UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE

EXAMEN D'AUTOMATIQUE – M2Pro ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

1° session – Lundi 5 Février 2007

Durée 2h00 – Tous documents de Cours, TD, TP autorisés

LIRE ATTENTIVEMENT L'ENSEMBLE DU SUJET AVANT DE COMPOSER.
LE PLUS GRAND SOIN DOIT ÊTRE ACCORDÉ À LA PRÉSENTATION ET À L'ARGUMENTATION DES RÉSULTATS.

Dans tout le sujet, $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ désigne la transformée de Laplace du signal temporel $x(t)$. L'opérateur de transposition est noté $'$.

On considère le système [S], d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$, caractérisé par la représentation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ \text{où } x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On note en outre $w(t) = x_2(t)$.

I/ Analyse élémentaire du procédé en boucle ouverte

1. Dessiner le schéma-bloc de [S] en tant que l'interconnexion de systèmes élémentaires d'ordre 1 admettant pour sorties les composantes x_1, x_2 et x_3.
2. En s'appuyant sur ce schéma-bloc, répondre aux questions suivantes :
   (a) indiquer comment vérifier rapidement que les pôles de la description par schéma-bloc de [S] correspondent à ceux de sa représentation d'état (1) ;
   (b) établir les propriétés de commandabilité, observabilité, stabilisabilité, détectabilité de [S].
3. Si besoin à partir des solutions des équations d'état de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ – mais ce calcul explicite n'est pas nécessaire – (*),
   (a) expliquer pourquoi la représentation d'état (1) permet de décrire une perturbation scalaire $w(t)$ évoluant d'une valeur initiale $w(0)$ vers une valeur finale $w(+\infty)$ selon une loi exponentielle ;
   (b) exprimer $w(0)$ et $w(+\infty)$ à partir des conditions initiales de [S] ;
   (c) préciser un ordre de grandeur du temps de convergence à 5% de $w(t)$.

II/ Mise en place d'une commande par retour d'état

On met en place une commande par retour d'état de la forme $u(t) = Nr(t) - Kx(t)$, où $r(t)$ désigne le signal de consigne et $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$.

4. À partir de la représentation d'état de la boucle fermée,
   (a) exprimer – au moyen de calculs très limités – les pôles du système bouclé en fonction de K ;
   (b) quelle propriété remarquable observe-t-on ? pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
5. Analyser partiellement le lien consigne-sortie en répondant aux questions suivantes :
   (a) écrire le transfert consigne-sortie $F_{yr}(p) = \frac{Y(p)}{R(p)}$;
   (b) que représente exactement $F_{yr}(p)$? pourquoi $F_{yr}(p)$ est-il du premier ordre ?
   (c) établir les conditions sur N et K permettant de conférer à $F_{yr}(p)$ un pôle en -11 ainsi qu'un gain statique unité.

6. On souhaite utiliser les degrés de liberté restant au niveau de la commande en boucle fermée précédente pour permettre la réjection de la perturbation $w(t)$, c.-à-d. pour supprimer l'effet de $w(t)$ sur $y(t)$. Répondre aux questions suivantes :
   (a) montrer que cette propriété est obtenue dès lors que certains pôles du système bouclé – à préciser – sont rendus inobservables par un choix convenable des paramètres de la commande ;
   (b) déterminer les paramètres non encore fixés dans $\{N, k_1, k_2, k_3\}$ permettant l'obtention de cette propriété.

III/ Mise en place d'un reconstructeur de $x_1(t)$ et $x_2(t)$

On se propose de mettre en place un observateur minimal identité qui, disposant de $u(t)$ et $y(t)$, permet la reconstruction des composantes $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du vecteur d'état.

7. Indiquer pourquoi cette reconstruction est théoriquement possible, et mentionner l'intérêt de l'effectuer avec un observateur d'ordre minimal.
8. Afin que le reconstructeur soit d'ordre minimal et s'exprime comme un observateur identité sur $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on souhaite réécrire la représentation (1) en une représentation admettant pour vecteur d'état $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} y(t) & x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}'$. Répondre aux questions suivantes :
   (a) proposer des matrices T^{-1} et T permettant le changement de variable $x(t) = T\tilde{x}(t)$ adéquat, et *justifier que la représentation d'état en $\tilde{x}(t)$ consécutive à cette opération est équivalente à* (1) ;
   (b) établir la représentation d'état de [S] dans la nouvelle base.
9. En s'appuyant sur le résultat de la question précédente, dresser le modèle d'état de l'observateur minimal identité recherché, dont les pôles seront fixés à π_1 et π_2.

IV/ Introduction du vecteur d'état reconstruit $\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) & \hat{x}_2(t) & \hat{x}_3(t) \end{pmatrix}'$ dans la commande

La commande est désormais de la forme $u(t) = Nr(t) - K\hat{x}(t)$, avec $\hat{x}_1(t)$ et $\hat{x}_2(t)$ déterminés en **III/** et $\hat{x}_3(t) = y(t) - \hat{x}_2(t)$.

10. Décrire, en étayant – longuement – la réponse, le fonctionnement obtenu en boucle fermée, et proposer des valeurs satisfaisantes pour π_1 et π_2.

V/ Commande par calculateur

Le but est de « transposer » la commande de type retour sur un vecteur d'état reconstruit établie dans les questions précédentes de façon à l'implémenter sur un calculateur.

11. Proposer un modèle à temps discret *exact* sur lequel peut être basée l'étude (*), en précisant son sens.
12. Indiquer les similarités et les différences entre la méthode de synthèse de cette nouvelle commande par calculateur et la synthèse à temps continu traitée dans les questions précédentes.

(*) On rappelle, à toutes fins utiles, que la réponse d'un système décrit par $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A}{1+Tp}$, initialement en $y(0)$ et soumis à un échelon de position d'amplitude e_0 s'écrit $y(t) = y(0)\exp(-\frac{t}{T}) + Ae_0\big(1 - \exp(-\frac{t}{T})\big)$.