

3 exercices indépendants; un barème approximatif est indiqué.

● (6 points) La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé.

Initialement, une urne contient des boules blanches et des boules rouges indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant: après chaque tirage, la boule obtenue est remise dans l'urne et on rajoute c boules de même couleur que celle-ci.

1/ Dans cette question au départ il y a b boules blanches et r boules rouges. (b, r naturels non nuls)

a/ Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche au premier tirage?

b/ Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche au second tirage?

c/ Si la seconde boule est blanche, quelle est la probabilité que la première le soit aussi?

2/ Pour tout n , tout x , tout y entiers naturels non nuls on note $u_n(x, y)$, la probabilité d'obtenir une blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage lorsque l'urne contient initialement x blanches et y rouges.

a/ En exploitant le premier tirage, montrer que, pour tous entiers naturels non nuls, n, x, y on a: $u_{n+1}(x, y) = \frac{x}{x+y} \cdot u_n(x+c, y) + \frac{y}{x+y} \cdot u_n(x, y+c)$.

b/ En déduire que pour tous n, x, y entiers naturels non nuls on a: $u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

3/ Dans cette question au départ il y a 1 blanche et 1 rouge dans l'urne et $c=1$.

On note X_n , la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages.

a/ Donner la loi de X_1 .

b/ Donner la loi de X_2 .

c/ En raisonnant par récurrence établir la loi de X_n .

● (4 points) n est un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules numérotées de 1 jusqu'à n .

1/ Dans cette question $n \geq 2$. On tire successivement deux boules de l'urne.

Quelle est la probabilité que la seconde ait un numéro supérieur ou égal à la première?

a/ si les tirages ont lieu sans remise.

b/ si les tirages ont lieu avec remise.

2/ Ici $n \geq 10$. On tire successivement 10 boules de l'urne.

Quelle est la probabilité que la 10^{ième} boule ait un numéro supérieur ou égal aux 9 autres?

a/ si les tirages ont lieu sans remise.

b/ si les tirages ont lieu avec remise.

● (10 points) Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième partie est indépendante de la seconde.

Dans tout le problème : on considère la fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Partie I : Etude de la fonction φ

- 1.a Etudier la parité de φ .
- 1.b Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.
- 1.c Donner l'allure de la courbe représentative de φ .
- 2.a Justifier que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
- 2.b Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = 1 - \varphi^2(x)$.
- 2.c Montrer que $\varphi^{-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer simplement sa dérivée.

Partie II : Etude d'une première équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 vérifiant :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

On considère f une fonction solution.

1. Calculer $f(0)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite réelle (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

- 2.a Montrer que (u_n) converge et exprimer sa limite.
- 2.b Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Conclure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

Partie III : Etude d'une seconde équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

1. Montrer que φ est solution du problème posé.
2. On considère dans cette question f une solution du problème posé.
- 2.a Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
- 2.b Montrer que $-f$ est aussi solution
- 2.c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.
 (indice : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$).
3. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0) = 1$.
 On considère $x \in \mathbb{R}$ et l'on définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
- 3.a Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
- 3.b Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} .
- 3.c En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et préciser celui-ci.
- 3.d Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que celle-ci est constante égale à 1.
- 3.e Qu'en déduire quant à la fonction f ?