Thème : Ondes électromagnétiques, dispersion, absorption

## APPLICATIONS DIRECTES

### 1. Ecriture d'une OPPM

On considère une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide dans la direction Ox et le sens d'un axe Oz. Ecrire l'expression du champ électromagnétique ($\vec{E},\vec{B}$) lorsqu'elle est polarisée rectilignement suivantes x. Représenter cette onde à l'instant t = 0.

### 2.Amplitude du champ de laser

L'onde émise par un laser He-Ne, de longueur d'onde 633 nm, du laboratoire est assimilée localement à une OPPH polarisée rectilignement. On admet que le laser émet une puissance moyenne P, uniformément répartie dans un faisceau de section S.

Calculer l'amplitude $E_o$ du champ $\vec{E}$**,** l'amplitude $B_o$ du champ magnétique, la valeur <u> de la densité moyenne d'énergie dans le faisceau, ainsi que le nombre de photon émis par unité de temps.
AN : P = 3 mW et S = 1 mm$^2$.

### 3. Réflexion normale d'une OPPH

Une OPPH incidente est caractérisée par les composantes du champ $\vec{E}_i$ :
$\vec{E}_i = E_{oy}\, exp\, j\left(\omega t - kx + \phi_y\right)\overrightarrow{u_y}$. Cette onde se propage dans le demi-espace x < 0 et rencontre un plan conducteur parfait confondu avec le plan x = 0, où on suppose le champ électrique nul.

1. Déterminer le champ réfléchi $\vec{E}_r$ et le champ résultant $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, dans le demi espace x<0.
2. Déterminer l'expression du champ $\vec{B}$ total dans le demi-espace x<0.
3. Représenter graphiquement E et B. Déterminer la distance qui sépare les nœuds de E des nœuds de B.

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique à l'interface d'équation z = 0, de deux milieux : $\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\overrightarrow{u_z}$ ; $\vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_o\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{u_z}$

4. Quelle est dans cet exercice l'équation de l'interface ? Déterminer, à la surface du métal, la valeur de la densité surfacique de charge et celle de la densité surfacique de courant.

### 4. Propagation dans un milieu dispersif et absorbant

On considère qu'une onde monochromatique se propage dans un milieu dispersif et absorbant selon l'axe Ox. Soit $v_\varphi$ sa vitesse de phase et $\delta$ sa distance caractéristique d'amortissement. Donner l'expression de la vibration s(x,t). En déduire l'expression du vecteur d'onde complexe.

### 5. Condition de propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma

La couche atmosphérique comprise entre 60 km et 800 km d'altitude, exposée au rayonnement solaire, s'ionise et constitue un plasma. La relation de dispersion de la propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère s'écrit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_p{}^2}{c^2}$, où $\omega_p$ est appelé la pulsation plasma. . $\omega_p = 2\pi f_p$ avec $f_p$ de l'ordre de 10 MHz.

a) Déterminer la condition sur ω pour qu'une onde électromagnétique plane puisse se propager dans le plasma.
b) En déduire alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de cette onde.
c) Représenter graphiquement ces deux vitesses en fonction de ω.
d) Comment s'exprime le champ électrique lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée ? Quel nom lui donne-t-on alors ?
e) Parmi les deux fréquences suivantes $f_1$ = 162 kHz et $f_3$ = 1 227 MHz, déterminer celle qui correspond à une fréquence radio en modulation d'amplitude et celle utilisée pour les communications par satellites.

**EXERCICES :**

### I. Réception d'ondes électromagnétiques par un cadre fermé

Un émetteur de puissance moyenne Pm = 3 kW émet des ondes électromagnétiques monochromatiques de fréquence f = 1 MHz de manière isotrope dans tout l'espace.
A une distance r = 50 km de l'émetteur (à cette distance on admettra que l'onde a localement la structure d'une onde plane progressive à polarisation rectiligne), on place un cadre de réception plan carré de côté a = 20 cm sur lequel on a enroulé N = 100 spires de fil conducteur.

Soit u(t) la fém qui apparaît aux bornes A et B du cadre en circuit ouvert. Ces deux bornes sont très proches l'une de l'autre (quelques millimètres). On cherche à obtenir une valeur efficace $U_{eff}$ de la fem u(t) la plus grande possible : déterminer l'orientation du cadre ainsi que la valeur correspondante de $U_{eff}$ en fonction de f, N, a, r, Pm, $\mu_o$ et c, célérité de l'onde dans le vide. AN ;

### II. Dans le ventre du four à micro-ondes !

Depuis son invention, le four à micro-ondes a immédiatement envahi les cuisines des particuliers. On s'intéresse ici à un modèle simplifié de son fonctionnement et de la protection de sa paroi.

**Document - Découverte du principe du four à micro-ondes**
L'ingénieur Percy Spencer eut une drôle de surprise alors qu'il travaillait à la mise au point d'un radar en 1945 : sa barre de chocolat se mit à fondre à proximité d'un « magnétron » sous tension ! Un brevet suivit dans la foulée et le premier four à micro-ondes vit le jour deux ans plus tard...
D'après « La physique par les objets quotidiens » de Cédric Ray et Jean-Claude Poizat
*Éditions Belin pour la science. Octobre 2007.*

La fréquence des ondes utilisées dans un four à micro-ondes est généralement égale à 2,50 GHz.

1. Justifier, à l'aide d'un calcul, pourquoi les ondes utilisées dans le four à micro-ondes sont qualifiées d'ondes centimétriques.

**2.** Les fours à micro-ondes peuvent parfois perturber les liaisons Wi-Fi. Nommer le phénomène responsable de cette perturbation et déduire la fréquence des ondes Wi-Fi en justifiant la réponse.

Dans un modèle approché simplifié, on considérera le four à micro-ondes comme un parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes Ox, Oy et Oz, Oz étant la verticale ascendante et de faces d'équations : x = 0 et x = d ; y = 0 et y = d ; z = 0 et z = d (figure 3).

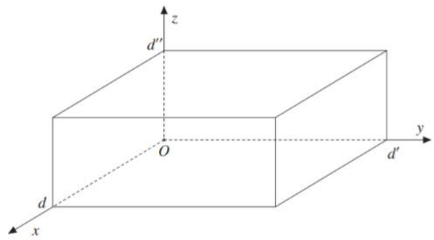


**Figure 3 –** Représentation schématique du four à micro-ondes

On mène une étude simplifiée de l'onde présente dans le four à micro-ondes. On admet que l'onde résultante à l'intérieur du four s'écrit sous la forme : $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0(x)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$ (2)
où $E_0(x)$ n'est pas une constante mais dépend effectivement de x, ω est la pulsation de l'onde et k la norme du vecteur d'onde associé. On suppose que le four est vide, c'est-à-dire sans aliment et donc rempli d'air, de caractéristiques assimilables avec une excellente approximation à celles du vide.

**3.** Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide, sans charge ni courant.
**4.** Déterminer l'équation de propagation du champ électrique.
**5.** En déduire l'équation différentielle que doit nécessairement vérifier $E_0(x)$.
**6.** À quelle condition sur ω, k et c, la solution de cette équation est-elle oscillante ?

On admet pour la suite que cette condition est satisfaite.
On rappelle la relation de passage du champ électrique à l'interface entre deux milieux différents indicés 1 et 2 : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \sigma / \varepsilon_0 \, \vec{n}_{1\to 2}$ avec σ la densité surfacique de charge au niveau de l'interface entre les deux milieux et $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire directeur normal à la surface allant du milieu 1 au milieu 2. On suppose que les parois du four à micro-ondes sont des parois épaisses constituées de conducteur parfait. On peut montrer que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

**7.** En déduire que le champ électrique total est nul au niveau des parois x = 0 et x = d.
**8.** Écrire les conditions aux limites que cela impose pour $E_0(x)$.
**9.** Montrer que cela entraîne $E_0(x) = A\sin(n\pi x/d)$ avec A une constante qu'on ne déterminera pas et n un entier. En déduire la relation de dispersion entre n, d, k et ω.

En réalité, le conducteur constituant la structure parallélépipédique du four à micro-ondes n'est pas un conducteur idéal. On peut montrer que cela induit alors que l'onde va légèrement pénétrer dans le conducteur sur une longueur caractéristique appelée profondeur de pénétration, notée δ. On l'appelle aussi épaisseur de peau et elle a pour expression $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ avec σ la conductivité du conducteur non parfait. La structure est constituée d'aluminium, de conductivité finie $\sigma_{Al} = 2,0.10^7$ S.m$^{-1}$ . On note e l'épaisseur de la paroi d'aluminium. On peut également montrer que l'amplitude de l'onde est alors multipliée par un facteur exp(-e/δ) .

**10.** Déterminer numériquement l'épaisseur minimale $e_{min}$ pour que l'amplitude de l'onde soit atténuée d'un facteur $10^4$ permettant ainsi une bonne protection des personnes situées à proximité du four à micro-ondes. Commenter

## III. Conductivité d'un conducteur métallique :

Dans un conducteur métallique, les charges libres sont des électrons soumis aux interactions avec le réseau cristallin. Ces interactions sont modélisées par une force de frottement fluide : $\vec{f} = -m\dfrac{\vec{v}}{\tau}$.

a) On donne pour le cuivre Z = 29 ; M = 64 g.mol$^{-1}$ ; $\rho = 8{,}9.10^3$ kg.m$^{-3}$. Sachant qu'il y a en moyenne un électron libre par atome, déterminer la densité particulaire n des électrons dans le cuivre ? En déduire la distance moyenne entre deux charges libres.

b) Quelle est l'équation différentielle régissant la vitesse d'un électron soumis aux champs E et B d'une onde et à la force f ?

On s'intéresse en fait à la vitesse moyenne des électrons ; pour cela on va considérer le milieu comme un fluide de charges libres dont le champ des vitesses est $\vec{v}(\vec{r},t)$.

c) Rappeler l'expression du champ des accélérations $\vec{a}(\vec{r},t)$.

On suppose que l'amplitude des mouvements des électrons est faible devant λ, longueur d'onde de l'onde électromagnétique, et que cette onde a une structure d'onde plane.

d) En déduire que l'équation précédente s'écrit : $m\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = -e\vec{E} - m\dfrac{\vec{v}}{\tau}$.

e) En déduire l'équation différentielle dont la densité de courant électrique crée par le champ E est solution. Résolution et représentation graphique.

f) Déterminer, à partir de l'équation différentielle précédente, l'expression complexe de la conductivité du cuivre, en régime sinusoïdal forcé.

g) Sachant que la conductivité du cuivre soumis à un champ électrique stationnaire est $\gamma_0 = 5{,}9.10^7$ S.m$^{-1}$, déterminer la valeur numérique de τ, appelé temps de relaxation du cuivre.

h) Dans quel domaine de fréquences la conductivité complexe du cuivre est-elle assimilable à une grandeur réelle ? A quel type d'ondes cela correspond-il ?

## IV. L'énergie des vagues

Les vagues en qui déferlent sur les côtes peuvent être provoquées par des rafales de vent en haute mer.
La relation de dispersion des vagues en eau profonde est donnée par $\omega^2 = gk$ où g est l'accélération de la pesanteur, k la norme du vecteur d'onde et ω la pulsation de l'onde.

1. Déterminer l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de la période T et de g. AN : T = 7 s.
2. Exprimer la vitesse de phase et la calculer.
3. Définir la vitesse de groupe et la calculer. La comparer à la vitesse de phase. Une série de vagues se déplace-t-elle plus vite ou plus lentement que les vagues individuelles qui la composent ?
4. Sachant que lorsque la période augmente la hauteur de la vague augmente également, montrer que les vagues plus hautes sont aussi plus espacées et plus rapides.

Les vagues mettent localement en mouvement les particules de fluides : elles transportent de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Notre objectif est d'obtenir un ordre de grandeur de la puissance apportée par les vagues qui s'échouent sur ta côte atlantique française.

5. Par analyse dimensionnelle, proposer une expression de l'énergie par unité de surface des vagues en fonction de g, de l'amplitude a de La vague et de la masse volumique de l'eau $\rho_e$.
6. En multipliant cette énergie par la longueur d'onde λ et par la longueur de la côte, on obtient un ordre de grandeur de l'énergie apportée sur la côte par une vague. En déduire un ordre de grandeur de la puissance moyenne apportée par les vagues sur la côte atlantique de la France longue d'environ 2400 km. On prendra une période de 7 s et une amplitude de 0,5 m. Comparer le résultat obtenu à la puissance d'une centrale nucléaire et commenter.

## V. Propagation du son dans un fluide visqueux :

On considère la propagation du son dans de l'air de viscosité $\eta$ selon la direction x. La force volumique de viscosité s'écrit alors $\eta \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ où $\eta$ est la viscosité dynamique du fluide et v(x,t) la vitesse de la particule fluide.

1. Ecrire les 3 équations vérifiées par les champs de vitesse v(x,t) , surpression $p_1(x,t)$ et « surmasse volumique » $\rho_1(x,t)$.
2. En déduire l'équation différentielle dont $p_1(x,t)$ est solution.
3. Déterminer la relation de dispersion.
4. Compte tenu des valeurs numériques, montrer que $k \approx \dfrac{\omega}{c}\left(1 - j\dfrac{\eta\omega}{2\rho_o c^2}\right)$. Décrire ces ondes.

## VI. Propagation des ondes électromagnétiques dans l'eau de mer

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$
$$div(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = 0$$

La particularité du milieu marin est qu'il n'est ni un bon conducteur, ni un bon isolant. Ainsi, les ondes radio habituelles (stations radio, téléphones portables…) sont inutiles dans le cas des transmissions avec un sous-marin en plongée.
On va supposer que l'eau de mer est un milieu linéaire, homogène et isotrope, de conductivité $4\gamma = S\cdot m^{-1}$, la loi d'Ohm locale peut s'appliquer.
On admet que pour tenir compte des propriétés spécifiques de l'eau de mer, on est conduit à remplacer la permittivité du vide $\varepsilon_o = 8{,}85.10^{-12}\ F\cdot m^{-1}$ par la permittivité absolue $\varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. La permittivité relative sera prise constante : $\varepsilon_r = 81$. On prendra aussi pour toute la suite la perméabilité magnétique comme étant celle du vide : $\mu_o = 4\pi.10^{-7}\ H\cdot m^{-1}$.

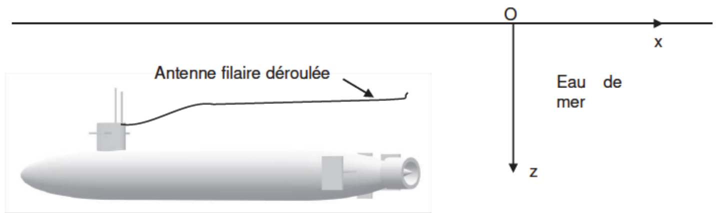
1. Donner les quatre équations de Maxwell (ainsi que leur nom) pour l'eau de mer. En déduire l'équation locale de conservation de la charge électrique. À l'aide de cette dernière, montrer que l'eau de mer est effectivement un milieu localement neutre. On fera intervenir pour cette réponse un temps de relaxation $\tau_R$ à exprimer en fonction de $\varepsilon$ et $\gamma$ et dont on calculera la valeur numérique.

On suppose par la suite que l'eau de mer est effectivement localement neutre. On cherche dans l'eau de mer des solutions en onde plane progressive harmonique (OPPH) de la forme :

$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\overrightarrow{OM})}$ et $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\overrightarrow{OM})}$ avec un vecteur d'onde $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire réel.

2. À partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles dont $\underline{\vec{E}}(M,t)$ est solution.
3. Établir la relation de dispersion de l'OPPH dans l'eau de mer. Montrer que l'on retrouve la relation de dispersion dans le vide si la conductivité est nulle et si =0.

On s'intéresse à la propagation d'une OPPH polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_x$, vecteur unitaire porté par l'axe (Ox). L'onde se propage dans l'eau suivant l'axe (Oz) perpendiculairement à la surface de l'eau (plan (Oxy). On pose $\underline{\vec{k}} = (k_r - jk_i)\,\vec{u}_z$ avec $k_r$ et $k_i$ réels positifs.




**4.** Après avoir déterminé le champ $\underline{\vec{B}}(M,t)$ donner l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $<\vec{\Pi}(M,t)>$ en fonction de $\mu_o$, $\omega$, $k_r$, $k_i$,, $|\underline{E}_o|$ et de z.

L'intensité énergétique I = $\|<\vec{\Pi}(M,t)>\|$ peut se mettre sous la forme $I(z) = I(0)e^{-\alpha z}$. On définit alors une atténuation $A_{dB} = 10\log\left(\dfrac{I(0)}{I(z)}\right)$ exprimée en décibel.

5. Identifier le coefficient $\alpha$. Montrer que l'atténuation par unité de longueur, $A_{dB}/z$ , est proportionnelle à $k_i$.

**6.** Montrer que pour $\omega << \gamma/\varepsilon$ , $\underline{k} = \pm\dfrac{1-j}{\delta}$. Exprimer la grandeur $\delta$. Comment varie l'atténuation par unité de longueur dans ce cas ? Calculer numériquement $\delta$ pour des ondes dites VLF (Very Low Frequency) comprises entre 3 kHz à 30 kHz utilisées pour communiquer avec un sous-marin en plongée. Faire le calcul pour les deux valeurs extrêmes de fréquences. Commenter en rapport avec la **figure**.