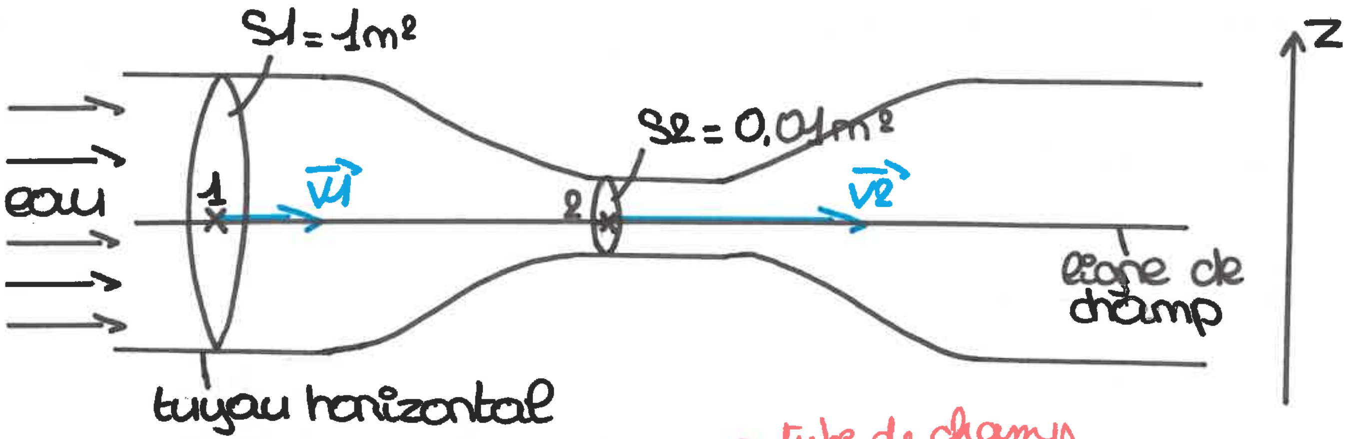
groupe 9

- Mathias
- Senhat
- Célia

TD 23 - exercice I



1) on sait qu'il y a conservation du débit volumique le long d'une ~~même ligne de champ~~ tube de champ. Dv reste constant : $D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} = v_1 \frac{1}{0{,}01}$$

$$= 100\, v_1$$

on a donc $v_2 \gg v_1$

2) <u>Loi de Bernoulli :</u> sur la ligne de champ 1 → 2.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu_{eau}} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu_{eau}} + g z_2$$

or ici $z_1 = z_2$ donc : $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu_{eau}} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu_{eau}}$

<u>les variables sont :</u>
- P = la pression [Pa]
- V = la vitesse de l'écoulement [m.s⁻¹]
- Z = la hauteur [m]
- μ_{eau} = la masse volumique de l'eau [Kg.m⁻³]

<u>conditions d'applications de la loi de Bernoulli :</u>
- écoulement parfait, homogène et incompressible
- écoulement stationnaire sur une ligne de champ
- sans machine

3) on cherche V_1 tel que $P_1 = 1\,bar = 10^5\,Pa$ et
$P_2 = p_2 = 2500\,Pa$ /

on utilise la loi de Bernoulli :

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu_{eau}} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu_{eau}}$$ /

$$\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_2}{\mu_{eau}} - \frac{P_1}{\mu_{eau}}$$

$$\frac{V_1^2 - (100V_1)^2}{2} = \frac{P_2 - P_1}{\mu_{eau}}$$

$$\frac{V_1^2(1 - 10\,000)}{2} = \frac{P_2 - P_1}{\mu_{eau}}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2P_2 - P_1}{(1-10\,000)\mu_{eau}}} = \sqrt{\frac{2(2500 - 10^5)}{(1-10\,000)1000}}$$

$$= 0{,}14\,m.s^{-1}$$ /

pour avoir une pression saturante de $p_2 = 2500\,Pa$,
il faut une vitesse $V_1 = 0{,}14\,m.s^{-1}$ / B

4) d'après la loi de Bernoulli :

$$P_2 = \frac{\mu_{eau}(V_1^2 - V_2^2)}{2} + P_1$$

$$= \frac{\mu_{eau}\left(V_1^2 - \left(V_1\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)}{2} + P_1$$

$$= \frac{1000\,V_1^2\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)}{2} + P_1$$

$$= 500\,V_1^2\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right) + P_1$$

ne mélangez pas expression numériques et littérals.

avec $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2$

$$= \mu_{eau} v_1^2 \; (1 - 10^4) + P_1$$

$P_2 \simeq P_1 - 10^4 \mu_{eau} v_1^2$ $\quad$ $P_2 \searrow$ si $v_1 \nearrow$

groupe 4
- Mathias
- Serhat
- Célia

TD 23 - exercice I

5)

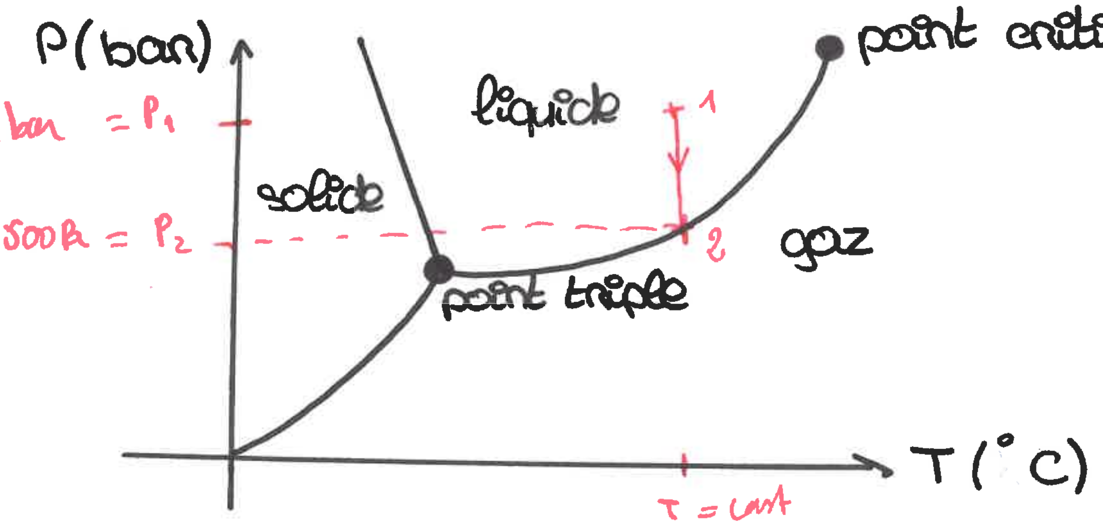


diagramme (P,T) de l'eau

la transformation $1 \to 2$ correspond à une diminution de la pression lors de l'accélération dans l'étranglement de la canalisation
↳ jusqu'à la pression de vapeur saturante = pression de l'équilibre liq = vap.

6) si la vitesse initiale est supérieure à $v_1 = 0{,}14\ m.s^{-1}$, la pression dans l'étranglement diminue encore plus car on a vu à la question 4 que P_2 est une fonction affine décroissante de ~~proportionnelle à~~ v_1^2
donc si la pression diminue et atteint la pression de vapeur saturante, l'eau va se vaporiser
c'est déjà le cas pour $v_1 = 0{,}14\ m.s^{-1}$
↳ B

TD 23 EXERCICE II - Groupe 2

il faut identifier les variables introduites

a) Relation de Bernoulli $\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_b^2}{2} + gz_b + \frac{P_B}{\rho}$

Condition d'application : écoulement parfait stationnaire incompressible homogène sans machine sur une ligne de champ. AB.

→ N'a aucun sens écrit ainsi

b) Bilan des masses $m(t+dt) = m(t) + \delta m_e - \delta m_s$

aucune variable n'est identifiée

$\Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = D_{me} - D_{ms}$

La conservation de la masse impose $\frac{dm}{dt} = 0$ équation de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Donc $D_{me} = D_{ms} = D_m$

or $\rho = \text{cst}$ liquide incompressible

Et $\cancel{D_{me}} = \boxed{v_A \times S_A = \cancel{D_{ms}} = v_B \times S_B}$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$

donc $\boxed{v_B = \frac{v_A S_A}{S_B}}$

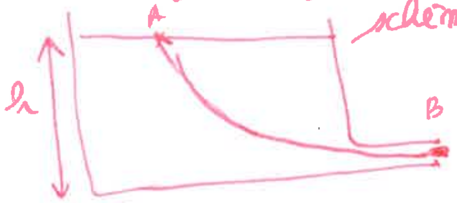
⇒ conservation du débit volumique dans un tube de champ

c) On a $S_A \gg S_S$

On applique la relation de Bernoulli sur une ligne de champ

aucun sens sans schéma

$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\rho}$



Or $P_A = P_B = P_0$

donc $\frac{v_A^2}{2} + gh = \frac{v_B^2}{2}$ avec $z_A = h$, $z_B = 0$

d'où $gh = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}$

Or $v_A S_A = v_B S_B$ donc $v_A = \frac{v_B S_B}{S_A}$

d'où $gh = \frac{\left(v_B^2 - \left(\frac{v_B S_B}{S_A}\right)^2\right)}{2}$

$= \frac{v_B^2}{2}\left[1 - \left(\frac{S_B}{S_A}\right)\right] \simeq \frac{v_B^2}{2}\left(\cancel{\frac{S_B}{S_A}}\right)^2 \Leftarrow \frac{v_B^2}{2}$ car $\frac{S_B}{S_A} \ll 1$

~~Or~~ $S_A \gg S_B$

au cours du temps $h \searrow$ donc $v_B \searrow \Rightarrow$ l'écoulement n'est PAS STATIONNAIRE

donc $v_B^2 = 2gh$ d'où $v_B = \sqrt{2gh}$

on suppose que des variations de v_B sont faibles ⇒ écoulement quasistationnaire.

⇒ on peut appliquer la relation de Bernoulli.

d) On a $D_V = -\frac{dV}{dt} = v_A \times S_A$ avec $V = Sh(t)$

volume

d'où $-\frac{S\,dh(t)}{dt} = v_A \times S_A$

Or $v_B S_B = v_A S_A$

donc $-S_A \frac{dh(t)}{dt} = v_B S_B$

h(t) est décroissante $\Rightarrow \frac{dh}{dt} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}\, S_B}{S_A}$

e) On cherche le temps nécessaire T pour vidanger complètement la citerne
On intègre la relation précédente

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\sqrt{2g} \times \sqrt{h} \times \frac{S_B}{S_A}$$

$\Leftrightarrow \int_H^0 \frac{dh(t)}{dt} = -\sqrt{2g}\,\frac{S_B}{S_A}\int_0^T dt$

à $t=0$ $h=H$
à $t=T$ $h=0$

⚠ justesse des bornes.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{H} = \sqrt{2g}\,\frac{S_B}{S_A}\,T$

d'où $T = \dfrac{2\sqrt{H}\,S_A}{\sqrt{2g}\,S_B}$

$\boxed{A.N}$ $T = \dfrac{2\times\sqrt{1}\times 1}{1\times10^{-3}\times\sqrt{2\times9{,}8}} = 451{,}8\ s$ $= 452\ s.$

trop de CS.

donc $T \simeq 7$ minutes 31 s.

f) On néglige la variation de la vitesse au cours du temps

Ainsi

$V_B = \sqrt{2gh_0}$ (AN) $V_B = \sqrt{2\times9{,}8\times1}$
$= 4{,}4\ m/s.$

$V_B \times S_B = 4{,}4 \times 10^{-3} = 0{,}0044\ m^3/s = D_V$

$= \dfrac{V}{\Delta t}$

$\dfrac{V_{cylindre}}{V_B} = \dfrac{1}{0{,}0044} = 227{,}3\,s.$

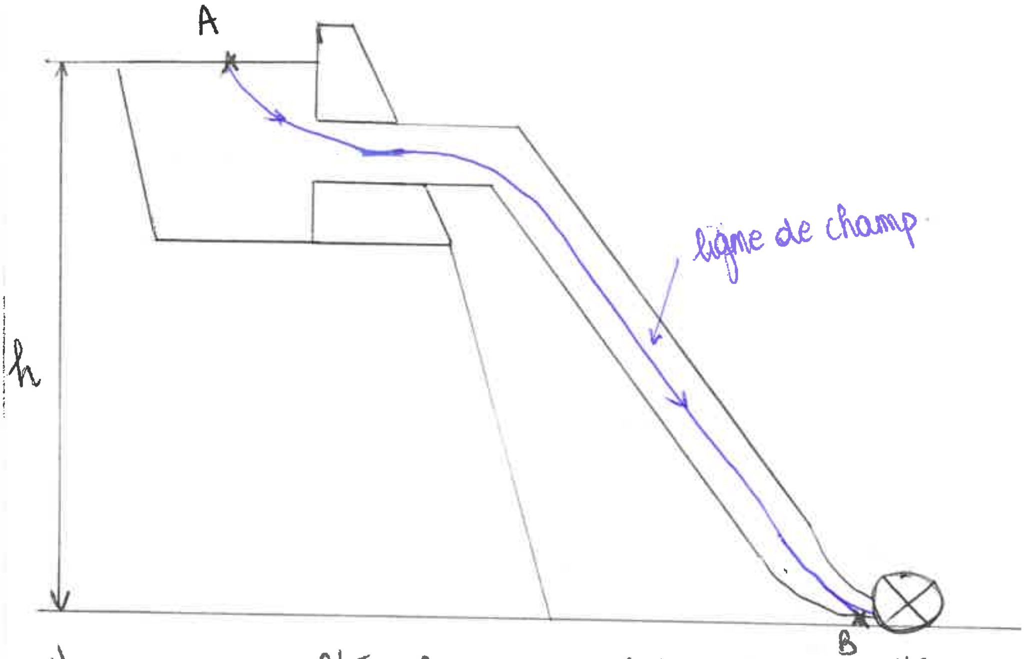
$\Delta t = \dfrac{V}{D_V} = \dfrac{V}{V_B S_B}$

raisonnez littéralement

donc $T \simeq 4$ minutes.

↳ conclusion ? on trouve une durée environ deux fois plus faible.

TD 23 : Ex. 3 Groupe 3



1) On suppose l'écoulement parfait, incompressible, homogène, sans machines et en régime stationnaire sur la ligne de champ comprise entre A et B :

On applique la relation de Bernoulli entre A et B

$$\frac{v_A^2}{2} + g z_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + g z_B + \frac{P_B}{\mu}$$ identifier les variables

Or, $\begin{cases} v_A = 0 \ ; \ v_B = v_{sortie} \\ P_A = P_B = P^\circ \end{cases}$

Donc $v_{sortie} = \sqrt{2g(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 900} \simeq 134 \text{ m.s}^{-1}$

On en déduit D_m :

$D_m = \mu D_V$ avec $D_V = vS$ = cte car l'écoulement est homogène et incompressible

D'où $D_m = \mu v_s S = 1000 \times 134 \times 150 \times 10^{-4} = 2010 \text{ kg.s}^{-1}$

Avec ces ordres de grandeurs, on en déduit que l'écoulement est turbulent

$= 2t/s$ c'est beaucoup !

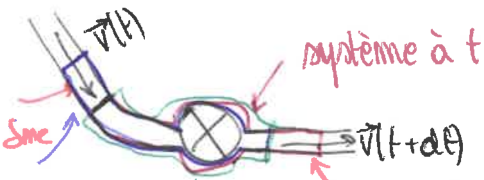
↳ il faut calculer le nombre de Reynolds pour conclure

$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$

$R = \frac{\mu v_s L}{\eta}$

$D = L = 13{,}8 \text{ cm}$

$= \frac{10^3 \times 134 \times 0{,}138}{10^{-3}} = 18 \cdot 10^6$ → OK

2) 

⚠ le jet est horizontal avant d'entrer dans la turbine à la pression P_0

il faut identifier les variables.

On effectue un bilan d'énergie mécanique dans le système pendant dt :

$$E_{mf}(t+dt) - E_{mf}(t) = \frac{dE_m}{dt}dt = E_{mo}\cancel{(t+dt)} + \delta E_{ms} - (\cancel{E_{mo}(t)} + \delta E_{me})$$

car régime stationnaire.

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt}dt = \delta m_s e_{ms} - \delta m_e e_{me} \quad \text{avec } \delta m_s = \delta m_e = \delta m$$

$$= \delta m (e_{ms} - e_{me}) \qquad = D_m dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = D_m \left(\frac{1}{2} v_s^2 + g z_s - \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \right)$$

On pose : $\begin{cases} z_s \simeq z_e \\ v_s \ll v_e \end{cases}$ → jet horizontal. → on peut supposer la vitesse nulle après la turbine

Ainsi, on applique le théorème de l'énergie mécanique sur le système fermé : B le système est l'eau

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{1}{2} D_m v_e^2 = +P_{turbine/eau} = -P_{eau/turbine}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} D_m v_e^2 = P_{eau/turb} = \frac{1}{2} \times 2010 \times 134^2 \simeq 18 \text{ MW}.$$

* la puissance des forces de pression est nulle car le jet est à la pression atmosphérique, et la résultante des forces de pression est nulle.

* on cherche la puissance maximale on suppose donc l'écoulement parfait, $P_{visco} = 0$.

1) On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide.

⚠ → Démonstration EXIGÉE

on obtient :

$$D_m\left(\left(\frac{v_2^2}{2}+gz_2+\frac{P_2}{\mu_2}\right)-\left(\frac{v_1^2}{2}+gz_1+\frac{P_1}{\mu_1}\right)\right)=\mathcal{P}_{visco}+\mathcal{P}_{utile}$$

$\mu=\mu_1=\mu_2$: le fluide est incompressible

$\mathcal{P}_{visco}=0$: le fluide est parfait

$D_m=\mu D_v$

alors : $$\mu D_v\left(\left(\frac{v_2^2}{2}+gz_2+\frac{P_2}{\mu}\right)-\left(\frac{v_1^2}{2}+gz_1+\frac{P_1}{\mu}\right)\right)=\mathcal{P}_{utile}$$

Soient d_1 et d_2 les diamètres d'entrée et de sortie de la machine.

donc $D_v=\underbrace{S_1v_1}_{=\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2v_1}=\underbrace{S_2v_2}_{=\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2v_2}$ → écoulement incompressible

donc $v_1=\dfrac{D_v}{S_1}=\dfrac{D_v}{\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}$ et $v_2=\dfrac{D_v}{\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

Soit $h=z_2-z_1$

Donc $$\mu D_v\left(\frac{D_v^2}{2S_2^2}-\frac{D_v^2}{2S_1^2}+gh+\frac{1}{\mu}(P_2-P_1)\right)=\mathcal{P}_{utile}$$

$S_1 = \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \quad S_2 = \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \rho D_v \left(\frac{D_v^2}{2} \left(\frac{1}{\pi^2 \left(\frac{d_2}{2}\right)^4} - \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{d_1}{2}\right)^4} \right) + gh + \frac{1}{\rho}(P_2 - P_1) \right) = \underbrace{\mathcal{P}_{utile}}_{\text{puissance reçue par l'eau}}$$

Le rendement de la pompe est de 80%, donc $\mathcal{P}_{utile} = 0{,}8 . \mathcal{P}_m$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_{utile}}{0{,}8}}$$

2) $$\mathcal{P}_m = \frac{1}{0{,}8} \times 10^3 . 9 \left(\frac{9^2}{2} \left(\frac{1}{\pi^2 \left(\frac{20.10^{-2}}{2}\right)^4} - \frac{1}{\pi^2 \left(\frac{30.10^{-2}}{2}\right)^4} \right) + 9{,}8 \times 1{,}2 + \frac{1}{10^3}\left(1{,}7.10^5 - 0{,}7.10^5\right) \right)$$

$$= \cancel{371 . 10^6} \text{ W}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_m = \cancel{371} \text{ MW}}$$

absurde !

⚠ $D_v = 9000 \text{ L.min}^{-1}$

$= \frac{9}{60} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$

on trouve $\mathcal{P}_m = 20 \text{ kW}$