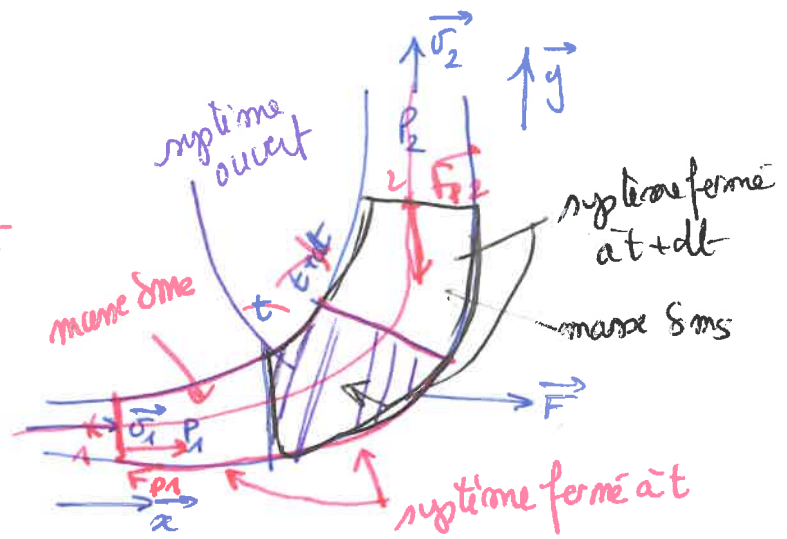


TD25 : Exercice 1

Grp1

système = { conduite + eau }

⚠ il faut définir PROPRIÉTÉS
le système fermé à t



• bilan de $\vec{p}$: $\vec{p}_{\text{fermé}}(t+dt) - \vec{p}_{\text{fermé}}(t) = \vec{p}_{\text{ouvert}}(t+dt) - \vec{p}_{\text{ouvert}}(t) + \delta m_{\text{sortie}} \vec{v}_2$

- sur entrée $\vec{v}_1$

en régime stationnaire $\vec{p}_{\text{ouvert}}(t+dt) = \vec{p}_{\text{ouvert}}(t)$

et $Dm = \frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{fermé}}(t)}{dt} = Dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt$$

$$= Dm (v \vec{u}_y - v \vec{u}_x) = Dm v (\vec{u}_y - \vec{u}_x)$$

• bilan des actions extérieures = - Pression (p_1, p_2) $\vec{F}_p$

- Force exercée par l'eau sur le arc $\vec{F}_{\text{eau sur le arc}}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{fermé}}(t)}{dt} = \vec{F}_{p_1} + \vec{F}_{p_2} + \vec{F} = p_1 S \vec{u}_x + p_2 S \vec{u}_y + \vec{F}$$

à classer

$$\Rightarrow p_1 S \vec{u}_x + p_2 S \vec{u}_y + \vec{F} = Dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

selon $\vec{x}$: $F = - (Dm v_1 + p_1 S)$

→ l'écoulement est incompressible donc $Dv = v_1 S = v_2 S = \text{const}$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = v$

↪ sur la ligne de champ 1 → 2 l'écoulement est parfait, incompressible et homogène, stationnaire, on peut appliquer la relation de Bernoulli

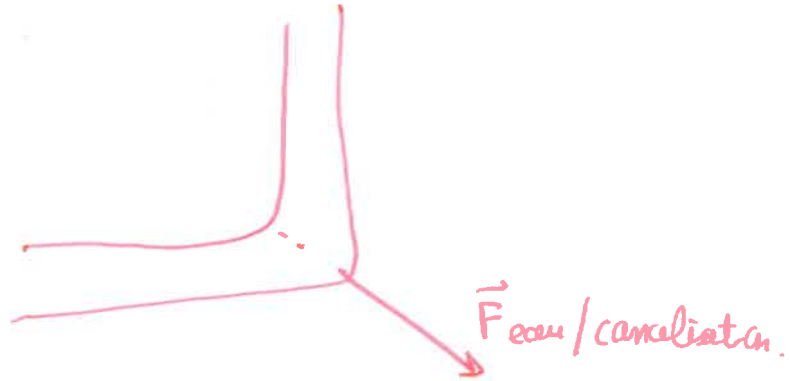
$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2$$

avec $z_1 = z_2$ écoulement horizontal
 $v_1^2 = v_2^2 = v^2$

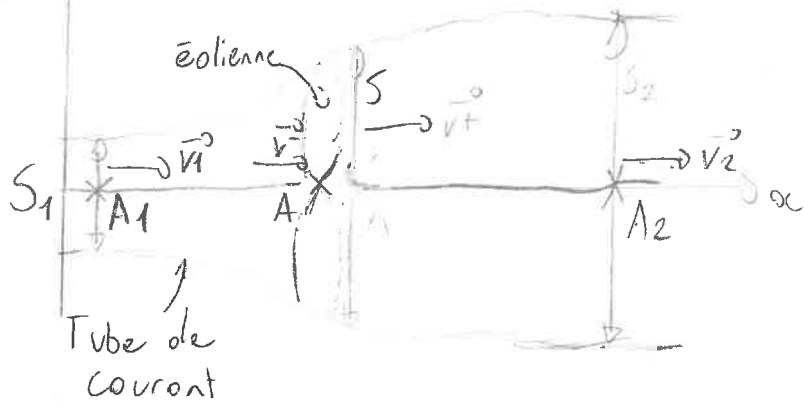
$\Rightarrow p_1 = p_2$

$$Dm v (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = PS (\vec{u}_z - \vec{u}_y) + \vec{F}_{canalisation/eau}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{eau/canalisation} &= - \vec{F}_{canalisation/eau} \\ &= (PS + Dm v) (\vec{u}_z - \vec{u}_y) \end{aligned}$$



Exercice II.



1) Par définition: $Dm = \phi(\rho \vec{v})$

Au niveau de la surface S_1 ,

$$Dm_1 = \iint_{S_1} \rho_{air} \cdot \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1$$

$$= [\rho_{air} \cdot v_1 S_1] \quad \text{On a } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{S}_1 \text{ colinéaires de même sens.}$$

Surface 2:

$$Dm_2 = \iint_{S_2} \rho_{air} \cdot \vec{v}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \rho_{air} \cdot v_2 \cdot S_2$$

car $\vec{v}_2$ et $\vec{S}_2$ colinéaires et de même sens.

Au niveau de l'éolienne:

$$Dm = \iint_S \rho_{air} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho_{air} \vec{v} \cdot \vec{S}$$

→ sur machine

2) Puisqu'il y a l'éolienne, pour pouvoir utiliser la loi de Bernoulli, on se place sur une ligne de champ, on suppose l'écoulement parfait, l'air incompressible et homogène, en régime stationnaire. Pour utiliser la relation de Bernoulli, on se place sur une ligne de champ à gauche de la machine et une ligne de champ à droite de la machine (Éolienne).

3) On note v^-, p^- la vitesse et la pression juste avant l'hélice et v^+, p^+ la vitesse et la pression juste après l'hélice.

On applique la relation de Bernoulli avant l'hélice:

$$\left[\frac{V_1^2}{2} + g z_{A1} + \frac{P_1}{\rho_{air}} = \frac{V_-^2}{2} + g z_A + \frac{P_-}{\rho_{air}} \right] \quad \text{On a } P^0 = P_1 = P_2$$

$$z_{A1} = z_A = z_{A2}$$

$$\rightarrow \frac{V_1^2}{2} + \frac{P^0}{\rho_{air}} = \frac{V_-^2}{2} + \frac{P_-}{\rho_{air}}$$

Par conservation du débit massique volumique: $V_- \cdot S = V_1 \cdot S_1 \rightarrow V_- = \frac{V_1 S_1}{S}$

$$\rightarrow P_- = \rho_{air} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{P^0}{\rho_{air}} - \frac{V_1^2 S_1^2}{2 S^2} \right)$$

$$P_- = \rho_{air} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{P^0}{\rho_{air}} - \frac{V_1^2 S_1^2}{2 S^2} \right)$$

En appliquant la relation de Bernoulli après l'hélice :

$$\left[\frac{V_2^2}{2} + g z_{A2} + \frac{P_2}{\rho_{\text{air}}} = \frac{V_1^2}{2} + g z_{A1} + \frac{P_1}{\rho_{\text{air}}} \right] \quad \text{Par conservation du débit volumique } V_1 S_1 = V_2 S_2$$

$$\rightarrow V_1 = \frac{V_2 S_2}{S_1}$$

$$\rightarrow P_1 = \left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_{\text{air}}} - \frac{V_2^2 S_2^2}{2 S_1^2} \right) \rho_{\text{air}}$$

On a donc F_{pression} le résultat des forces de pression de l'air sur l'hélice = système

$$F_{\text{pression}} = (P_1 + P_2) S = \left[\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_{\text{air}}} - \frac{V_2^2 S_2^2}{2 S_1^2} \right) + \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_{\text{air}}} - \frac{V_1^2 S_1^2}{2 S_1^2} \right) \right] S \cdot \rho_{\text{air}} \cdot \vec{u}_x$$

relation vectorielle $\vec{F}_{\text{pression}} = \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} \right) S \rho_{\text{air}} \vec{u}_x$

Par continuité de la vitesse, on prend $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}$

$$P_{\text{hélice}} = \left[\left(\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_{\text{air}}} - \frac{V_2^2 S_2^2}{2 S_1^2} \right) + \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_{\text{air}}} - \frac{V_1^2 S_1^2}{2 S_1^2} \right) \right] S \cdot \rho_{\text{air}} \cdot V$$

$$\text{avec } V = \frac{V_2 S_2}{S_1} = \frac{V_1 S_1}{S_1}$$

$$P_{\text{hélice}} = \vec{F}_{\text{pression}} \cdot \vec{V} = \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} \right) S \rho_{\text{air}} V$$

$$\text{avec } V_2 = \frac{V_1 S_1}{S_2} = \frac{D}{2 \mu^3 S_1^2}$$

$$V = \frac{V_1 S_1}{S_1}$$

$$P_{\text{hélice}} = \frac{V_1^3}{2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right] \left(\frac{S_1}{S_1} \right) S$$

$$\text{et } D = \mu V_1 S_1$$

$$P_{\text{hélice}} = \frac{S_1 V_1^3}{2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]$$

$$P_{\text{hélice}} = \frac{D}{2 \mu^3 S_1^2} \left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]$$

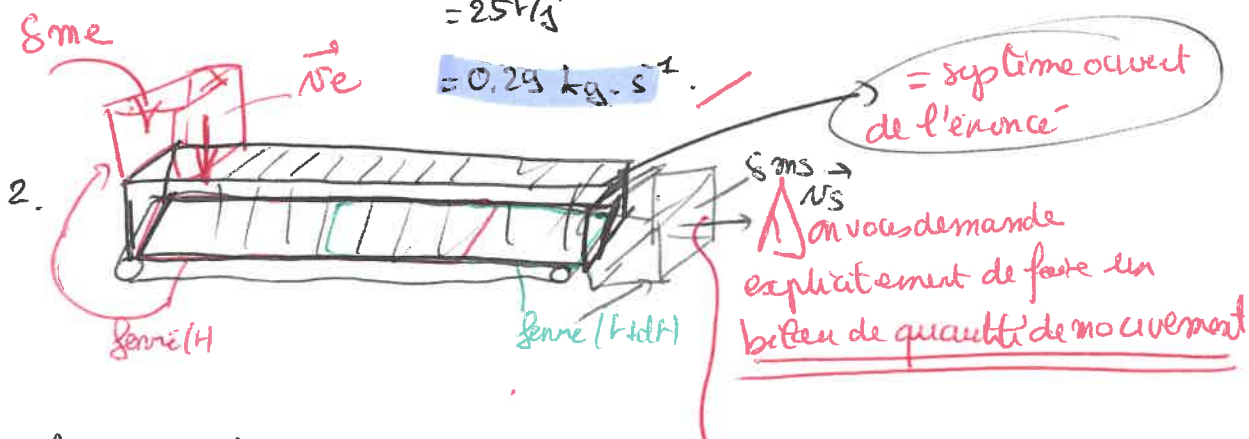
Exercice 3 TD ²⁵~~27~~



Soit un tube de champ, comme il n'y a pas de frottement latéral, on a $D_{me} = D_{ms}$

Comme à sortie on a $\dot{m}_s = 25 \text{ t/s}$,

à l'entrée: $D_{me} = \dot{m}_g$
 $= 25 \text{ t/s}$



On réalise une étude énergétique:

hors sujet

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P$$

$$(\Rightarrow) \Delta m (e_s - e_e) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$(\Rightarrow) \Delta m \left(\frac{1}{2} v_s^2 - \frac{1}{2} v_e^2 \right) = F v$$

$$(\Rightarrow) \Delta m \frac{1}{2} v_s = F v$$

$$F = \frac{\Delta m v}{2}$$

$$\vec{P}_{ferme}(t+dt) - \vec{P}_{ferme}(t) = (\vec{P}_{ouvert}(t+dt) + \vec{S}_P) - (\vec{P}_{ouvert}(t) + d\vec{P}_e)$$

approximation nulle.

$$= \dot{m}_s \vec{v}_s - \dot{m}_e \vec{v}_e \quad \text{L} \dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}$$

$$= Dm (\vec{v}_s - \vec{v}_e) dt$$

$$= \frac{d\vec{P}_{ferme}}{dt} \cdot dt$$

Pfd aux rochers

$$\frac{d\vec{P}_{ferme}}{dt} = \vec{F}_{exercer/rochers}$$

$$= m_{ferme} \vec{g} + \vec{F}_{tapis/rochers}$$

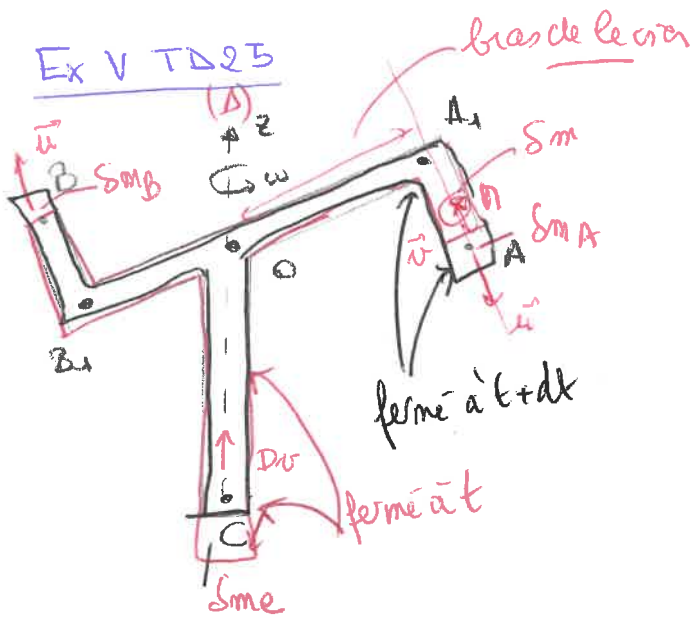
$$= m_{ferme} \vec{g} - \vec{F}_{rochers/tapis}$$

en projection sur x : $Dm v_s = - F_{rochers/tapis} = -F$

$$F = - Dm v_s$$

Ex V TD25

Groupe 8



$$L_{\Delta} = L_{\vec{z}} = \left(\sum m \vec{r} \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{u}_z$$

$$= \pm (\text{bras de levier}) \sum m v$$

$$L_{\Delta} = OA_1 \sum m v$$

Q1) Les parties du système qui ont une contribution au moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz sont A₁A et B₁.
car les autres parties vont avoir un moment qui coupe l'axe.
CO ; OA₁ et OB₁

Q2) A l'instant t, le système fermé sera le tournevis ainsi que l'eau qui y entre dans la période dt.
A l'instant t+dt, le système fermé sera le tournevis ainsi que l'eau qui y sort durant la période dt.
Le système ouvert correspond alors au tournevis, donc l'intervalle entre le système à l'instant t et à t+dt.

$$Q3) L_{z \text{ fermé}}(t+dt) - L_{z \text{ fermé}}(t) = \frac{dL_z}{dt} \cdot dt$$

$$= \underbrace{\sum \omega(t+dt)}_{\sum L_{z, \text{ ouvert}}(t+dt)} + \underbrace{\delta L_{z, \text{ sortie}}}_{\text{moment cinétique de l'eau sortant}} - \left(\underbrace{\sum \omega(t)}_{\sum L_{z, \text{ ouvert}}(t)} + \underbrace{\delta L_{z, \text{ entrée}}}_{\text{moment cinétique de l'eau entrant}} \right)$$

$$\text{Or, } \delta L_{z, \text{ sortie}} = \delta L_{z, A_1 A} + \delta L_{z, B_1}$$

$$\bullet \delta L_{z, \text{ entrée}} = (\vec{OC} \wedge \sum m \vec{v}_{\text{entrée eau}}) \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \checkmark$$

$$\bullet \delta L_{z, A_1 A} = (\vec{OA_1} \wedge \sum m_A \vec{v}_A) \cdot \vec{u}_z$$

$$\bullet \delta L_{z, B_1} = (\vec{OB_1} \wedge \sum m_B \vec{v}_B) \cdot \vec{u}_z$$

Or, $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ correspondent à la somme de la vitesse du tournevis et de la vitesse relative, d'où $\vec{v}_A = \vec{v}_B = (R\omega - u)\vec{u}_\theta$.

De plus, $\vec{OA}$

$\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont opposés $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$ base mobile
 $\vec{v}_A = -\vec{v}_B$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta L_{OA} &= (\vec{OA}, \delta m \vec{v}_A) \cdot \vec{u}_g = (R \vec{u}_R \wedge \delta m_A (R\omega - u) \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_g \\ &= \delta m_A R (R\omega - u) = \frac{\mu \delta V}{\delta m_A} R (R\omega - u) = \mu \delta V dt R (R\omega - u)\end{aligned}$$

D'ail par analogie, $\delta L_{OB} = \mu \delta V dt R (R\omega - u)$

Abs, $\frac{dL_z}{dt} dt = J \frac{d\omega}{dt} dt + 2\mu \delta V_B R (R\omega - u) dt$

Ainsi, $\frac{dL_z}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} + 2\mu \delta V R (R\omega - u)$

et écoulement incompressible

$$Dv = Dv_A + Dv_B$$

$$\text{avec } Dv_A = Dv_B$$

$$Dv_A = \frac{Dv}{2} = Dv_B$$

Q4) Bilan des actions extérieures :

- poids : $m\vec{g}$ $dL(m\vec{g}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$ où G est le centre de masse
- réaction du sol de moment nulle
- force de pression de moment nulle car se compensent être donc qu'elles s'appliquent partout

Q5) Théorème du moment cinétique :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum dL_{ext} = 0$$

D'ail, $J \frac{d\omega}{dt} + 2\mu \delta V R (R\omega - u) = 0$

Abs, $J \frac{d\omega}{dt} + 2\mu \delta V R^2 \omega = 2\mu \delta V R u$

la solution particulière, on se place au régime transitoire :

• $\omega_p = \frac{2\mu \delta V R u}{2\mu \delta V R^2} = \frac{u}{R}$

la solution de l'équation homogène est :

$$u(t) = A \exp(-t/\tau) \quad \text{où } \tau = \frac{J}{2\mu \delta V R^2}$$

D'ail $\omega(t) = A \exp(-t/\tau) + \frac{u}{R}$

or à $t=0$, $\omega(0) = 0 = \frac{u}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{u}{R}$

D'ail, $\omega(t) = \frac{u}{R} (1 - \exp(-t/\tau))$