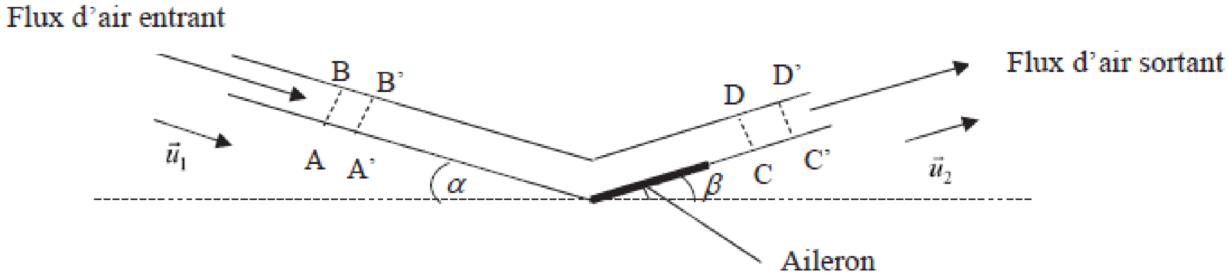
Thème : Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

APPLICATIONS DIRECTES

1. Effet de l'aileron sur une voiture

Pour améliorer la tenue de route, certaines voitures sportives sont équipées d'un aileron pour renforcer l'appui arrière. On se propose ici de quantifier son influence.
L'air est assimilé à un fluide parfait. Son écoulement, dans le référentiel de la voiture, est supposé stationnaire et incompressible. L'effet de la pesanteur sur l'air est négligé.
L'aileron, incliné vers le haut d'un angle non orienté $\beta \in [0, \pi/2]$ par rapport à la route, dévie l'air qui s'écoule tangentiellement à la partie arrière du véhicule qui est inclinée vers le bas d'un angle, non orienté $\alpha \in [0, \pi/2]$ par rapport à la route.
On note S_e la section transverse de l'écoulement de l'air dévié par l'aileron. Cette section est supposée constante le long du tube de courant décrit ci-dessous :



On note respectivement $\overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_2} = v_2\overrightarrow{u_2}$, les vitesses des écoulements d'air entrant et sortant du tube de courant. $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs unitaires.
On considère le système fermé, constitué par l'air compris entre les sections AB et CD à la date t et de l'air compris entre les sections A'B' et C'D' à la date t + dt.

a. On note δm_1 la masse qui traverse la section AB entre t et t + dt et δm_2 la masse qui traverse la section CD entre t et t + dt. Comparer δm_1 et δm_2 ainsi que v_1 et v_2.

b. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé défini précédemment, déterminer la force exercée sur le tube de courant en fonction de μ, masse volumique de l'air, v_1, S_e, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

c. On admet que la force $\vec{F}_{air\rightarrow véhicule}$ exercée par l'air sur le véhicule en mouvement est l'opposée de celle exercée sur le tube de courant. En déduire la composante perpendiculaire à la route de la force exercée par l'air sur le véhicule en fonction de μ, v_1, S_e, α et β.
Discuter du sens de cette composante.

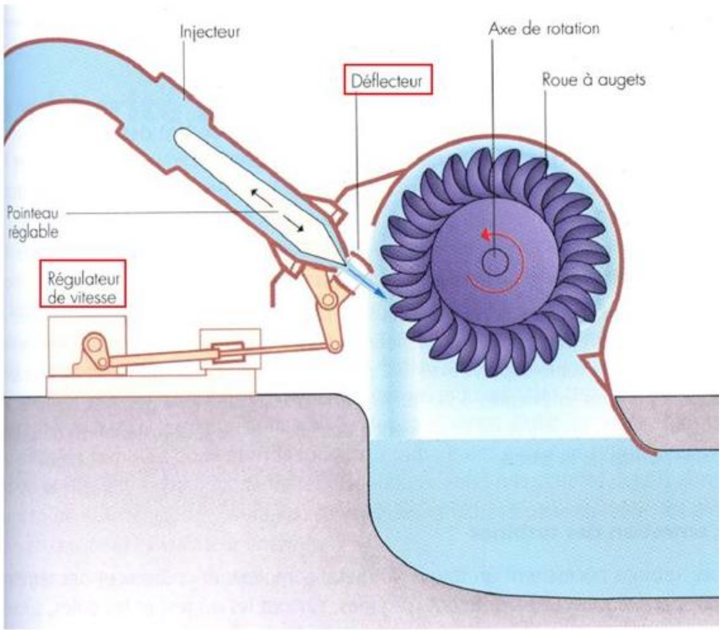
2. Poussée d'une fusée

Une fusée en mouvement sur la verticale ascendante dans le référentiel terrestre supposé galiléen est soumise au champ de pesanteur supposé uniforme. Elle éjecte des gaz avec un débit massique Dm constant et une vitesse relative $\vec{u}$ constante et dirigée vers le bas.
1. Choisir un système fermé composé de la fusée et de son carburant à l'instant t, et décrire ce système à l'instant t+dt.
2. Effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé entre t et t+dt.
3. Effectuer le bilan des actions extérieures qui s'exercent sur le système fermé. Appliquer le théorème de la résultante cinétique, et définir la « poussée ».
4. Effectuer un bilan d'énergie cinétique sur le système fermé entre t et t+dt.
5. Appliquer le théorème de la puissance cinétique pour déterminer la puissance fournie par le moteur de la fusée.

3. Etude d'une turbine

Une turbine, de rayon a, entraînée par un jet d'eau, supposé parfait, tourne autour de son axe fixe Δ. Le jet d'eau, d'épaisseur négligeable, arrive avec une vitesse v_1 et un débit de masse D_m ; il ressort avec une vitesse v_2 qui dépend de la vitesse angulaire ω.

On appelle J le moment d'inertie de la turbine et de l'eau qu'elle contient. L'action de la turbine sur son axe est modélisée par un couple constant Γ. On considère le système ouvert constitué de la turbine et de l'eau qu'elle contient à l'instant t. On néglige l'effet de la pesanteur sur l'écoulement.



Turbine Pelton. Les roues Pelton tournent dans l'air à la pression atmosphérique sous l'impulsion des jets à très grande vitesse dirigés sur les augets par les injecteurs.

1. Effectuer un bilan de moment cinétique sur le système fermé coïncident et retrouver l'équation suivante :

$$J\frac{d\omega}{dt} + D_m a(v_2 - v_1) = -\Gamma$$

2. Effectuer un bilan d'énergie cinétique. Comment serait modifiée cette équation si on tenait compte de la viscosité de l'eau ?

3. A partir des deux équations précédentes, exprimer v_2 en fonction de ω, a et v_1, et déterminer l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par ω(t), qui fait intervenir les grandeurs Dm, a, v_1 et Γ.

4.a) Déterminer la vitesse angulaire ω_p en régime permanent, discuter selon la valeur de v_1.

b) Exprimer Γ en fonction de ω_p.

c) En déduire la puissance fournie par la turbine en fonction de ω_p. Pour quelle valeur de ω_p cette puissance est-elle maximale ? Déterminer la puissance maximale. Tracer le graphe de la puissance maximale en fonction de ω_p.

5. Déterminer ω(t) en régime transitoire.

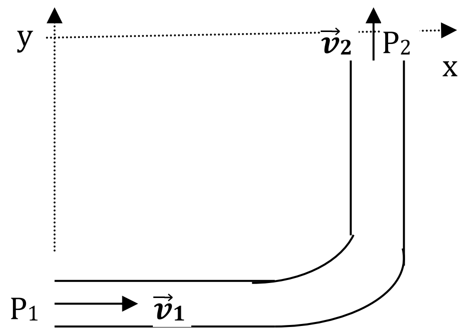
EXERCICES

I. Force exercée sur un coude de canalisation :

De l'eau de masse volumique μ s'écoule en régime stationnaire avec un débit massique Dm dans une canalisation **horizontale** de section constante S faisant un coude d'angle droit.

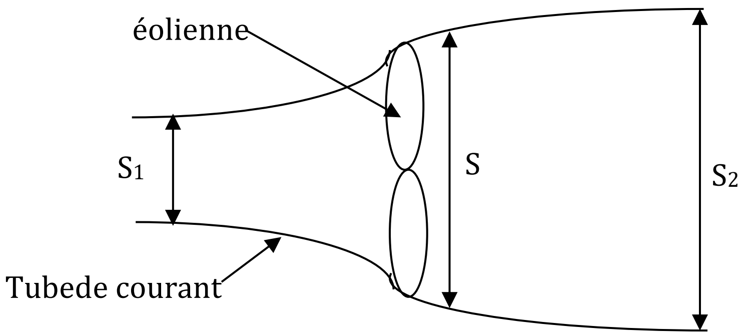
L'écoulement est supposé parfait. Loin du coude en amont, la pression est uniforme égale à P_1 et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse $v_1\vec{u}_x$. Loin du coude en aval, la pression est uniforme égale à P_2 et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse $v_2\vec{u}_y$.

Effectuer un bilan de quantité de mouvement pour déterminer la force exercée par l'eau sur le coude de la canalisation.



II. Etude d'une éolienne

Une éolienne de section S reçoit un flux d'air. L'écoulement est supposé incompressible. On étudie un tube de courant qui s'appuie sur l'hélice. Sa section d'entrée a une aire S_1 et sa section de sortie une aire S_2. On note S l'aire de la section du tube au niveau de l'hélice et $\vec{v}$ la vitesse de l'écoulement à travers cette section.



1. Exprimer le débit massique D à travers les différentes sections.
2. Sur quelles lignes de courant est-il possible d'appliquer la relation de Bernoulli ?
3. Déterminer la pression de l'air, juste avant l'hélice, puis celle juste après l'hélice. En déduire la résultante des forces de pression exercée par l'air sur l'hélice, puis la puissance mécanique reçue par l'hélice.

III. Acheminement du minerai

Le dispositif d'acheminement du minerai d'uranium est schématisé sur la figure 4. Des roches sont contenues dans un réservoir suspendu au-dessus du tapis et déversées par un conduit vertical sur le tapis. On considérera que lorsque les roches entrent en contact avec le tapis, la composante de leur vitesse colinéaire à $\vec{u}_x$ dans le référentiel lié au sol, supposé galiléen, est négligeable.

1. Le dispositif est conçu pour acheminer $\dot{m}_j$ = 25 tonnes de roches par jour ; il fonctionne en continu. Évaluer le débit massique moyen Dm d'arrivée des roches sur le tapis exprimé en $kg.s^{-1}$.

Lorsqu'elles arrivent sur le tapis, les roches acquièrent la même vitesse que le tapis qui les achemine ainsi, jusqu'à l'extrémité droite du tapis où elles quittent le tapis animées de la vitesse $\vec{v}$ = v $\vec{u}_x$. On suppose toujours le régime d'écoulement des roches permanent. On note $\vec{F}$ = F $\vec{u}_x$ la composante selon l'axe (O, $\vec{u}_x$) de l'action des roches sur le tapis.

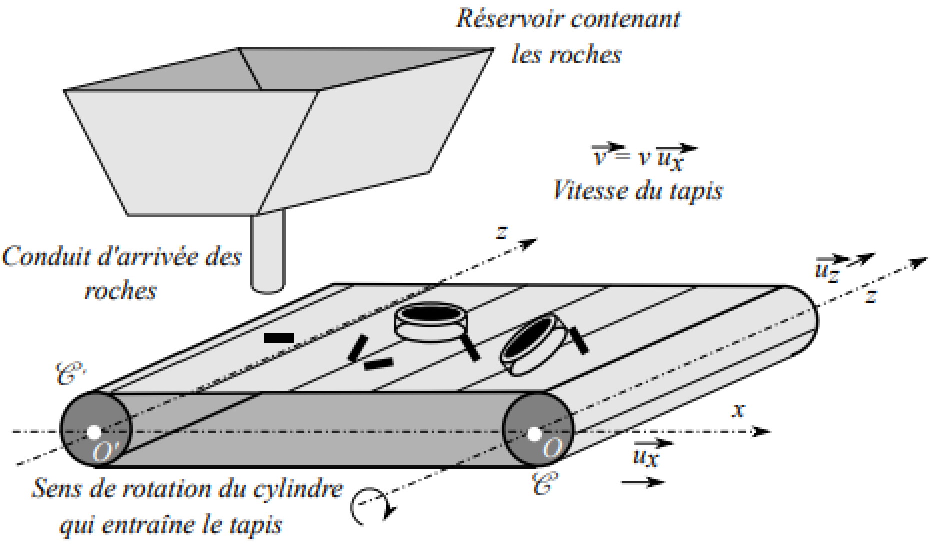
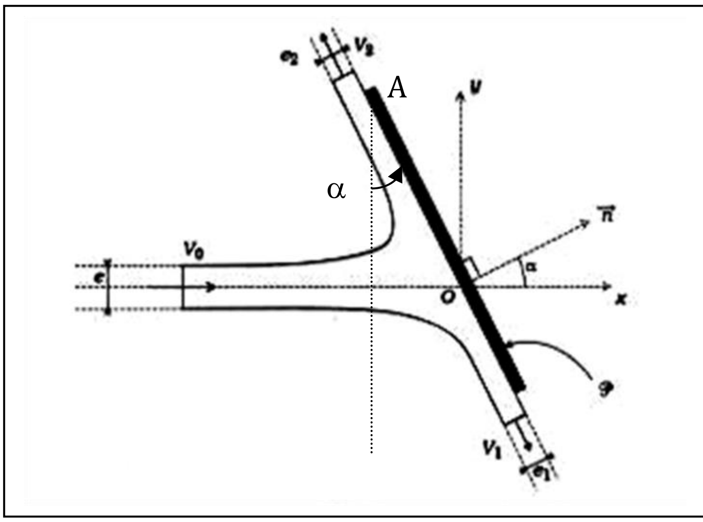


FIGURE 4 – Dispositif d'acheminement des roches

2. Déterminer F en fonction de Dm et v. On effectuera un bilan de quantité de mouvement en projection sur $\vec{u}_x$ sur le système compris dans le volume de contrôle formé par le lieu d'occupation des roches en contact avec le tapis. Ce volume de contrôle est fixe dans le référentiel lié au sol. Il reçoit de la matière à l'extrémité du tapis située sous le réservoir et en éjecte à l'autre extrémité située à l'entrée d'un concasseur.

IV. Jet d'eau sur une plaque



Un jet a la forme d'une lame d'épaisseur e et de largeur l selon Oz. La vitesse de l'eau dans le jet est V_o. Arrivant sur une plaque $\mathcal{P}$ (largeur L dans le plan de la figure, de masse m), il se divise en deux jets caractérisés par les grandeurs (e_1,v_1, l) et (e_2, v_2, l).

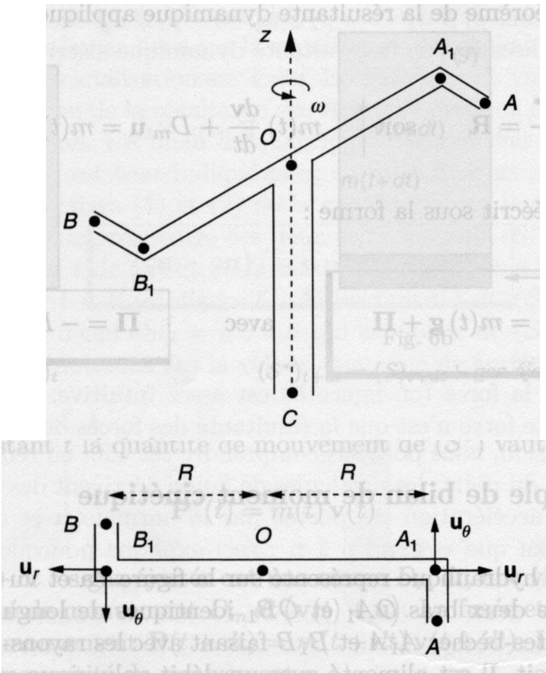
La plaque $\mathcal{P}$ est mobile sans frottements autour de l'axe horizontal Az : sous l'effet du jet d'eau, elle prend à l'équilibre une inclinaison α par rapport à la verticale.

On fera les hypothèses suivantes :

le fluide est parfait et incompressible de masse volumique ρ ;

les effets de la pesanteur dans l'écoulement sont négligés.

1. Déterminer les modules des vitesses v_1 et v_2, à la sortie du jet.
2. Déterminer une relation entre les épaisseurs e, e_1 et e_2.
3. On s'intéresse au système eau + plaque. Que vaut la résultante des forces de pression exercées par l'air sur ce système ? En déduire la résultante des forces exercées par l'air sur l'eau.
4. Déterminer, à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement sur le système eau, l'expression des débits massiques Dm_1 et Dm_2 des jets émergeants en fonction de Dm incident et de l'angle α.
5. Déterminer l'angle α En fonction de m, g, e, l, v_o et ρ.



V. Tourniquet hydraulique

Le tourniquet hydraulique ci-contre est alimenté par un débit volumique constant Dv à la base C de son axe de rotation vertical Oz. On appelle $\vec{u}$ la vitesse relative de l'eau par rapport au tourniquet.

1. Quelles sont les parties du système constitué du tourniquet et de l'eau qu'il contient, limité par les surfaces ABC, qui ont une contribution au moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz ?

On posera $L_z(t) = J\omega(t)$.

2. Déterminer le système fermé à l'instant t et à l'instant t+dt.
3. Effectuer sur le système fermé, un bilan de moment cinétique entre t et t+dt.
4. Déterminer les moments résultants extérieurs par rapport à Oz.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement, la résoudre. On suppose que à t = 0, $\omega = 0$.