BCPST 1 **DS 4** **2004/05**

❶ On notera E, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
A est un élément donné de E.
On définit une application f de E dans E par: Si $M \in E$, alors $f(M)=AM-MA$.
On posera $\text{Ker } f=\{M\in E \,/\, f(M)=0\}$ 0 est la matrice nulle de E.
$\text{Im } f=\{f(M) \,/\, M\in E\}$.

Première partie

1/ Comparer f(M) et f(M+I). I est la matrice unité de E, donc $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2/ Montrer que $A\in\text{Ker } f$, puis que : $\forall n\in \mathbb{N}^*$, $A^n \in \text{Ker } f$.

3/ f est-elle injective?
f est-elle linéaire? si oui, on le prouve.

Seconde partie

Dans cette partie, on pose $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

1/ Montrer que $\text{Ker } f=\langle A, I\rangle$, c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires de A et I.

2/ Montrer que $\text{Im} f=\{\begin{bmatrix} -2a & -3a-5b \\ 2b & 2a \end{bmatrix} / a,b$ varient dans $\mathbb{R}\}$.

3/ L'aplication f est-elle surjective?

4/ Résoudre dans E l'équation ci-dessous:
$f(M)=A$;

5/ On pose $U=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer f(U) puis résoudre l'équation:
$f(M)=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

❷ On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $B=(e_1, e_2)$.
a et b étant deux réels , on note $f_{a,b}$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, dont la matrice , relativement à B est: $M(a,b)=\begin{bmatrix} b-4a & 2a \\ 2a & b-a \end{bmatrix}$.

1/ Montrer que $f_{a,b}$ est bijectif ssi $b(b-5a)\neq 0$.
Dans le cas contraire on déterminera précisément, $\ker f_{a,b}$ et $\text{Im } f_{a,b}$.

2/ On pose $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

a/ Calculer U^2, V^2, UV, VU.
b/ Exprimer M(a,b) comme combinaison linéaire de U et V.
c/ En déduire $(M(a,b))^n$, lorsque n est un entier naturel non nul.

❸ On se place dans un espace vectoriel réel E. (qui selon notre cours est donc du type $\mathbb{R}^n$)
Si p est un endomorphisme de E on dit que c'est un projecteur si $p\circ p=p$.
Soit donc p un projecteur distinct de θ et de Id.
On posera $q=Id-p$.
1/ Montrer que q est un projecteur.
2/ Montrer que: $\forall u\in E$, alors $u-p(u)\in \text{Ker } p$

3/ Montrer que $\forall v \in \mathrm{Im}\, p$, alors v est invariant par p.

4/ Calculer $p+q$, $p \circ q$, $q \circ p$.

5/ Montrer que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, q$ et $\ker q = \mathrm{Im}\, p$

6/ On pose $f = ap + bq$.

Déterminer a et b pour que :

f soit involutif?

f soit un projecteur?

❹ a est un réel. n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. On note A la matrice carrée d'ordre n, ci-dessous.

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & \dots & (a+n-1)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & \dots & (a+n)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a+n-1)^2 & (a+n)^2 & \dots & (a+2n-2)^2 \end{bmatrix}$$

Déterminer le rang de cette matrice.