

**I. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (E3A MP 2024)**

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Dans ce modèle, le proton est supposé immobile et placé à l'origine  $O$  du repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . L'électron est soumis au champ électrique coulombien du proton et on néglige l'effet de son poids. Le moment cinétique  $\vec{L}_O$  de l'électron par rapport à  $O$  est quantifié :  $\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q10.** Montrer que  $\vec{L}_O$  est constant. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.

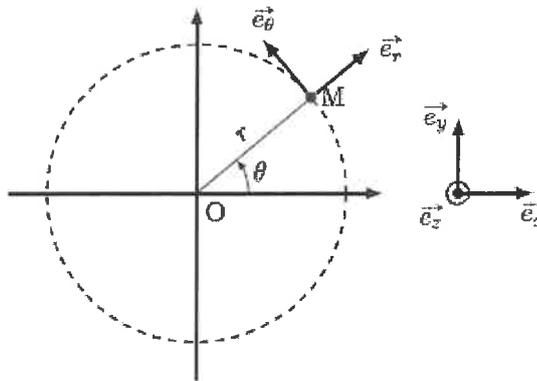


FIGURE 1 – Repérage d'un point  $M$  dans le plan du mouvement de l'électron.

On introduit le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  de telle sorte que  $\vec{L}_O$  soit de même direction et de même sens que  $\vec{e}_z$ . On introduit aussi la base locale cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  d'axe  $(O, \vec{e}_z)$ . Un point  $M$  du plan du mouvement est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, 0)$  comme indiqué sur la figure 1. On note donc  $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$ .

BASES

**Q11.** Exprimer  $L_O$  en fonction de  $m_e$ ,  $r$  et de  $\frac{d\theta}{dt}$ .

On suppose que l'électron est en mouvement circulaire autour du proton.

**Q12.** Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

**Q13.** Obtenir l'expression de la vitesse  $v = \|\vec{v}\|$  de l'électron en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et du rayon  $R$  de sa trajectoire.

**Q14.** En déduire que le rayon de la trajectoire s'écrit  $R = n^2 a_0$ , où  $a_0$  est le rayon de Bohr que l'on exprimera en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et de  $h$ . Calculer numériquement  $a_0$ .

**Q15.** Citer la relation numérique entre le joule et l'électronvolt.

**Q16.** Montrer que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit  $\mathcal{E}_m = -\frac{E_0}{n^2}$  et donner l'expression de  $E_0$  en fonction de  $e$ ,  $m_e$ ,  $\varepsilon_0$  et de  $h$ . Calculer la valeur numérique de  $E_0$  exprimée en joule et en eV.

**Q17.** Citer la relation entre l'énergie d'un photon  $E_\gamma$  et sa longueur d'onde  $\lambda$ . Calculer, en joule et en eV, l'énergie d'un photon de longueur d'onde  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .

Lorsqu'un photon est absorbé par un atome d'hydrogène, cela provoque une transition d'un niveau d'énergie repéré par l'entier  $n$  vers un niveau d'énergie repéré par l'entier  $p$ .

CC INP

**Q18.** Donner, en fonction de  $E_0$ ,  $h$ ,  $c$ ,  $n$  et de  $p$ , l'expression des longueurs d'onde  $\lambda_{n,p}$  des photons susceptibles d'être absorbés.

**Q19.** On admet que les transitions associées à des longueurs d'onde dans le visible sont obtenues pour  $n = 2$ . Donner les valeurs de  $p$  et  $\lambda_{2,p}$  correspondant effectivement à une longueur d'onde dans le visible.

**Q20.** Que vaut l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour que l'électron échappe à l'attraction coulombienne du proton ?

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	$c$	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

## II. Fonctions spéciales (Mines MP 2023)

Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme `scipy`) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques...

On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».

## I La fonction de W de LAMBERT

**BASES**

### I.A Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse  $m$  est lancé à partir du sol en  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et faisant un angle  $\theta_0$  avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- – 1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- – 2. Établir les équations horaires du mouvement.  
Montrer que le mouvement est plan.
- – 3. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- – 4. Déterminer les coordonnées du sommet  $S$  de la trajectoire. Définir la portée  $\ell$  du tir et établir son expression. Quel est l'angle  $\theta_0$  assurant un tir de portée maximale ?

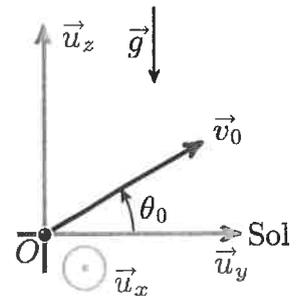


FIGURE 1 – Tir d'un projectile

### I.B Tir d'un projectile avec frottements

**CCIMP**

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  avec  $\alpha > 0$ .

- – 5. Quelle est la dimension du coefficient  $\alpha$  ? Définir à partir de  $\alpha$  un temps caractéristique  $\tau$ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- – 6. Établir, en fonction  $g$ ,  $\tau$ ,  $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ ,  $\theta_0$  et  $t$ , les nouvelles équations horaires du mouvement.

- – 7. Dans la situation où  $t \ll \tau$ , simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- – 8. Dans la situation où  $t \gg \tau$ , simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite  $v_\infty$ .  
Où retombe le projectile ?
- – 9. Dédire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant  $\tau$ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- – 10. Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de  $\tau$ .

### I.C La portée maximale d'un tir avec frottement

MATHS

- – 11. Dresser le tableau de variation de la fonction  $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$  et déterminer la valeur  $\beta$  de son minimum global.

La fonction  $W$  de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de  $T$  sur  $[\beta, +\infty[$ . Reproduire le graphe de  $T$  représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de  $W$  représenté sur la partie droite.

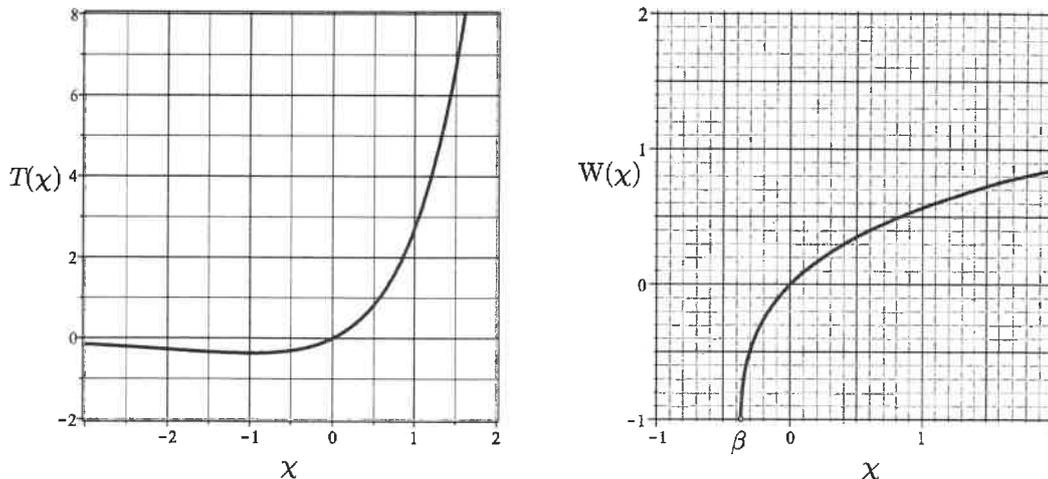


FIGURE 2 – Représentations graphiques de  $T(\chi)$  (à gauche) et  $W(\chi)$  (à droite)

- – 12. On peut montrer que :  $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$ . Quelle est la valeur de  $W(0)$  ?  
On souhaite appliquer le schéma d'EULER explicite avec un pas  $h = 0.0001$  pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de  $W(\chi)$  sur l'intervalle  $[0; 2,5[$ .

La fonction  $W(\chi)$  est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler avec : `from scipy.special import lambertw`.

On montre que si  $ad \neq 0$ , la solution de l'équation  $at + b + ce^{dt} = 0$  pour l'inconnue  $t$  est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right).$$

- – 13. En déduire à quel instant  $t^* > 0$  le projectile touche le sol. On posera  $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$ .
- – 14. On rappelle que par définition  $W \exp(W) = \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est la fonction identité :  $\chi \mapsto \chi$ .  
En déduire que la portée est donnée par  $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(ue^u)/u)$ .

En posant  $\gamma = v_0/v_\infty$ , on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin \left( \frac{\gamma W \left( \frac{\gamma^2 - 1}{e} \right)}{\gamma^2 - 1 - W \left( \frac{\gamma^2 - 1}{e} \right)} \right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin \left( \frac{1}{e - 1} \right) \simeq 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

- - 15. À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\tau = 0,4 \text{ s}$ .

## II L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle  $m$  et d'une tige rigide de longueur  $\ell$  et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

On repère sa position par l'angle  $\theta(t)$ . À  $t = 0$  on lâche le pendule sans vitesse initiale avec  $\theta(t = 0) = \theta_0 \in ]0, \pi/2[$ .

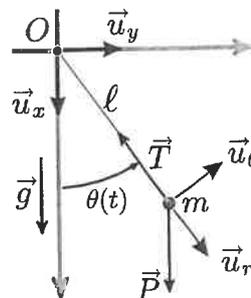


FIGURE 3 - Pendule simple

- BASES**
- - 16. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction  $\theta(t)$ .
- - 17. On fait l'approximation des petits angles tels que  $\sin \theta \sim \theta$ . Établir dans ces conditions la période  $T_0$  des oscillations. Quelle est la propriété remarquable de la période dans le cadre de cette approximation ?
- - 18. Déterminer l'expression générale de  $\frac{d\theta}{dt}$  sans faire l'approximation des petits angles. En déduire que la période  $T$  des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

La propriété remarquable de la question précédente est-elle conservée ?

En effectuant le changement de variable  $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$ , on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}$$

On souhaite calculer l'intégrale  $\mathcal{K}(\chi)$  par la méthode des rectangles médians pour un angle  $\theta_0 = \pi/3$ .

- - 19. Après avoir tracé le graphe de la fonction  $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$  pour  $\chi \in [0; 9]$ , illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel  $I = \int_0^9 (\sqrt{\chi} + 1) d\chi$  en utilisant 9 rectangles.
- Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de  $I$  et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?
- - 20. Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer  $\mathcal{K}(\chi)$  par la méthode des rectangles médians.

PSI\*  
MATHS  
PYTHON

```

1 import math as m
2 def f(x,phi):
3     return.....
4
5 S = 0.
6 N = 100
7 a = 0.
8 b = m.pi/2.
9 pas = .....
10 theta_0 = m.pi/3.
11 x = m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi = .....
14     S = .....
15
16 print(pas * S)

```

*python code*

La fonction  $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$  est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. Elle est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler directement avec : `from scipy.special import ellipk`.

- BAJES** □ - 21. En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que  $T_0 = 1$  s, évaluer  $T$  lorsque  $\theta_0 = 50^\circ$ . Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII<sup>e</sup> siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de FRANCE et d'ANGLETERRE avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

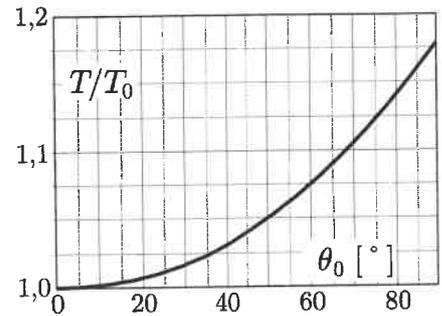


FIGURE 4 -  $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

- BASES** □ - 22. Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?