Thème : ondes sonores

APPLICATIONS DIRECTES

1. Célérité des ondes sonores

On étudie des ondes sonores planes dans l'air de masse volumique au repos ρ_o

Dans un plan (P) d'abscisse x, la pression totale P_T peut se mettre sous la forme $P_T = P_S + p(x,t)$. P_S est la pression statique et p(x,t) est la surpression acoustique, solution de l'équation : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\gamma \dfrac{P_S}{\rho_0}}$ et $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$.

1) Quelles sont les hypothèses du modèle qui permet d'obtenir cette équation.

2) a) Que représente la grandeur c ?

b) Pourquoi le coefficient γ intervient-il ?

c) Déterminer l'expression de c en fonction de la température absolue T pour un gaz parfait de masse molaire M.

3) Pour l'air assimilé à un gaz parfait, M = 29 $g.mol^{-1}$,

a) Comment obtient-on la valeur numérique de M ?

b) Calculer numériquement c à θ = 18° C. Comparer cette vitesse à celle du son dans un solide ou un liquide. On prendra pour R, constante des gaz parfaits, $R = 8{,}32\ J\,mol^{-1}.K^{-1}$ et pour γ, égal à c_p / c_v , $\gamma = 7/5$.

2. Equation de propagation d'une onde sonore, impédance d'un milieu

L'onde acoustique correspond à une vibration des molécules d'air autour de leurs positions moyennes. On appelle u(x,t) la vitesse correspondante. Les grandeurs p(x,t) et u(x,t) sont liées par la relation : $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}$.(1)

1) Quelle est l'origine de cette équation ?

2) Pour une OPH se propageant dans le sens x croissant, donner l'expressions complexes de $\underline{p}$(x,t) selon que l'onde se propage dans le sens x croissant ou x décroissant.

3) A l'aide de la relation linéaire (1) déterminer $\underline{u}$(x,t) selon que l'onde se propage dans le sens x croissant ou x décroissant. (Rappel : les valeurs moyennes de p(x,t) et u(x,t) sont nulles)

4) Pour une OPH, on définit l'impédance acoustique $\underline{Z} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{u}}$. Exprimer $\underline{Z}$ selon que l'onde se propage dans le sens x croissant ou x décroissant en fonction de ρ_o et c. Que signifie, quant au déphasage de p(x,t) par rapport à u(x,t), le fait que Z soit réel ?

3. Solutions de l'équation d'onde

La solution complète de l'équation de propagation du son dans l'air peut écrire p(x,t), surpression sonore, sous la forme (en notation complexe) : $\underline{p}(x,t) = \underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)} + \underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)} avec\ k = \dfrac{\omega}{c}$.

1) Quelle est la signification de chacun des termes $\underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)}$ et $\underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)}$?

2) Soit u(x,t) le champ des vitesses de l'air. Déterminer l'expression de $\underline{u}_1$(x,t), en fonction de $\underline{Z}$, impédance acoustique du milieu, et $\underline{p}_1 e^{j(\omega t + kx)}$ puis celle de $\underline{u}_2$(x,t) en fonction de $\underline{Z}$ et et $\underline{p}_2 e^{j(\omega t - kx)}$?

En déduire $\underline{u}$(x,t).

3) On considère que l'onde précédente est émise de -∞ et arrive en x = 0, où se trouve un obstacle indéformable.

a) Que vaut u(x=0,t) ? En réduire une relation entre $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$, puis entre $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_2$ et exprimer $\underline{u}$(x,t) en fonction de $\underline{p}_1$, ω et k.

b) Justifier l'apparition d'un système d'ondes stationnaires.

c) On pose $\underline{p}_1 = p_o$ grandeur réelle. Déterminer l'expression réelle de u(x,t).

d) En déduire la position des nœuds de vitesse.

e) En déduire l'expression de p(x,t). Déterminer la position des nœuds de pression. Quelle relation lie les nœuds de pression et les nœuds de vitesse ?

4. Puissance sonore

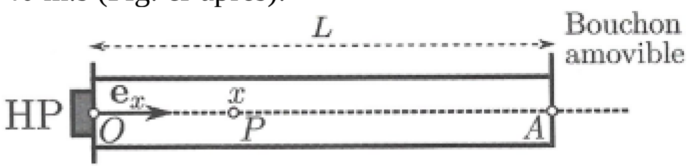
Sur le chemin d'une onde sonore plane sinusoïdale et progressive, se propageant dans l'air, se trouve un disque de contrôle de rayon a = 50 cm dont le plan est perpendiculaire à la direction de propagation. La longueur d'onde sonore est λ = 5,0 cm ; la fréquence f = 6,8 kHz. L'amplitude de la surpression est p_o = 3,5 Pa.

1. Déterminer la vitesse de propagation de cette onde. Commentaire ?
2. Donner l'expression de p(x,t).
3. Quelle relation lie p(x,t) et v(x,t), vitesse de la particule fluide ? En déduire l'expression de v(x,t).
4. Donner l'expression de $\mathcal{P}$ (x,t) puissance sonore qui traverse le disque. En déduire la valeur moyenne de la puissance sonore traversant la surface du disque. AN.
5. Evaluer l'intensité sonore en dB de cette onde. Commenter cette valeur.

EXERCICES

I. Ondes dans un tuyau

L'air contenu dans un tuyau cylindrique, de longueur L = OA = 2m, est excité par un haut-parleur (HP) émettant des ondes acoustiques sinusoïdales de fréquence f. On appelle $v_{HP}(t) = V.\cos(\omega t)$ la vitesse de la membrane du haut-parleur. Un bouchon situé en A ferme l'extrémité droite du tuyau. On note p(x, t) la surpression sonore de l'onde acoustique dans le tuyau, x étant l'abscisse d'un point P situé à l'intérieur du tube sur l'axe (O, $\vec{e}_x$) et t, le temps. La vitesse du son dans le tuyau vaut Cs = 340 m.s (Fig. ci-après).



1. Que vaut le champ des vitesses v(x,t) de l'onde en A ? En x = 0 ? Montrer que le champ des vitesses s'écrit v(x,t) = $\frac{V}{\sin\left(\frac{2\pi f}{Cs}L\right)}.\cos(2\pi f t).\sin\left(\frac{2\pi f}{Cs}(x-L)\right)$.
2. Calculer numériquement la fréquence de la première résonance.
3. Exprimer en fonction d'un entier n positif les longueurs d'onde de toutes les résonances possibles dans le tuyau.

On se place désormais dans le cas d'un régime libre où un son est émis dans un tuyau bouché à ses deux extrémités.

4. Quelles sont les conditions aux limites en x = 0 et en A pour le champ des vitesses ? Montrer que les fréquences propres correspondent aux fréquences de résonance précédentes. Ecrire l'expression de $v_n(x,t)$ pour le mode propre n, puis l'expression de v(x,t) dans le tuyau.
5. A partir de l'expression de $v_n(x,t)$ déterminer l'expression du mode propre n de la surpression sonore $p_n(x,t)$.
6. Tracer en concordance d'abscisse $v_3(x)$ et $p_3(x)$ à un instant t donné. Que remarque-t-on ?

On retire désormais le bouchon en A et on considère toujours un régime libre.

7. Déterminer la nouvelle condition à la limite en A.
8. Sans calculs, représenter graphiquement, en concordance d'abscisse à un instant t donné, le fondamental de v(x,t).
9. Déterminer numériquement la fréquence du fondamental.
10. Exprimer en fonction d'un entier m positif les longueurs d'onde de tous les modes propres possibles dans le tuyau.
11. Quelle serait alors les fréquences de résonance si on remettait le haut parleur ?

II. Validité de l'hypothèse adiabatique réversible

1. Déterminer la célérité du son dans l'air, en supposant que l'air subit une transformation adiabatique réversible au passage de l'onde sonore.

2. On suppose maintenant que le son se propage de manière isotherme. Quelle est dans cette hypothèse, la vitesse du son dans l'air ?

3. Quel est le modèle le plus approprié sachant qu'à 20°C la vitesse du son mesurée dans l'air est de 343 m / s ?

III. Temps de réverbération d'une salle

Dans une salle de concert, l'acoustique est modifiée par la présence des parois qui atténuent le signal sonore. En raison des multiples réflexions, on supposera que l'intensité acoustique I (ou densité surfacique de puissance sonore) est donnée en fonction de l'énergie acoustique volumique e par la relation $I = ce/4$.
On se propose d'étudier l'évolution temporelle I(t).

1. Déterminer la dimension de c.
2. Exprimer l'énergie acoustique E contenue dans une salle de volume V.

L'absorption de l'air est négligée, mais pas celle au niveau des parois (mur, sols plafonds) ; on note S leur surface totale et α le coefficient d'absorption moyen, c'est à dire la fraction de la puissance incidente dissipée au niveau des parois.

3. Exprimer la puissance P absorbée par les parois en fonction de I.

4. Quelle relation a-t-on entre P et E ? En déduire la loi de l'évolution de l'intensité acoustique I(t) à l'intérieur de l'édifice.

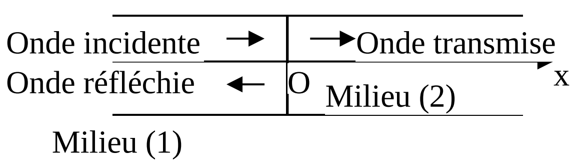
5. Exprimer i(t) l'intensité en décibels. En déduire le temps T au bout duquel le signal est atténué de 60dB.

6. Vérifier la formule semi-numérique de Sabine : $T = 0,16\ V / \alpha S$.

7. Calculer T pour une cathédrale, supposée cubique d'arête a=30 m et de coefficient d'absorption α=0,1. Comparer avec un studio d'enregistrement a=3 m, α=0,05. Conclure.

IV. Transmission par une paroi

Un tuyau cylindrique très long d'axe (Ox) et de section constante S contient de l'air dans des conditions de températures et de pression telles que $c = 340\ m.s^{-1}$ et $\rho_o = 1,29\ kg.m^{-3}$.
En x = 0 est placé un plateau très mince (une membrane, une vitre en verre, une paroi en béton…) de masse surfacique uniforme σ, susceptible de vibrer sous l'effet des ondes acoustiques qui peuvent s'établir dans le tuyau.
Une OPPM de pulsation ω se propage dans la région (1) dans le sens positif vers le plateau.



Sous l'effet des ondes incidentes, transmises et réfléchies, le plateau acquiert un mouvement sinusoïdal forcé de translation dont la vitesse s'exprime par $v_{plateau}(0,t)=a_o\cos\omega t$

1. Donner les expressions complexes des ondes de pression et de vitesse incidente, transmise et réfléchie. On utilisera les amplitudes complexes p_{oi}, v_{oi}, $\underline{p}_{ot}$, $\underline{v}_{ot}$, $\underline{p}_{or}$, $\underline{v}_{or}$.
2. Exprimer p_{oi}, $\underline{p}_{ot}$, $\underline{p}_{or}$ en fonction de v_{oi}, $\underline{v}_{ot}$, $\underline{v}_{or}$ respectivement et ρ_o et c.
3. Quelles relations a-t-on entre la vitesse de l'onde dans le milieu (1), la vitesse de l'onde dans le milieu (2) et la vitesse du plateau ? En déduire une relation entre $\underline{v}_{ot}$ et a_o et une autre relation entre $\underline{v}_{oi}$, $\underline{v}_{or}$ et a_o.
4. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au plateau, pour déterminer une relation entre p_{oi}, $\underline{p}_{or}$, $\underline{p}_{ot}$ et $\underline{v}_{ot}$.
5. Définir le coefficient de transmission en vitesse, puis l'exprimer en fonction de la pulsation, σ, ρ_o et c.

La membrane joue le rôle de filtre de fréquences.

6. Quelle est la nature de ce filtre et quelle est sa pulsation de coupure ω_o à – 3dB ? Etudier les particularités des différentes ondes présentes lorsque ω est à l'intérieur de la bande passante, et au contraire lorsque ω est très éloigné de la bande passante.
7. Exprimer la longueur d'onde de coupure λ_o en fonction de ρ_o, de l'épaisseur d et de la masse volumique du plateau ρ_d du plateau.
8. Le plateau est en béton, (ρ_d=2300 kg.m^{-3}). Calculer l'épaisseur d pour obtenir un affaiblissement de 50 dB à 300 Hz. En déduire les valeurs de la fréquence de coupure f_o et de λ_o.
9. Quels sont en décibels les affaiblissements à 100 Hz et à 500 Hz ? Conclure sur l'atténuation du son entre deux logements voisins, pour un son grave et aigu.
10. Préciser dans quelle mesure on peut utiliser ici le modèle de la masse surfacique pour le plateau.