[\cos\theta_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2\theta_0}{2} \right) - \frac{1}{3}\cos^3\theta_0 \right] \cdot \rho g$$

$$= 2\pi R^3 \left[\frac{\cos\theta_0}{2} \cos^2\theta_0 - \frac{1}{3}\cos^3\theta_0 \right] \cdot \rho g$$

De ce fait, $F_p = 2\pi R^3 \cos^3\theta_0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \rho g$

On $\cos\theta_0 = \frac{h}{R}$ donc :

$$F_p = 2\pi R^3 \frac{h^3}{R^3} \cdot \frac{1}{6}\rho g = \frac{\pi \rho g h^3}{3}$$ B

système = cloche
Bilan des actions poids $= m\vec{g}$
résultante des forces de pression $\vec{F_p} = F_p \vec{u_z}$

Or pour que la cloche se soulève, il faut que

$F_p > mg$

Et donc $\frac{\pi \rho h^3}{3} > m \Rightarrow h_{min} = \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \rho}}$ oui

5. La hauteur maximale de h quant à elle est R (condition imposée par la géométrie du système).
Ainsi $h_{max} = R$

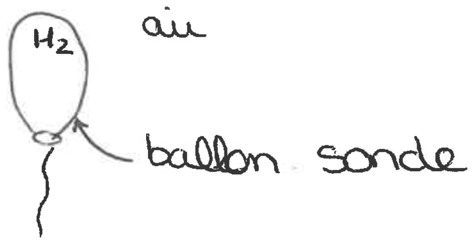
De ce fait on peut établir ~~l'encadrement suivant:~~ la condition suivante :

$$\boxed{m < \frac{\pi \rho R^3}{3}}$$

ou question peu intéressante..

$$\cancel{\frac{\pi \rho R^3}{3} < m < \pi \rho}$$

groupe 5 TD21 ex 3



1) grâce à la relation fondamentale de la statique des fluides : $\frac{dP}{dz} = -\mu g$

↳ appliquée à l'atmosphère

l'air est assimilé à un gaz parfait donc on a $PV = nRT$

$\Leftrightarrow \mu = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$ $\qquad \frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT}$ $\rightarrow \frac{dP}{dz} + \frac{Mg}{RT} P(z) = 0$

$\boxed{\frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0}$ beurk !

Ainsi $dP = -\mu g \, dz \Leftrightarrow \int_{P_0}^{P(z)} \frac{1}{P} dP = -\int_0^z \frac{Mg}{RT} dz$

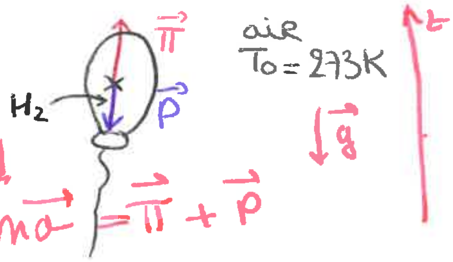
↓ reconnaître l'équa. diff d'ordre 1

$\Leftrightarrow \ln(P(z)) - \ln(P^0) = -\frac{Mg}{RT} z \quad \Leftrightarrow \ln(P(z)) = -\frac{Mg}{RT} z + \ln(P^0)$

$\Leftrightarrow P(z) = e^{-\frac{Mg}{RT} z} P^0 \qquad \Leftrightarrow \underline{P(z) = P^0 e^{-z/H}}$ avec $\underline{H = \frac{RT}{Mg}}$

→ résolution qui manque d'élégance.

2a)



Pour que le ballon décolle, il faut que $\vec{\Pi} > \vec{P}$ ⚠ on ne PEUT PAS comparer des vecteurs

$a_z > 0$

système {ballon sonde}

référentiel terrestre supposé galiléen

bilan des forces : $\vec{\Pi} = -\mu_{air} V \vec{g}$ $\qquad \vec{\Pi}$ est opposé à $\vec{g}$

$= -m_{air} \vec{g}$

$\vec{P} = (m + n M_{H_2}) \vec{g}$

Pfd

$m\vec{a} = \vec{\Pi} + \vec{P}$

sur Oz $m a_z = \Pi - mg$

m_{air} = masse d'air déplacé

$= n \, M_{air}$

Ainsi pour que ~~$\vec{\Pi} > \vec{P}$~~, $\cancel{\mu_{air} V g} > (m + n M_{H_2}) g$ $\quad m_{air} g$ $\qquad n M_{air} > m + n M_{H_2}$

or $\mu_{air} = \frac{P^0 M_{air}}{RT_0}$ inutile

$\Leftrightarrow \cancel{\frac{P^0 M_{air}}{RT_0} V > m + n_0 M_H}$

on veut n_0 minimal donc on prend le cas d'égalité

$\Leftrightarrow n_0 = \cancel{\frac{P^0 M_{air}}{RT_0} \times \frac{V_0}{M_H} - \frac{m}{M_H}}$

ou $n < \frac{m}{M_{air} - M_{H_2}}$ $\qquad = \frac{m}{M_{air} - M_{H_2}}$

$$n_0 = \frac{29\times10^{-3}\times10^5}{8{,}314\times273}\times\frac{\frac{4}{3}\pi\times4^3}{10^{-3}} - \frac{50}{10^{-3}}$$ où $V_0 = \frac{4}{3}\pi\times\cancel{4}^3$ ← le ballon sonde à un rayon de ~~4m~~.

$= 2{,}9\times10^5$ ~~mol~~. ~~n_0~~ $= \frac{50}{(29-2).10^{-3}} = 1{,}85.10^{-3}$ mol

Il faut $2{,}9\times$~~10^5~~ mol de H_2 pour que le ballon s'envole.

2b) Avec l'altitude, le volume du ballon augmente

→ et $V_0 = \frac{n_0 RT_0}{P_0} = \frac{8{,}31\times273\times1{,}85.10^{-3}}{10^5}$

$V_0 = 42\,m^3$

→ on trouve $R = 2m$

B en z:

$$P(z)V(z) = nRT \iff V(z) = \frac{nRT}{P(z)} = \frac{nRT}{p_0}e^{z/H}$$

$$\text{donc } V_1 = \frac{nRT}{P_0}e^{z_1/H} \iff z_1 = H\ln\left(\frac{V_1 P_0}{nRT}\right)$$

Ainsi il existe une altitude maximale z_1 atteinte par le ballon

B

2c) lorsque $z \cancel{>} z_1$, $V = V_1 = cst$ or n depend de z

$n(z)$

↳ n = quantité de H_2 dans le ballon à l'altitude z

$$P(z)V = n(z)RT \iff n(z) = \frac{P(z)V_1}{RT} = \frac{P_0V_1}{RT}e^{-z/H}$$

or le ballon s'élève lorsque $\cancel{\vec{\Pi}} \geq \cancel{\vec{P}}$

Ainsi à l'equilibre $\vec{\Pi} = -\vec{P}$ (VECTEURS) $\iff \frac{M_{air}P(z)V_1}{RT}g = (m + n(z)M_{H_2})g$

$= \left(m + \frac{P(z)V_1 M_{H_2}}{RT}\right)g$

$$\iff P(z) = \frac{mRT}{V_1(M_{air} - M_{H_2})} \quad \text{or } P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

$$\iff z_2 = -H\ln\left(\frac{mRT}{V_1(M_{air}-M_{H_2})P_0}\right)$$

Ainsi le ballon peut atteindre une nouvelle altitude z2.

et $n_0 = \frac{m}{M_{air} - M_{H_2}}$

$$z_2 = -H\ln\left(\frac{n_0 RT}{V_1 P_0}\right) = H\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

groupe 4.

Exercice II. TD 21.

rédaction ? ??

1. $PV = nRT$

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{PMV}{mR} = T_0 - Bz$$
$$= T_0\left[1 - \frac{Bz}{T_0}\right]$$

On suppose que l'air est un gaz parfait

$$P = \frac{T_0 mR}{MV}\left[1 - \frac{Bz}{T_0}\right]$$

De plus,

en équilibre hydrostatique.

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

maladroit

pour 1GP $\boxed{\mu = \frac{PM}{RT}}$

$$\frac{d\frac{nRT}{V}}{dz} = -\mu g$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{R(T_0 - Bz)}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-\mu g}{nR} V \Rightarrow B = \frac{mg}{R}$$

On sépare les variables

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int_0^z \frac{dz}{(T_0 - Bz)}$$

Donc $\frac{mg}{BR} = 1 = a$. ok

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = +\frac{Mg}{RB}\ln\left(\frac{T_0 - Bz}{T_0}\right)$$

Ainsi, $P = \frac{T_0 mR}{MV}\left[1 - \frac{Bz}{T_0}\right]^a = P_0\left[1 - \frac{Bz}{T_0}\right]^a$

2. $\frac{dP}{dz} = \cancel{-\mu g}$

Vous avez déjà utilisé cette relation.

$$-\frac{BP_0}{T_0} = -\mu g$$

$$\mu = \frac{P(z)M}{RT(z)} = \frac{MP_0 (1 - Bz/T_0)^a}{RT_0\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)}$$

$$\mu = \frac{P_0 B}{T_0 g} = \frac{P_0 M}{T_0 R}.$$

$$\boxed{\mu(z) = \mu_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{a-1}}$$

3. AN

$$T(z) = T_0 - Bz$$
$$= 288 - 6{,}5 \times 11$$
$$= 216 \text{ K} = -56\,°C$$

$$a = \frac{Mg}{BR} = \frac{0{,}029 \times 9{,}8}{6{,}5 \cdot 10^{-3} \times 8{,}31} = 5{,}26$$

$$P(z) = P_0\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^a$$
$$= 10^5\left(1 - \frac{6{,}5 \times 11}{288}\right)^a$$
$$= \cancel{0{,}75 \times 10^5}\ Pa$$

$$P(z = 11 \text{ km}) = 1\,(\text{bar})\left(1 - \frac{6{,}5 \times 11}{288}\right)^{5{,}26} = 0{,}22 \text{ bar}.$$

Calcul de la masse volumique :

$$\cancel{\mu = \frac{P_0 B}{T_0 g} = \frac{10^5 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-3}}{288 \times 9{,}81} = \frac{P(z)B}{T(z)g} = \frac{0{,}75 \times 10^5 \times 6{,}5 \times 10^{-3}}{216 \times 9{,}81}} = 0{,}2 \ldots$$

$$\cancel{\mu = \frac{P_0 B}{T_0 g} = \frac{P(z) B}{T(z) g}}$$

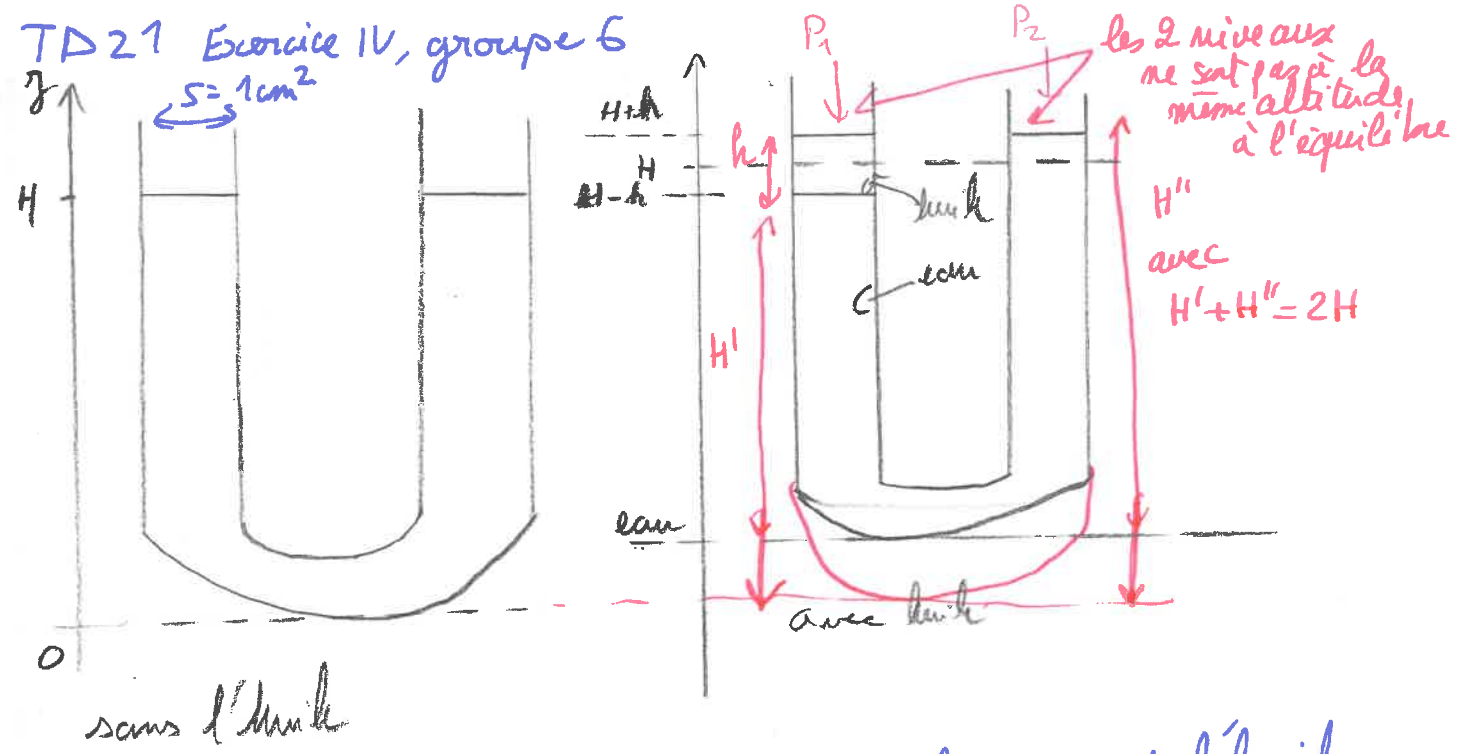
$$= \cancel{\frac{10^5 \cdot 6{,}5\times10^{-3}}{288 \times 9{,}81}} = \cancel{\frac{7{,}5\times10^{-5} \cdot 6{,}5\times10^{-3}}{216 \times 9{,}81}} = \cancel{0{,}23}\ kg.m^{-3}$$

$$\mu(z = 11 km) = \frac{P(z = 11 km) \times M}{R \times T(z = 11 km)}$$

$$= \frac{0{,}22\times10^5 \times 0{,}029}{8{,}31 \times 216}$$

$$\boxed{\mu = 0{,}35\ kg.m^{-3}}$$

TD 21 Exercice IV, groupe 6



• On commence par chercher la masse volumique de l'huile :

$$d = 0{,}6 = \frac{\mu_{huile}}{\mu_{eau}} \Rightarrow \mu_{huile} = 0{,}6 \times \mu_{eau}$$
$$= 600\ kg \cdot m^{-3}$$

• On cherche ensuite h_{huile} la hauteur de l'huile après avoir versé $2\,cm^3$:

$$V_{huile} = S \times h_{huile} \Rightarrow h_{huile} = \frac{V_{huile}}{S} = \frac{2\times10^{-6}}{1\times10^{-4}} = 0{,}02\,m = 2\,cm$$

• Quand on verse l'huile d'un coté étant non miscible et moins dense que l'eau elle va faire descendre l'eau d'un coté et monter de l'autre d'une hauteur h.

• On cherche à déterminer h la hauteur dont varie le niveau de l'eau

d'après la relation de la statique des fluides en projection sur $\vec{u_z}$:

$$\frac{dP_2}{dz} = -\mu_{eau} g \Rightarrow \left(P_2(z) = -\int \mu_{eau}\, g\, dz \right)$$ inutile

comme on est dans le cas de l'étude d'un fluide incompressible μ_{eau} ne dépend pas de la pression ; → B

donc $P_2(z) = -\mu_{eau}\, g\, z + cste$ direct or on sait que :

$$P_2(\overset{H''}{H+h}) = P_0 = -\mu_{eau}\, g\, (\overset{z}{\cancel{H+h}}) + \text{cste}$$

$$\Rightarrow \text{cste} = P_0 + \mu_{eau}\, g\, (H'' \cancel{+h})$$

d'où : $P_2(z) = P_0 + \mu_{eau}\, g\, (H'' \cancel{-h} - z)$

On cherche maintenant $P_1(z)$:

$\cancel{P_1(z) = P_{huile} + P_{eau}}$ non car la pression est une grandeur intensive ne peut pas s'additionner.
↳ il faut utiliser la continuité.

$$P_{huile} = \frac{dP_{huile}}{dz} = -\mu_{huile}\, g$$

$$\Rightarrow P_{huile}(\cancel{H+h}) - P_{huile}(H') = -\mu_{huile}\, g \int_{H'}^{H'+h} dz = P^0 - P_{huile}(H')$$

$\Rightarrow \cancel{P_{huile}} = -\mu_{huile}\, g\, (\cancel{h_{huile}})$

$= P^0 - P_{huile}(H')$ } continuité de
$= P^0 - P_{eau}(H')$ } la pression.

et $\cancel{P_{eau}^{(z)} = -\mu_{eau}\, g\, (H-h+z) + P_0}$

$P_{eau_1}(z) = P_{eau}(H') + \mu_{eau}\, g\, (H'-z)$
$= P^0 + \mu_{huile}\, g\, h + \mu_{eau}\, (H'-z)$

comme le système est à l'équilibre

$$P_2^{(z=0)} = P_1^{(z=0)} \iff P_2 = \cancel{P_{huile} + P_{eau}}$$

$$\iff \cancel{P_0} - \mu_{eau}\, g\, (\overset{H''}{\cancel{H+h}} + z) = +\mu_{huile}\, g\, (h_{huile}) + \mu_{eau}\, g\, (H' \cancel{-h} + \underset{=0}{z}) \cancel{+P_0}$$

$\mu_{eau}\, g\, H'' = \mu_{huile}\, g\, h + \mu_{eau}\, g\, H'$ $\quad z = 0$

$$\iff -\mu_{eau}\, \cancel{g(H+z)} - \mu_{eau}\, g\, h = -\mu_{huile}\, g\, h_{huile} - \cancel{\mu_{eau}\, g\, (H+z)} + \mu_{eau}\, g\, h$$

$H'' - H' = dh \quad$ et $H'' + H' = 2H$

$d = \frac{\mu_{huile}}{\mu_{eau}}$

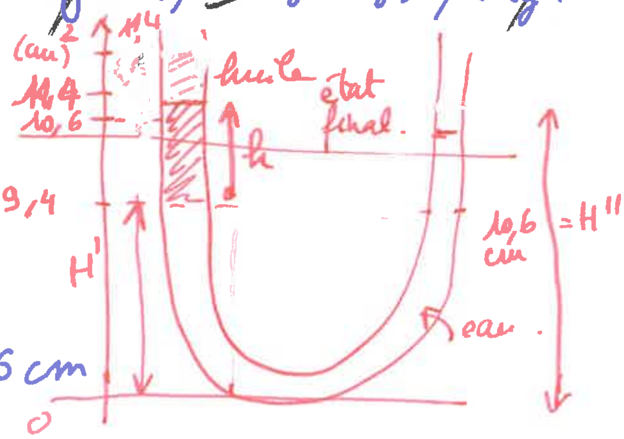
$$= \cancel{-}2\mu_{eau}\, h = \cancel{-}\mu_{huile}\, h_{huile}$$

$H'' = H + \frac{dh}{2}$

$H' = H - \frac{dh}{2}$

$$\Rightarrow h = \frac{\mu_{huile}\, h_{huile}}{2\mu_{eau}}$$

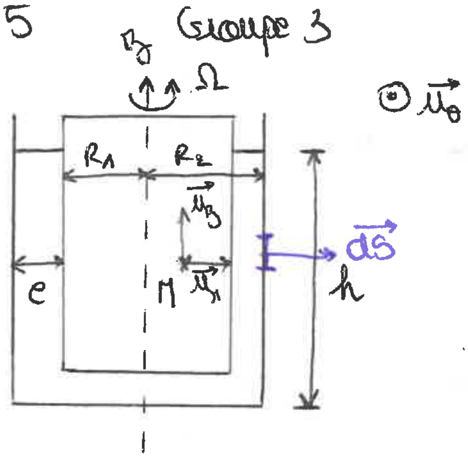
$$\text{AN} : h = \frac{600 \times 0{,}02}{2 \times 1000} = 0{,}006\ \text{m} = 0{,}6\ \text{cm}$$



oui

Ainsi la hauteur de l'interface eau huile est $H - h = 10 - 0{,}6 = 9{,}4$ cm
et la hauteur de l'eau libre est à $H + h = 10{,}6$ cm

TD 21 : Ex. 5 Groupe 3



1) * Par symétrie, $\vec{V}(M) = V(r;\theta;z)\vec{u_\theta}$ → $\vec{v}$ colinéaire à la cause càd la rotation du cylindre de rayon R_1

* Par invariance du système, par translation selon z et par rotation d'angle θ,
$V(r;\theta;z) = V(r)$ donc V est indépendant de θ et z
⟶ on néglige les effets de Bord.

2) on a : $V(r) = Ar + \frac{B}{r}$

Ainsi, * $m.s^{-1} = [A] \times m \Leftrightarrow [A] = s^{-1}$

* $m.s^{-1} = [B] \times m^{-1} \Leftrightarrow [B] = m^2.s^{-1}$

3) D'après les conditions aux limites,
en $r = R_1$, $R_1\Omega = AR_1 + \frac{B}{R_1} = V(R_1)$ oui

et en $r = R_2$, $V(R_2) = 0 = AR_2 + \frac{B}{R_2} \Leftrightarrow A = -\frac{B}{R_2^2}$

condition d'adhérence fluide solide.

Or, $\Omega = A + \frac{B}{R_1^2} = -\frac{B}{R_2^2} + \frac{B}{R_1^2} \Leftrightarrow B = \frac{\Omega}{\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)} = \frac{R_1^2 R_2^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2}$

$$\Leftrightarrow B = \frac{R_1^2(R_1+e)^2\Omega}{(R_1+e)^2 - R_1^2} = \frac{R_1^2(R_1+e)^2\Omega}{2eR_1 + e^2} \simeq \boxed{\frac{R_1^2\Omega}{2e}}$$

oui $e \ll R_1$

Ainsi, $A = -\frac{R_1^2 R_2^2 \Omega}{R_2^2 - R_1^2} / R_2^2 = -\frac{R_1^2\Omega}{2eR_1 + e^2}$

$= -\frac{R_1^2\Omega}{2R_1 e\left(1 + \frac{e}{2R_1}\right)}$ $\boxed{-\frac{R_1\Omega}{2e} \simeq A}$

si $\frac{e}{2R_1} \ll 1$

Donc $V(r) = -\frac{R_1^2\Omega}{2eR_1 + e^2} r + \frac{R_1^2(R_1+e)^2\Omega}{(2eR_1 + e^2)r}$

4) * L'écoulement est stationnaire car la vitesse de rotation du cylindre 1 est ~~uniforme~~ constante. droite ?

* On le suppose aussi ~~uniforme~~ sur une surface car v dépend de r. donc écoulement NON uniforme

* $D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} = \int_S \mu v(r) \, ~~dS~~ \, dr\,dz = \int_S \mu \left(Ar + \frac{B}{r}\right) \cdot dS$

colinéaire à $\vec{u}_\theta$

$= \mu \left(Ar + \frac{B}{r}\right) \iint_S dS = \mu \left(Ar + \frac{B}{r}\right) 2\pi r h$

$= \mu \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} \left(Ar + \frac{B}{r}\right) dr$

$= \mu h \left[A\frac{r^2}{2} + B \ln r\right]_{R_1}^{R_2}$

$$\boxed{D_m = \mu h \left[\frac{A}{2}(R_2^2 - R_1^2) + B \ln \frac{R_2}{R_1}\right]}$$

5) On exprime la résultante des forces de viscosité :

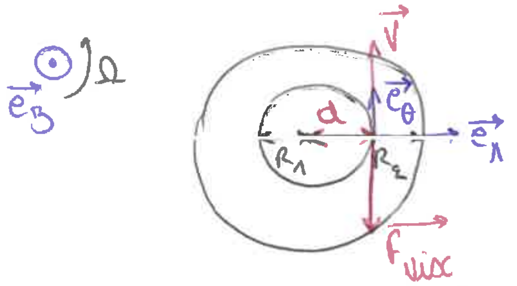
$$\vec{F}_{visc} = \int \vec{df}_{visc} = \iint_S -\eta r \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right) d\Sigma \, \vec{e}_\theta$$

$$= -\eta \iint_{S_1} r \frac{d}{dr}\left(A + \frac{B}{r^2}\right) dr\, dz\, \vec{e}_\theta = -\eta \iint_{S_1} \cancel{r} \left(\frac{-2B}{r^{\cancel{3}2}}\right) dr\, dz\, \vec{e}_\theta$$

$$= +2\eta B \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^h dz \, \vec{e}_\theta \qquad r \in [R_1, R_2]$$

$$\vec{F}_{visc} = -2\eta B \cancel{\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) h \, \vec{e}_\theta = -2\eta \frac{R_1^2 (R_1+e)^2 \Omega}{(2eR_1 + e^2) r} h \, \vec{e}_\theta$$

On en déduit le moment exercé par ces forces :



$$\mathcal{M}(\vec{F}_{visc}) = -\|\vec{F}_{visc}\| \times d \quad \text{où } d = R_1$$

$$= -2\eta \frac{R_1^3 (R_1+e)^2 \Omega}{(2eR_1+e^2) r} h$$

moment résultant $d\mathcal{M} = r\,dF$

$d\mathcal{M} = -\eta r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right) dr\, h$

$= -\eta r^2 \frac{d}{dr}\left(A + \frac{B}{r^2}\right) dr\, h$

$= -\eta \left(\frac{-B}{r^3}\right) r^2 dr\, h.$

$= \eta \frac{2B}{r} h\, dr \qquad r \in [R_1, R_2]$

$\mathcal{M} = \int d\mathcal{M} = 2\eta B h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$

$= 2\eta B h \ln(R_2/R_1)$

6) $C = \phi i$ par définition $= \mathcal{M}$

Donc $-2\eta \frac{R_1^3 (R_1+e)^2 \Omega}{(2eR_1+e^2) r} h = \phi i$

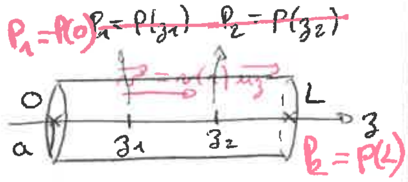
$$\Leftrightarrow \eta = -\frac{\phi i (2eR_1 + e^2) r}{2R_1^3 (R_1+e)^2 \Omega h}$$

$\phi i = 2\eta B h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

↳ on isole η

Exercice 6, TD21 TB Groupe 2.

1) L'écoulement s'effectue dans le sens z croissant si $P_1 > P_2$ (cf schéma)



2) • $v_z(a) = 0$ car elle représente la vitesse à l'interface solide-fluide.
Et d'après la condition d'adhérence fluide-solide, on a bien $\boxed{v_z(a) = 0}$

• $v_z(a)$ est le minimum de la fonction $v_z(r)$. De plus, la vitesse est maximum pour $r = 0$.

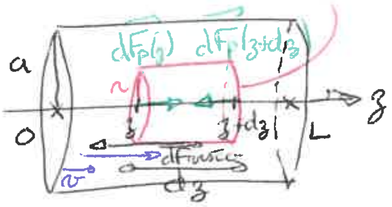
Donc $v_z(r)$ est décroissante sur $[0, a]$.

Comme dit, pour $r = 0$, $v_z(r)$ est extremale, donc $\frac{dv}{d\cancel{z}r} = 0$ ~~en~~ en $r = 0$

Ainsi, par définition en $r=0$, $\boxed{\vec{F} = -\eta \frac{dv}{dz} S \vec{u_z} = \vec{0}}$ B

3) D'après l'énoncé, système = {particule fluide cylindrique}

particule de fluide cylindrique



On se situe dans le référentiel terrestre supposé galliléen

*Bilan des actions extérieures exercées sur le système :

• Forces de pression : $d\vec{F_p}(z) = P(z) \times \pi r^2 \vec{u_z}$
$d\vec{F_p}(z+dz) = -P(z+dz) \times \pi r^2 \vec{u_z}$ } car d'après l'énoncé, la pression ne dépend pas de r.

• Force de viscosité : $d\vec{F}_{visco} = +\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r\, dz\, \vec{u_z}$ (colinéaire à $-\vec{u_z}$ car $\frac{dv}{dr} < 0$.

(le poids et la poussée d'Archimède sont supposés négligés) {ne sont pas colinéaires à Oz.

4) D'après l'énoncé, $v_z = \text{cste}$, donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dz} = \vec{0}$

Ainsi, d'après le principe fondamental de la dynamique, $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$

On peut donc écrire :

$d\vec{F_p}(z) + d\vec{F_p}(z+dz) + d\vec{F}_{visco} = \vec{0}$) en projection sur Oz.

$\Leftrightarrow P(z) \times \pi r^2 - P(z+dz) \times \pi r^2 + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r\, dz = 0$

$\Leftrightarrow (P(z) - P(z+dz)) \pi r^2 + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r\, dz = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\partial P}{\partial z} dz\, \pi r^2 + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r\, dz = 0$

Pour finir, $\boxed{2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dz}}$

5) D'après la question précédente et d'après l'énoncé,

$$2\eta \frac{dv}{dr} = -rK \iff \frac{dv}{dr} = -\frac{rK}{2\eta}$$

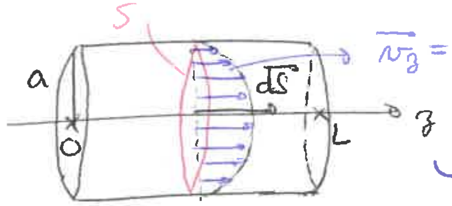
d'après la question 2

Ainsi, $v_z(r) = -\frac{K}{4\eta} r^2 + cste$, or $v_z(a) = -\frac{K}{4\eta} a^2 + cste = 0$

$$\iff cste = \frac{K}{4\eta} a^2$$

Pour finir, $\boxed{v_z(r) = \frac{K}{4\eta}(a^2 - r^2)}$

B

6) 

profil des vitesses dans la conduite

7) Par définition, $q_V = \underset{\text{à travers } S}{\phi(\vec{v})} = \iint_S \vec{v_z} \cdot \vec{dS} = \iint_S v_z(r)\,\vec{u_z} \cdot dS\,\vec{u_z}$

car nous sommes en coordonnées cylindriques

$$= \frac{K}{4\eta} \iint_S (a^2 - r^2)\,\vec{u_z} \cdot r\,d\theta\,dr\,\vec{u_z}$$

$$= \frac{K}{4\eta} \int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{K}{4\eta} \left[a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \times 2\pi$$

$$= \frac{K}{4\eta} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) \times 2\pi$$

Et pour finir, $\boxed{q_V = \frac{K a^4 \times \pi}{8\eta}}$

TB