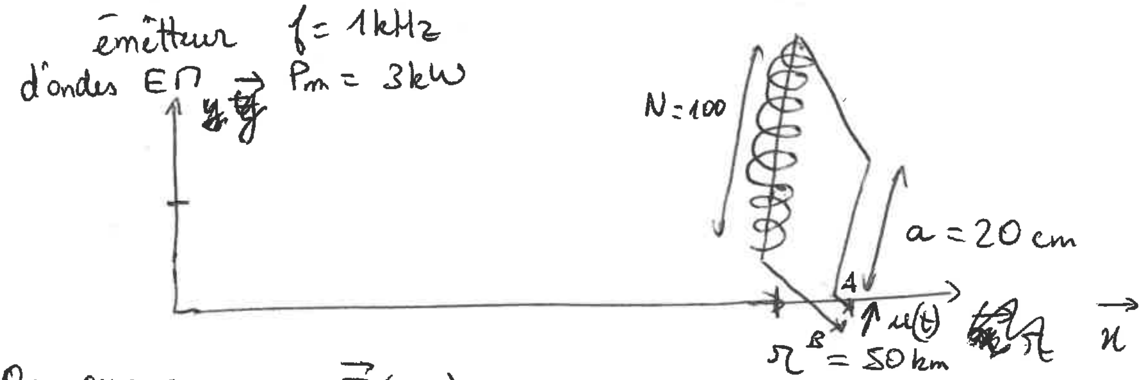
TD 28 Ex I

Groupe n°8



On suppose que $\vec{E}(M,t)$ ne dépend que de r, t de même pour $\vec{B}$

On note $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$

$\vec{B}(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u_z}$

où $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ (Relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ où $\vec{k} = k\vec{u_x}$)

car l'onde est localement plane progressive à polarisation rectiligne

Ainsi $\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \langle \| \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \| \rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle$

$= \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}$

De plus $P_m = \Phi(\langle \|\vec{\Pi}\| \rangle) = \iint_S \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \, dS = \dfrac{4\pi r^2 E_0^2}{2\mu_0 c}$

En effet $S = 4\pi r^2$ car l'émission s'effectue de manière isotrope dans tous l'espace et se modélise donc par une sphère.

Enfin $u(t) = -N \dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -N\dfrac{d}{dt}\iint B(x,t)\,dy\,dz$ (en $x = r$)

$= -N a^2 \dfrac{d}{dt} B_0 \cos(\omega t - kr)$

$= \dfrac{N a^2 E_0}{c} \omega \sin(\omega t - kr)$

?? ceci étant pour avoir une valeur efficace ~~maxile~~ maximale il faut donc que le cadre soit orienté selon $\vec{x}$

Afin de "sortir" le $B(r,t)$ de l'intégrale.

Dans ce cas $U_{eff} = \dfrac{N a^2 \omega E_0}{\sqrt{2}\, c}$ car $u(t)$ est sinusoïdale.

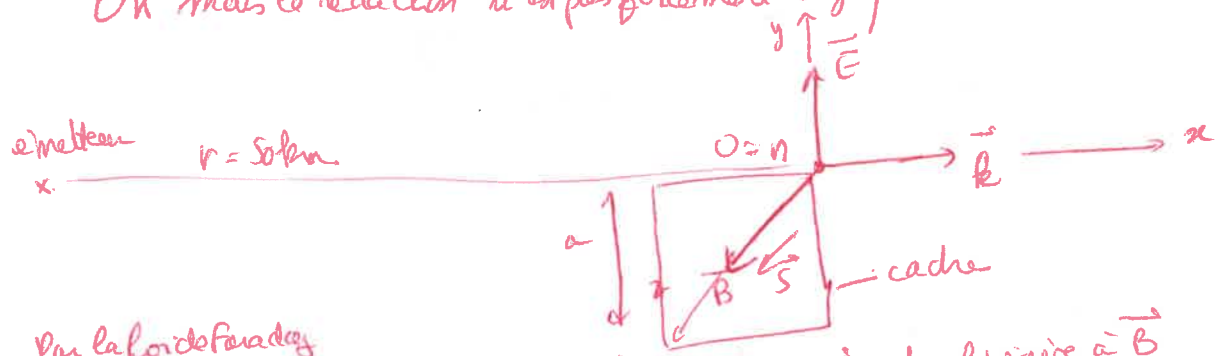
On avait que $E_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0 c P_m}{2\pi r^2}}$ donc $\underline{U_{eff} = \dfrac{N a^2 \times f}{r}\sqrt{\dfrac{\pi \mu_0 P_m}{c}}}$

A.N. : $U_{eff} = \dfrac{100 \times (20\times10^{-2})^2 \times 10^6}{50\times10^3}\sqrt{\dfrac{\cancel{3}\,\pi \times 4\pi\times10^{-7} \times 3\times10^3}{3\times10^8}}$

$= 5\times10^{-4}$ V

$\underline{U_{eff} = 0,5 \text{ mV}}$

OK mais la rédaction n'est pas forcément logique.



Par la loi de Faraday

$u(t) = -\dfrac{d\Phi(\vec B)}{dt} = -N\dfrac{d}{dt}(\vec B \cdot \vec S)$ $\longrightarrow$ $\vec S$ est colinéaire à $\vec B$

Est-ce que $\vec B$ est uniforme sur $\vec S$? $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3.10^8}{10^6} = 300$ m

et $a = 20$ cm $\ll \lambda$ $\longrightarrow$ $\vec B$ est uniforme sur $\vec S$.

$\vec B(M,t) = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\,\vec u_z = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t)\,\vec u_z$ si $M = 0$.

E_0 obtenu par $\langle \vec \Pi \rangle$ ...

TD 28 | Ex n° 2

Groupe 7

Bon travail

OK pour le soin et la rédaction!

1- pourquoi onde centimétrique ?

$f = 2{,}50$ GHz $\qquad c = 3{,}00 \times 10^{8}\ m.s^{-1}$

$f = 2{,}50 \times 10^{9}$ Hz

$\lambda = \frac{c}{f}$ $\qquad$ AN: $\lambda = \frac{3{,}00}{2{,}50} \times 10^{-1}$

$= 1{,}2 \times 10^{-1}\ m$

$\lambda = 12\ cm$ → onde centimétrique car λ de l'ordre du centimètre

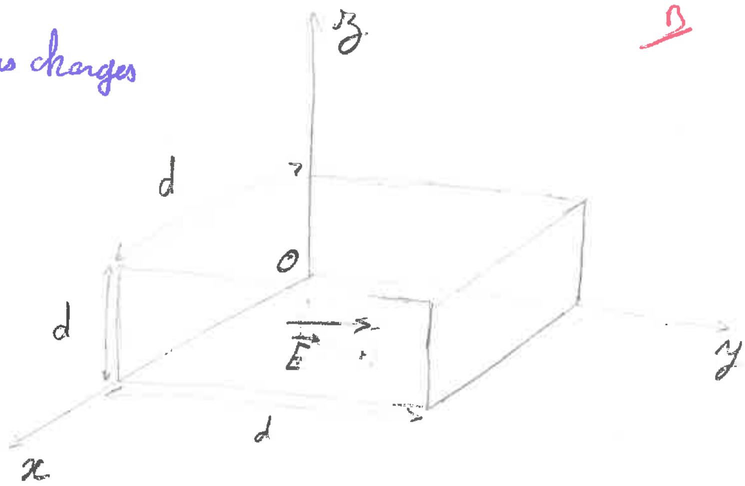
B

2- Lors du passage de 2 ondes se produit un phénomène d'interférence, ce phénomène est remarquable lorsque les fréquences ~~et~~ des ondes sont proches

Donc $f_{wifi} \simeq 2{,}5 - 3$ GHz (entre 2,4 et 5 GHz dans la littérature)

B

3- On se place dans le vide, sans charges ni courants



Maxwell - Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

Maxwell - Faraday : $\vec{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell - Thomson : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Maxwell - Ampère : $\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

4- $\Delta \vec{E} = \vec{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \vec{rot}(\vec{rot}\, \vec{E})$

$= \vec{0} - \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

critère de Schwartz

$= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\, \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\boxed{c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

5- ici $\vec{E}(x,y,z,t) = E_0(x)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y}$

$$\Delta \vec{E} = -k^2 E_0(x)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y} + \frac{\partial^2 E_0(x)}{\partial x^2}\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y} = (\Delta E)\,\vec{u_y}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right)\vec{u_y}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0(x)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\omega^2 E_0(x)\cancel{\cos(\omega t - kz)}\,\vec{u_y} = \left(c^2 \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2}\cancel{\cos(\omega t - kz)} - c^2 k^2 E_0(x)\cancel{\cos(\omega t - kz)}\right)\vec{u_y}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0(x) = 0}$$

B

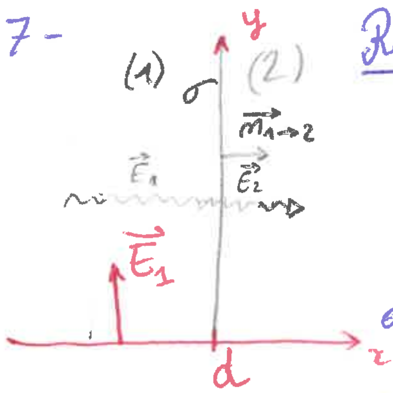
6- Pour avoir des oscillations il faut

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} > k^2$$

$$\boxed{|k| < \omega / c}$$

7-



Relation de passage

$$\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2}$$

colinéaire à $\vec{u_x}$

et $\vec{E_1}(x=d)$ est colinéaire à $\vec{u_y}$

ici $\vec{E_2} = \vec{0}$: milieu parfait

et $\sigma = 0$: fer parfait

donc $\vec{E_1} = \vec{E}(x,z,t) = \vec{0}$ au bord du micro-onde.

8- On a alors $\boxed{E_0(x=0) = 0}$ et $\boxed{E_0(x=d) = 0}$

9- Posons $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ ω_0 est 1 choix maladroit pas homogénéité

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + k_0^2 E_0 = 0 \qquad E_0(x,t) = A\sin k_0 x + B\cos(k_0 x)$$

$$E_0(x=0, z, t) = 0 = B$$

$$E_0(x=d, z, t) = 0 = A\sin(k_0 d)$$

$A \neq 0$ donc $\sin(k_0 d) = 0$

$$k_0 d = \pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$k_0 = \frac{n\pi}{d}$$

Ainsi on a bien $E_0(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{d} x\right)$ où $A \in \mathbb{R}$ B

$$k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \frac{n\pi}{d}$$

OK !

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}}$$

$$\boxed{k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c} - \frac{n\pi}{d}\right)\left(\frac{\omega}{c} + \frac{n\pi}{d}\right)}}$$

pour avoir propagation il faut $k^2 > 0$

si $k^2 < 0 \rightarrow$ ondes évanescentes.

10 - On a maintenant

$$\vec{E} = E_0(x)\, \cancel{e^{-z/\delta}}\, e^{-e/\delta} \cos(\omega t - kz)\, \vec{u_y}$$

dans le conducteur et plus dans le vide.

on veut en ~~z = emin~~, $e^{-e/\delta} = 10^{-4}$

$$\Leftrightarrow e_{min} = \delta \ln(10^4)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \ln(10^4)$$

AN: $e_{min} = 2,1 \times 10^{-5}\, m$

$$\boxed{e_{min} = 21\, \mu m}$$ B

c'est petit, cette condition est très largement respectée dans les micro-ondes

B

TD 28 : Exercice 3 Groupe 3

⚠ On ne peut comparer QUE des modules de vecteurs. On ne divise PAS des vecteurs.

a) Par définition,

$$n = \frac{f}{m} = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{8{,}9\times10^{3}\times 6{,}02\times10^{23}}{64\times10^{-3}} \simeq 8{,}4\times10^{28} \text{ électrons} \cdot m^{-3}.$$

on suppose $1e^-$ dans 1 cube de côté a $\quad n = \frac{1}{a^3}$

$$a = \frac{1}{n^{1/3}} = 2{,}3 \cdot 10^{-10} m.$$

b) On applique ~~soumis~~ le principe fondamental de la dynamique à l'électron soumis à son poids, la force $\vec{f}$ et à un champ électromagnétique :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B} - m\frac{\vec{v}}{\tau} - m\vec{g}$$

Or, on néglige le poids de l'électron.

Alors, $m\frac{d\vec{v}}{dt} + m\frac{\vec{v}}{\tau} = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

c) On écrit le champ des accélérations

$$\vec{a}(r;t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$$

en ordre de grandeur

$$\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \sim \frac{V}{T}$$

$$\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\| \sim \frac{V^2}{d}$$

$$\frac{\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\|}{\|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\|} = \frac{V d}{T V^2} = \frac{c}{V} \gg 1$$

d) Comme l'amplitude des mouvements des électrons est négligeable devant d, on peut se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires :

Alors, $\left\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \gg \|(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\|$ et $\vec{a}(r,t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$

on ne peut comparer QUE des normes de vecteurs.

$\|q\vec{E}\| \gg \|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|$ car $\|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|/c$ → $\vec{B}$ est le champ de l'onde em.

$$\frac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} = \frac{v}{c} \ll 1$$

les e^- ne sont pas relativistes.

D'où l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

e) Par définition, $\vec{j} = \rho\vec{v} = -en\vec{v} \iff \vec{v} = -\frac{\vec{j}}{en}$

Donc $\frac{m}{en}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = e\vec{E} - \frac{m}{en}\frac{\vec{j}}{\tau}$

$$\iff \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$$

On résout l'équation :

$$\vec{j} = \vec{A}e^{-t/\tau} + \frac{\tau n e^2}{m}\vec{E}$$

Or, à $t=0$, $\vec{j} = \vec{0} = \vec{A} + \dfrac{\tau n e^2}{m}\vec{E}$

$$\Leftrightarrow \vec{A} = -\frac{\tau n e^2}{m}\vec{E}$$

D'où $\vec{j} = \dfrac{\tau n e^2}{m}\vec{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

On représente graphiquement la solution :

6) En régime sinusoïdal forcé, l'équation différentielle étant linéaire et l'onde plane, elle devient :

$$(j\omega)\vec{j} + \frac{1}{\tau}\vec{j} = \frac{e^2 n}{m}\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{\frac{e^2 n}{m}}{\frac{1}{\tau} + j\omega} = \gamma \quad \text{par la loi d'Ohm locale}$$

7) En régime stationnaire, $t \to +\infty \Rightarrow \vec{j} \simeq \dfrac{\tau n e^2}{m}\vec{E}$

Par identification, $\gamma_0 = \dfrac{\tau n e^2}{m} \Leftrightarrow \tau = \dfrac{\gamma_0 m}{n e^2}$

$$\simeq 2,5 \times 10^{-14}\ s.$$

8)/ on veut $\gamma = \gamma_0$

$\Rightarrow \omega\tau \ll 1$ $\quad 2\pi f \ll \dfrac{1}{\tau}$ $\quad f \ll \dfrac{1}{2\pi\tau} = 6,4 \cdot 10^{11}$ Hz

B

infrarouge

groupe 5 ex 4 TD28.

Q1) La relation de dispersion des vagues en eau profonde est donné par : $\omega^2 = gk$ or $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ainsi $\frac{4\pi^2}{T^2} = g\frac{2\pi}{\lambda} \iff \lambda = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{9,81\times 7^2}{2\pi} = 76,5 \text{ m}$

Q2) La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{76,5}{7} = 10,9 \text{ m}$

Q3) La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$\omega^2 = gk \iff \omega = \sqrt{gk}$ (en différenciant $2\omega d\omega = g dk \rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega g}$

$\iff v_g = \frac{d}{dk}(\sqrt{gk}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$ or $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$

donc $v_g = \frac{1}{2} v_\varphi = \frac{1}{2}\times 10,9 = 5,45 \text{ m.s}^{-1}$ a.

Ainsi $v_g < v_\varphi$. Donc la série de vagues se déplace plus lentement que les vagues individuelles qui la composent. B

Q4) Lorsque la période T augmente :

- λ augmente car $\lambda = \alpha T^2$ où $\alpha = \frac{g}{2\pi}$
- v_φ augmente car $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\alpha T^2}{T} = \alpha T$
- v_g augmente car $v_g = \frac{1}{2} v_\varphi = \frac{1}{2}\alpha T$

TB

Ainsi les vagues deviennent plus espacées et plus rapides

Q5) Par analyse dimensionelle :

$\left[\frac{E}{S}\right] = [E_s] = \text{J.m}^{-2} = \text{kg.s}^{-2}$

détailler → énergie cinétique par exemple $J = kg.m^2 s^{-2}$

Donc $E_s = \rho g a^2$ car $[\rho g a^2] = \text{kg.m}^{-3} \times \text{m.s}^{-2} \times \text{m}^2 = \text{kg.s}^{-2}$

$E_s = \rho_e^\alpha g^\beta a^\gamma$

$\text{kg.s}^{-2} = (\text{kg.m}^{-3})^\alpha (\text{m.s}^{-2})^\beta \text{m}^\gamma$

$1 = \alpha$ $\quad -2 = -2\beta$ $\quad \beta = 1$

$-3\alpha + \beta + \gamma = 0$ $\quad \gamma = 3\alpha - \beta = 2$

Q6) $E_{tot} = E_s \times \lambda \times \ell$

↑ longueur de la côte

OR par definition $P = \frac{E_{tot}}{T} = \frac{E_S \times \lambda \times l}{T} = \frac{\rho \times g \times a^2 \times \lambda \times l}{T}$

Donc $P = \frac{1000 \times 9{,}81 \times (0{,}5)^2 \times 76{,}5 \times 2{,}4 \times 10^6}{7}$

$= 6{,}43 \times 10^{10}$ W

$= 64{,}3$ GW

Une centrale nucléaire a une puissance d'environ 1GW. Ainsi, la puissance des vagues sur toute la côte atlantique française correspond à environ 64 centrales nucléaires

Groupe 4 : TD 28 : Exercice V :

On considère la propagation du son dans l'air de viscosité η, selon la direction x.

Alors, la force de viscosité volumique est $\eta \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta^2 x}$.

1. On note les 3 équations que vérifient $v(x,t)$, $p_1(x,t)$ et $\rho_1(x,t)$:

(1) Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\delta \rho_1}{\delta t} + \rho_0 \frac{\delta v}{\delta x} = 0$$

(2) L'évolution isentropique donne :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1}$$

(3) Equation d'Euler en tenant compte de la viscosité :

$$\frac{\delta v}{\delta t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta p_1}{\delta x} = \frac{1}{\rho_0} \eta \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$$

2. Si on couple (1) et (2) on obtient :

$$\chi_s \rho_0 \frac{\delta p_1}{\delta t} + \rho_0 \frac{\delta v}{\delta x} = 0$$

en posant $c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}$ on a :

$$\frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{1}{c^2 \rho_0} \frac{\delta p_1}{\delta t} \quad (4)$$

De plus, en dérivant (3) par rapport à la position, et d'après le critère de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho_0}\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

On remplace avec (4) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho_0}\eta\frac{\partial^2}{\partial x}\left(-\frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{c^2\rho_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{1\times\eta}{\rho_0^2 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\eta}{\rho_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right)$$

On met cette equation sous une pseudo-forme canonique :

$$\underline{-\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\rho_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right) = 0} \qquad (5)$$

3. On pose que $p_1(x,t)$ est une onde-plane progressive harmonique :

$$p_1(x,t) = p_1 \cos(\omega t - kx)$$

En complexes :

$$\underline{p_1}(x,t) = p_1 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

On remplace dans l'équation (5) en complexes, car l'équation est linéaire :

$$-(-j\underline{k})^2\underline{p_1} + \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\underline{p_1} + \frac{\eta}{\rho_0 c^2}(j\omega)(-j\underline{k})^2\underline{p_1} = 0 \qquad (6)$$

Alors, d'après (6) :

$$-\underline{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - j\frac{\omega\eta}{\rho_0 c^2} \times \underline{k}^2 = 0$$

D'où, $$\underline{k}^2\left(1 + j\frac{\eta\omega}{\rho_0 c^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Alors, la relation de dispersion est :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \times \left(\frac{1}{1 + j\frac{\eta\omega}{\rho_0 c^2}}\right)$$

4. Etant donné que l'on se place dans le son, on a :
$f \in [20 ; 20\times10^3]$ Hz ; $c = 340\,m.s^{-1}$ (dans l'air).
et $\eta_{air} \simeq 1\times10^{-5}$ Pl.

Donc au plus, $$\frac{\eta\omega}{\rho_0 c^2} = \frac{1\times10^{-5}\times 2\pi\times 20\times10^3}{340^2} \simeq 1\times10^{-5} \ll 1.$$

On peut alors réaliser un développement limité d'ordre 1, en $\frac{\eta\omega}{\rho_0 c^2}$, à la puissance $-1/2$:

$$\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}\left(1 - j\frac{\eta\omega}{2\rho_0 c^2}\right) \quad \text{CQFD.}$$

On pose alors $\underline{k} = k' + jk''$. et $\boxed{k' = \frac{\omega}{c}}$ → le milieu n'est pas dispersif

On remarque que $k'' < 0$. $k'' = -\frac{1}{\delta}$ $\delta = \frac{2\rho_0 c^3}{\eta 4\pi f^2}$

δ = distance d'atténuation $650\,m < \delta < 6{,}5.10^5\,km$

Alors, les ondes auront une amplitude décroissante. faible!

$$\underline{p_1}(x,t) = p_1 e^{j(\omega t - (k'x + jk''))} = p_1 e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$$

D'où l'amplitude de l'onde est $p_1 e^{k''x}$ avec $k'' < 0$.

TD 28 Exercice VI 1/2

1) • Les équations de Maxwell dans l'eau de Mer sont :

- Maxwell Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ car ρ en $C \cdot m^{-3}$ est nul $\boxed{}$

↳ mais c'est ce qu'on cherche à justifier dans la 1ère question.

- Maxwell Thomson : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
- Maxwell Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Maxwell Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_{el} + \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

(question pas traitée..)

• On en déduit l'équation de conservation de la charge :

(nécessité de prendre $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$)

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0 \mathrm{div}\left(\vec{j}_{el} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \mu_0 \mathrm{div}(\vec{j}_{el}) + \mu_0\varepsilon_0 \mathrm{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$\rightarrow \mathrm{div}(\vec{j}_{el}) + \varepsilon_0\varepsilon_r \dfrac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$\boxed{\mathrm{div}(\vec{j}_{el}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

or d'après la loi d'Ohm locale : $\vec{j}_{el} = \gamma \vec{E}$ et le critère de Schwartz :

$$0 = \mu_0 \gamma\, \mathrm{div}(\vec{E}) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{E})$$

or $\mathrm{div}(\gamma\vec{E}) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

↓ MG

$\gamma \dfrac{\rho}{\varepsilon_r\varepsilon_0} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{E}) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{E}) + \frac{1}{\tau_r} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \quad \text{avec } \tau_r = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\gamma}$$

↳ $\rho(t) = A e^{-t/\tau_R}$

En effet : $[\varepsilon_0] = F \cdot m^{-1} = C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$

$[\gamma] = \Omega^{-1} \cdot m^{-1} = A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$

$= C \cdot s^{-1} \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$

$$\Rightarrow [\tau_r] = s = \left[\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right] = \frac{\cancel{C} \cdot \cancel{V^{-1}} \cdot \cancel{m^{-1}}}{\cancel{C} \cdot s^{-1} \cdot \cancel{V^{-1}} \cdot \cancel{m^{-1}}} = s$$

• $\tau_r = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\gamma} = \dfrac{8{,}85 \times 10^{-12} \times \varepsilon_r}{4} = 2{,}12 \times 10^{-12}\ s \times 81 \simeq 1{,}8 \times 10^{-10}\ s$

↳ au bout de $5\tau_R$ $\rho \to 0$ ← donc le milieu est neutre, ce qu'on cherche à montrer

2) On cherche l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans l'eau salée :

$$\Delta \vec{E} = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E})$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} = 0 + \vec{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

or d'après le critère de Schwartz ;

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{j}_{el}) + \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\Delta \vec{E}}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} - \frac{\gamma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ avec $\frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} = c^2$

| ici $c \neq$ vitesse de la lumière dans le vide

3) Si $\gamma = 0$ alors, $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}$ ce qui correspond à l'équation de propagation d'une onde EM dans le vide

donc avec $\vec{E}(M,t) = \vec{E_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM})}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(M,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}(M,t) \Leftrightarrow (j\omega)^2 \vec{E} = (-jk)^2 \vec{E} \times c^2$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = k^2 c^2$$

en posant $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}$

$$\Leftrightarrow \underline{k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

on retrouve bien la relation de dispersion d'une OPPH EM dans le vide

Sinon : $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\Delta \vec{E}}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} - \frac{\gamma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow (j\omega)^2 \cancel{\vec{E}} = (-jk)^2 \cancel{\vec{E}} \times c^2 - \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} j\omega \cancel{\vec{E}}$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = k^2 c^2 - j\frac{\omega \gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\Leftrightarrow \underline{k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - j\frac{\omega}{c}\frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

4) L'OPPH est polarisé selon $\vec{Ox}$ donc :

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}(M,t)\,\vec{u_x} = \underline{E}(z,t)\,\vec{u_x}$$

et se propage selon $\vec{Oz}$ donc $\underline{k} = (k_r - j k_i)\,\vec{u_z}$

• d'après la relation de structure :

$$\vec{\underline{B}}(M,t) = \vec{\underline{B}}(z,t) = \frac{\vec{\underline{k}} \wedge \vec{\underline{E}}}{\omega}$$

on a : $\vec{\underline{E}}(z,t) = E_0\, e^{j(\omega t - (k_r - j k_i) z)}\,\vec{u_z}$

$$= E_0\, e^{-k_i z}\, e^{j(\omega t - k_r z)}\,\vec{u_z}$$

donc $\vec{\underline{B}}(z,t) = \frac{1}{\omega}(k_r - j k_i)\,\vec{u_x} \wedge E_0\, e^{-k_i z}\, e^{j(\omega t - k_r z)}\,\vec{u_y}$

$$= \frac{1}{\omega}(k_r - j k_i) E_0\, e^{-z k_i}\, e^{j(\omega t - k_r z)}\,\vec{u_y}$$

$$= \left(\frac{k_r}{\omega} E_0\, e^{-z k_i}\, e^{j(\omega t - k_r z)} + \frac{1}{\omega} E_0 k_i\, e^{-z k_i}\, e^{j(\omega t - k_r z - \pi/2)}\right)\vec{u_y}$$

en réel on obtient : $\vec{B}(z,t) = \left(\frac{E_0}{\omega} k_r\, e^{-z k_i} \cos(\omega t - k_r z) + \frac{E_0}{\omega} k_i\, e^{-z k_i} \sin(\omega t - k_r z)\right)$

• définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} E_0\, e^{-z k_i} \cos(\omega t - k_r z)\,\vec{u_x} \wedge \left(\frac{E_0}{\omega} k_r\, e^{-z k_i} \cos(\omega t - k_r z) + \frac{E_0}{\omega} e^{-z k_i} \sin(\omega t - k_r z)\right)$$

$$= \left(\frac{E_0^2\, e^{-2z k_i}}{\mu_0 \omega} k_r \cos^2(\omega t - k_r z) + \frac{E_0^2\, e^{-2z k_i}}{\mu_0 \omega} k_r \cos(\omega t - k_r z)\sin(\omega t - k_r z)\right)\vec{u_z}$$

B

$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k_r e^{-2 k_i z}}{2 \mu_0 \omega}\,\vec{u_z}}$ donc $I = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| = I(0)\, e^{-\alpha z}$

B

avec $I(0) = \frac{E_0^2 k_r}{2\mu_0 \omega}$ et $\alpha = 2 k_i$

$\hookrightarrow$ car $\langle \cos(\omega t - k_r z)\sin(\omega t - k_r z) \rangle = 0$.

5) $A_{dB} = 10 \log\left(\frac{I(0)}{I(z)}\right) = 10 \log\left(\frac{I(0)}{I(0)e^{-\alpha z}}\right)$

$= 10 \log(e^{\alpha z})$

$= \frac{10\,\alpha z}{\log(10)}$

$\Rightarrow \frac{A_{dB}}{z} = 20\, k_i$ donc $\frac{A_{dB}}{z}$ est proportionnel à k_i

6) Relation de dispersion $\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \omega^2 - \mu_0 \gamma j\omega$

avec $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \Rightarrow \varepsilon\omega^2 \ll \gamma\omega$ et $\underline{k}^2 \simeq -\mu_0 \gamma j\omega$

imaginaire pur négatif

$\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma \omega\, e^{-j\pi/2}$

$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}\, e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}(1-j) \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

$\delta(3\,kHz) = 4,6\,m$ → au bout de 5δ l'onde n'existe plus

$\delta(30\,kHz) \simeq 1,5\,m$ → l'antenne filaire permet de capter les ondes au plus près de la surface, avant atténuation.