

① A tout triplet (x, y, z) de nombres réels, on associe la matrice $M(x, y, z)$ définie par:

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

$M(x, y, z) =$. On note $I = M(1, 0, 0)$ et $J = M(0, 1, 0)$.

1/ Calculer J^2 et J^3 .

2/ Etablir que l'ensemble des matrices du type $M(x, y, z)$ est stable par:
l'addition des matrices

la loi externe c'est à dire le produit par un réel qq.

3/ Montrer que le produit $M(x, y, z) \cdot M(x', y', z')$ peut se mettre sous la forme $M(X, Y, Z)$. On donnera X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z' .

4/ Montrer que si $aI + bJ + cJ^2 = O$, alors $a=b=c=0$.

On note O la matrice nulle de type $(3, 3)$.

5/ Montrer que:

$$M(x, y, z) \cdot M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z) \cdot [(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \cdot I$$

6/ En déduire une cns pour que $M(x, y, z)$ soit inversible.

Déterminer alors M^{-1} .

7/ On dira qu'un réel λ est valeur propre de $M(x, y, z)$ ssi la matrice $M(x-\lambda, y, z)$ n'est pas inversible.

a/ Montrer que $x+y+z$ est valeur propre de $M(x, y, z)$.

b/ Si $y \neq z$, montrer qu'il n'y a plus d'autres valeurs propres.

c/ Si $y=z$ déterminer l'autre valeur propre de $M(x, y, y)$.

8/ On pose $A = M(x, y, y)$.

$$a/ \text{ Calculer } A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b/ En déduire une matrice P carrée d'ordre 3 telle que :

$$AP = P \cdot B \text{ avec } B = \begin{bmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{bmatrix}.$$

c/ Déduire enfin que pour n entier naturel n on a:

$$A^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n \cdot M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n \cdot M(2, -1, -1).$$

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n , calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

- (a) pour tout entier naturel n , $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
- (b) pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
- (c) pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

- (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n$.
- (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leq v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leq v_0 u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1 u_n$$

- (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

- 1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A .
- 2. Soit $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

- (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

- (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.