

APPLICATIONS DIRECTES

1. Corde de guitare

1. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
2. En déduire la relation entre la fréquence fondamentale du son émis par la corde et la tension de celle-ci. Comment varie la tonalité lorsqu'on tend la corde ?
3. Quelle tension doit-on appliquer à une corde de guitare pour qu'elle sonne un La₃ à 440 Hz, sachant que la longueur du manche est de 617 mm, le diamètre de la corde est 0,86 mm. La corde est en Nickel : $\rho = 7.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

2. Equation de propagation d'une onde sur une corde

Etablir l'équation de propagation $y(x,t)$ d'une onde sur une corde. Quelle est la nature de cette onde (transverse ou longitudinale) ? Quelle est sa direction de propagation ? Sa célérité c ?

Donner la forme d'une solution progressive harmonique. Définir $\vec{k}$, le vecteur d'onde. Rechercher la relation de dispersion.

On suppose que cette corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités et on cherche les solutions sous forme d'OPH. Montrer que les solutions sont forcément stationnaires. Définir un nœud de vibration, un ventre de vibration. Tracer l'allure de la corde à 3 instants différents lorsqu'on observe 5 nœuds de vibration. Exprimer alors la fréquence de l'onde émise en fonction de L ?

3. Etude des modes propres d'une corde

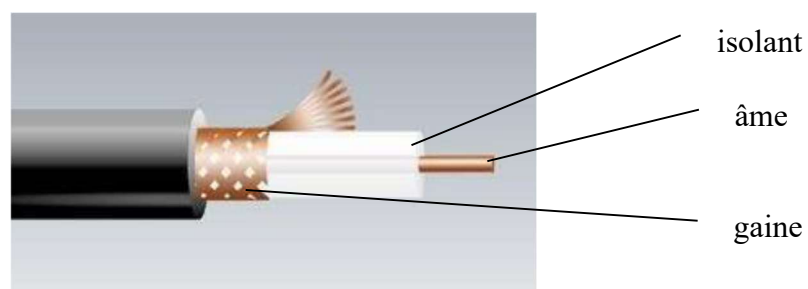
Lors d'une manipulation avec la corde de Melde on trouve les résultats suivants :

1. Pour une même longueur L de la corde et une même masse M accrochée à celle-ci on trouve une fréquence de résonance à 19 Hz pour deux fuseaux, à 28 Hz pour trois fuseaux.
 - a. Représenter l'allure de la corde pour les deux situations envisagées.
 - b. Quelle relation a-t-on entre deux nœuds consécutifs ?
 - c. Les valeurs numériques des fréquences mesurées sont-elles compatibles entre-elles ?
 - d. Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?
2. La longueur de la corde est $L = 117 \text{ cm}$. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?
3. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
4. $M = 25 \text{ g}$. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

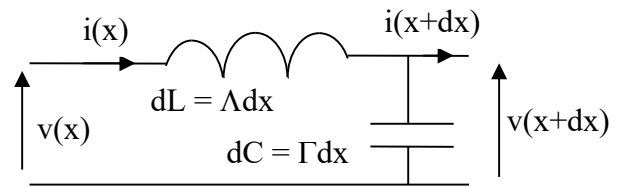
4. Propagation dans une ligne coaxiale

Le câble est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparés par un isolant.

Le conducteur central, cylindre de rayon a , constitue « l'âme » du câble, le conducteur extérieur, de rayon b , constitue la « gaine ».



Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire peut-être modélisée par le schéma ci-contre, comportant une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$ et une capacité élémentaire $dC = \Gamma dx$. On traite ce circuit de faible dimension dans le cadre de l'ARQS.



1. Appliquer la loi des nœuds pour déterminer une relation entre $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ (relation 1).

2. Appliquer la loi des mailles pour déterminer une relation entre $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ (relation 2).

Les relations (1) et (2) sont des relations différentielle couplées entre $i(x,t)$ et $v(x,t)$. On va les découpler, pour obtenir deux équations de d'Alembert avec $i(x,t)$ solution de l'une et $v(x,t)$ solution de l'autre.

3. Donner l'expression des deux équations de d'Alembert recherchées. Quelle est l'ordre des dérivées dans l'équation de D'Alembert ? Comment peut-on obtenir un tel ordre à partir des relations (1) et (2) ?

On admet le critère de Schwartz, qui permet d'intervertir l'ordre des dérivations lorsque les variables sont indépendantes : $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$

4. Etablir les deux équations de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante. Que peut-on en conclure ?

5. Donner l'expression d'une OPH de courant se propageant selon $\vec{u}_x$. Même question pour une OPH de tension. Montrer à partir de la relation (1) que le rapport $v(x,t) / i(x,t)$ est une constante liée aux caractéristiques de la ligne.

6. Mêmes questions pour des OPH se propageant selon $-\vec{u}_x$.

On ferme en $x = 0$ une ligne semi-infinie s'étendant de $x = -\infty$ à $x = 0$ sur une résistance R .

7. Quelle relation cette résistance impose-t-elle en $x = 0$? En déduire une condition sur R telle qu'une OPH puisse se propager dans le sens $+\vec{u}_x$ sur cette ligne semi-infinie. Cette valeur particulière de R est appelée **impédance caractéristique de ligne**. Elle vaut en général 50Ω . (cf TP)

8. Application numérique : La célérité de l'onde dans le câble est de l'ordre de $2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$, déterminer les valeurs de Λ et Γ qui modélisent ce câble.

On ferme maintenant la ligne semi-infinie en $x = 0$ par un court-circuit.

9. Que peut-on en déduire pour $v(x=0, t)$?

10. Une onde progressive harmonique incidente $v_i(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$. Quelle est alors la forme des solutions pour $v(x,t)$? En déduire l'expression de la tension $v(x,t)$. Représentation graphique.

11. A partir de la relation (1) en déduire l'expression du courant $i(x,t)$ en tout point de la ligne. Représentation graphique. Conclusion.

On laisse maintenant la ligne semi-infinie en $x = 0$ en circuit ouvert.

12. Quelle est la valeur du courant $i(x=0,t)$? Donner, par analogie avec les résultats précédents la forme de $i(x,t)$ puis celle de $v(x,t)$ si une OPH est émise par le générateur. Représentations graphiques.

EXERCICES :

I. Traction ferroviaire

Les motrices électriques circulent sur des voies parfaitement définies par les rails. L'approvisionnement en énergie électrique peut être satisfait, à la demande, au moyen d'un dispositif du type caténaire-pantographe. Les pantographes, doublés d'archets en carbone, assurent la jonction électrique entre la motrice et la caténaire (**figure 2**).

La caténaire est constituée d'un câble de cuivre pur, tendu et soutenu par un câble porteur (**figure 3**).

Ce dispositif fonctionne correctement si le contact électrique caténaire-pantographe n'est pas rompu par les ondes mécaniques (**figure 4**) que le pantographe génère sur la caténaire.

Caractéristiques d'une caténaire

Masse volumique du cuivre : $9\,000 \text{ kg.m}^{-3}$;

Section de la caténaire : 150 mm^2 .

Hauteur d'une caténaire : $5,1 \text{ m}$;

Longueur d'un tronçon de caténaire : $L = 1\,500 \text{ m}$.

Intervalle de températures de fonctionnement ordinaire d'une caténaire - 5 °C, 45 °C,
 Coefficient de dilatation thermique linéique du cuivre (aussi appelé coefficient d'allongement relatif,

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T} = 16.10^{-6} K^{-1}$$

Lié à une variation de température) :

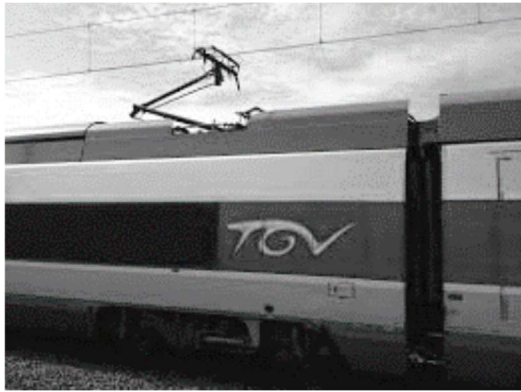


Figure 2 — Dispositif caténaire-pantographe

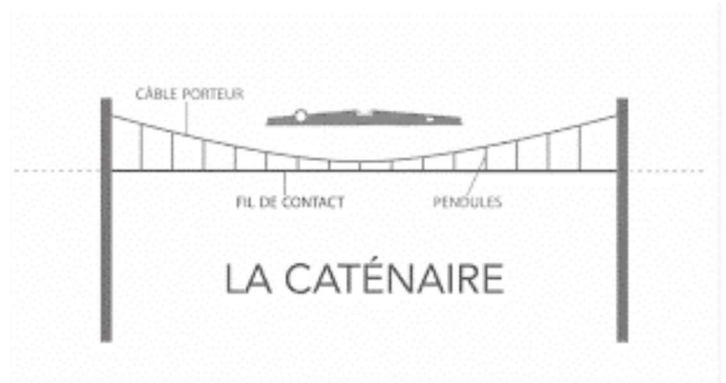


Figure 3 — Câble porteur et caténaire

Figure 4 — Ondes mécaniques sur la caténaire

1. Quelle doit être la tension mécanique minimale de la caténaire pour assurer un bon captage du courant à la vitesse de 500 km/h.

On s'attachera à décrire dans un premier temps, par une argumentation phrasée de moins de 50 mots, le phénomène physique mis en jeu. Les mots clés seront soulignés. Une réponse quantitative est attendue dans un second temps. Elle s'appuiera sur les résultats obtenus en cours dont les démonstrations ne sont pas demandées ici.

2. Pourquoi les TGV sont-ils contraints de réduire leur vitesse lors de fortes canicules ? Une réponse qualitative de moins de 30 mots est attendue, Les mots clés seront soulignés.



II. Etude d'une cavité résonante

On va décrire la vibration d'une corde de masse linéique uniforme μ , sans raideur, de longueur L et fixée à ses deux extrémités en utilisant les hypothèses de travail ci-dessous :

- On néglige toute source de frottement.
- On néglige le poids de chaque élément de longueur de la corde par rapport aux forces de tension.
- On néglige le déplacement horizontal de chaque élément de longueur de la corde par rapport au déplacement vertical $y(x,t)$.

1. Démontrer que pour de faibles elongations $y(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

On exprimera v en fonction de μ et T_0 la tension du fil. Déterminer et vérifier par analyse dimensionnelle les unités de v . Que représente cette grandeur ?

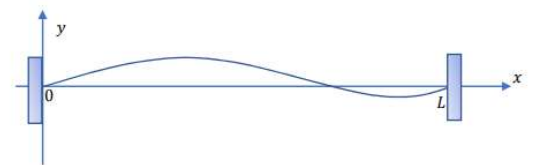
On souhaite étudier la propagation d'ondes de la forme : $y(x,t) = Y_0(x) \cdot \sin(\omega t)$ où ω est la pulsation de l'onde et $Y_0(x)$ est une fonction que l'on souhaite étudier.

2. Comment qualifie-t-on la solution $y(x,t)$ décrivant une onde pour laquelle les dépendances spatiale x et temporelle t interviennent séparément ?

3. Montrer que $Y_0(x)$ doit vérifier l'équation $\frac{d^2 Y_0(x)}{dx^2} + k^2 Y_0(x) = 0$ où $k = \frac{\omega}{v} > 0$.

4. Montrer alors que les ondes recherchées pouvant s'établir sur la corde imposent une quantification des valeurs de k et que la longueur d'onde λ_p associée au mode de vibration de rang p vérifie $\lambda_p = \frac{2L}{p}$ où p est un entier naturel non nul.

Des résultats précédents, on peut affirmer que la vibration d'une corde peut être décrite par une combinaison linéaire des modes propres de vibration définis tels que : $y_p(x,t) = Y_{0,p} \cdot \sin\left(p\pi \frac{x}{L}\right) \cdot \sin\left(p\pi \frac{vt}{L} + \varphi_p\right)$; où $Y_{0,p}$ et φ_p sont des constantes.



5. Dessiner l'allure de la corde vibrante à un instant donné lorsqu'elle vibre suivant son mode propre de vibration de rang 3.

On pose sur une guitare un haut-parleur relié à un GBF délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f réglable. On remarque que pour une fréquence $f = 100 \text{ Hz}$, la corde la plus grave se met à vibrer sur son mode fondamental. La longueur L de la corde est de $0,7 \text{ m}$ et sa masse linéique est de 50 g.m^{-1} .

6. En s'appuyant sur un calcul de force de tension, justifier qu'une guitare est soumise à des contraintes mécaniques nécessitant la mise en place de renforts dans le manche et dans la caisse de résonance.



III. Ondes dans un bassin

On étudie la propagation d'ondes de faible amplitude dans un bassin de largeur ℓ selon $\vec{u}_y$, infini selon $\vec{u}_x$ dont le fond est contenu dans le plan $z = 0$; au repos la surface libre de l'eau est horizontale, à la cote $z_0 = h$. En présence d'une onde, la cote de la surface libre en un point d'abscisse x est de la forme $z = h + \xi(x, t)$ où $|\xi| \ll h$ et on note P_0 la pression atmosphérique supposée uniforme. L'écoulement est supposé unidimensionnel avec un champ de vitesse $\vec{v}(x, t) \approx v(x, t) \vec{u}_x$ (modèle de Saint-Venant). Les grandeurs $v(x, t)$ et $\xi(x, t)$ sont supposés a priori infiniment petit de même ordre et on se limite à tous les calculs à l'ordre 1. En outre l'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène de masse volumique μ , dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

1. En effectuant un bilan de masse pour le système ouvert et fixe constitué du volume compris entre les abscisses x et $x + dx$ établir la relation : $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h \frac{\partial v}{\partial x}$.

2. Etablir l'expression de $p(x, t)$ en fonction de $\xi(x, t)$, z , h , μ , g et P_0 . En déduire la relation : $\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$.

3. En déduire l'équation de propagation dont est solution $v(x, t)$ et la célérité c des ondes correspondantes.

4. Quelles sont les conditions aux limites imposées à $v(x, t)$ par les bords rigides du bassin en $x = 0$ et en $x = L$? Justifier l'existence de modes propres et en déduire la forme des solutions de l'équation d'onde.

5. Déterminer la fréquence propre du mode fondamental d'une baignoire de longueur $L = 1 \text{ m}$ pour une hauteur d'eau $h = 0,5 \text{ m}$.

IV. Questions de qualité

1. Qu'appelle-t-on un mode propre? Comment trouve-t-on les fréquences propres?

Les questions suivantes n'appellent pratiquement pas de calcul formel. Elles sont indépendantes les unes des autres. On donne la vitesse du son dans certains fluides, dans les conditions usuelles de température et de pression : $c_{\text{air}} = 340 \text{ m.s}^{-1}$; $c_{\text{hélium}} = 1420 \text{ m.s}^{-1}$; $c_{\text{eau}} = 1540 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour un gaz parfait, la célérité du son est donnée par la relation $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ où $\gamma = C_p / C_v$ et M masse molaire du gaz.

2. Si une personne inhale de l'hélium, sa voix paraît plus aigüe (effet Donald Duck), pourquoi?
3. Si on frappe une tasse contenant de l'eau, la fréquence du son émis est plus élevée que si l'on effectue la même expérience après avoir mis un comprimé effervescent. Pourquoi?
4. Au fur et à mesure qu'un orchestre joue, la hauteur des instruments à vent s'élève alors que celle des instruments à corde s'abaisse; pourquoi?