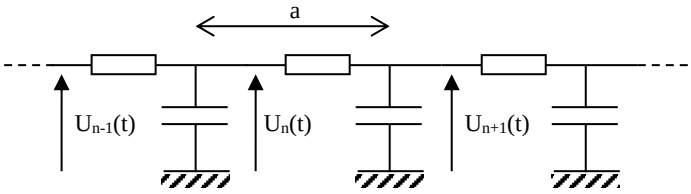
ETUDE D'UN PHENOMENE DE DIFFUSION

On se propose dans ce TP de modéliser à l'aide d'une chaine de cellules RC le comportement d'un milieu absorbant et dispersif.

1. Préparation :

On considère une chaine constituée d'un grand nombre de cellules RC identiques de taille a.



- Montrer que les tensions U_{n-1}, U_n et U_{n+1} sont liées par l'équation :

$$RC\frac{dU_n}{dt} = U_{n-1}(t) + U_{n+1}(t) - 2U_n(t)$$

On considère une fonction continue et dérivable deux fois u(x,t) telle que $u(x = na,t) = U_n(t)$.

En considérant que a est petite devant l'échelle des variations spatiales de u(x,t), on montre que u(x,t) vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ avec } D = a^2/RC.$$

- Cette équation est appellée « Equation de diffusion». Quelle est l'unité de D ?

La chaîne des cellules RC est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale et impose $u(x=0,t) = U_0.\cos(\omega t)$

On admet que

$$u(x,t) = U_0.\exp(-x/\delta).\cos(\omega t - x/\delta) \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

est solution de l'équation précédente.

- Quelle est l'amplitude de u(x,t) ? Est-elle constante ? Si l'amplitude décroit avec la distance, le milieu est dit absorbant, est-ce le cas ?

- A partir de vos connaissances sur les ondes, vues en première année, justifier que la quantité $\cos(\omega t - x/\delta)$ représente une onde progressive. Quelle est sa direction? Quel est son sens de propagation ? Quelle est sa vitesse? L'exprimer en fonction de δ et ω, puis en fonction de a, R, C et ω. Si la vitesse dépend de la fréquence, le milieu est dit dispersif, est-ce le cas ?

- Exprimer la longueur d'onde en fonction de δ. Comment interprétez-vous maintenant « a est petite devant l'échelle des variations spatiales de u(x,t) » ? Montrer que cette condition est équivalente à $RC\omega << 1$.

2. Manipulations :

Vous disposez d'une chaine de N cellules RC avec R = 1 kΩ et C = 100 nF.
Mesurer la valeur de a et donner l'incertitude de la mesure (expliquer cette incertitude).

On va réaliser l'étude en régime permanent sinusoidal.

2.1. Etude de l'amplitude :

Alimenter la chaine à l'aide d'un GBF délivrant une tension sinusoidale de fréquence f et d'amplitude U_0 = 10 V environ.
Choisir une fréquence f permettant d'utiliser le modèle continu.
Les mesures seront notées directement sur la feuille python diffusionRC.py qui servira aux tracés.
Mesurer à l'aide d'un voltmètre électronique les amplitudes efficaces de la tension, ainsi que l'incertitude-type (regarder la notice du voltmètre !) aux bornes de chacun des 20 premiers condensateurs.
Tracer la courbe donnant l'amplitude U_n en fonction de x en faisant apparaître l'incertitude–type sur chaque mesure, on utilisera l'instruction errorbar de la bibliothèque matplotlib.pyplot.
Commenter son allure et la vérifier en traçant la droite appropriée, dont on déterminera la pente grâce à l'instruction polyfit.
Les incertitudes sont calculées par une méthode Monte Carlo, disponible sur le script python diffusionRC_incert.py.
En déduire δ et son incertitude grâce à une modélisation ; valider la mesure.

2.2. Mesure du déphasage :

Après avoir rappelé le principe de mesures du déphasage φ entre deux tensions, mesurer celui-ci entre la tension U_n et celle délivrée par le générateur pour les 20 premières cellules.
Tracer la courbe φ en fonction de x et en déduire une nouvelle valeur de δ.

2.3. Etude de δ :

On souhaite vérifier la dépendance de δ avec la fréquence.
Proposez un protocole et le mettre en œuvre.

Références :

- Deiber A. Paviet-Salomon F. et Poinçot JB « un exemple de diffusion en électrocinétique sur une chaine RC » BUP décembre 2010, N° 929.
- Toutain W. « Diffusion de charge électrique à une dimension » BUP mai 2012 N°944.
- Epreuve I Centrale PC 2009.

La chaine est alimentée par un générateur délivrant une tension $e(t) = U_0.\cos(\omega t)$.
En régime permanent sinusoidal une solution de cette équation sous la forme :

$$U_n(t) = U_n.\cos(\omega t + \varphi_n), \text{ soit } \underline{U_n}(t) = \underline{U_n}.\exp(j\omega t) \text{ avec } U_n = U_n.\exp(j\varphi_n).$$

En cherchant une solution telle que $U_{n+1} = k.U_n$ avec k complexe, on peut montrer que si $RC\omega << 1$:

$$\underline{k} = 1-(1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}.$$

Montrer qu'on a alors : $U_n = \exp(-n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}).U_0$ et $\varphi_n - \varphi_{n-1} = -\arctan(\frac{\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}{1-\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}})$.