BCPST 1 **DS n° 6** **2004/05**

Deux problèmes totalement indépendants.

Calcul d'une intégrale

L'objectif de ce problème est de calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

Dans tout le problème n désigne un entier naturel.

Partie I

On pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt$.

1. Justifier l'égalité des deux intégrales proposées ci-dessus.
2. Montrer que (J_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs.
3. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)J_{n+1} = (2n+1)J_n$.
4. Exprimer J_n à l'aide de factoriels.

Partie II

On pose $K_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t\,dt$ et $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1.a Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$K_{n+1} - K_n = \frac{-1}{2n+1}K_{n+1} - \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n+1} t\,dt$$

1.b En déduire :

$$K_{n+1}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) - K_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)}J_{n+1}$$

puis :

$$\frac{K_{n+1}}{J_{n+1}} - \frac{K_n}{J_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}.$$

1.c En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de S_n en fonction de $\frac{K_n}{J_n}$ et de $\frac{K_0}{J_0}$.

2.a Expliquer rapidement pourquoi, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

2.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4}(J_n - J_{n+1}) = \frac{\pi^2 J_n}{8(n+1)}$

2.c Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n$.

3. On pose $S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$.

3.a Exprimer S'_{2n+1} en fonction de S_n et de S_{2n+1}.

3.b Montrer que $\lim_{n\to\infty} S'_n = \frac{\pi^2}{12}$.

Etude d'une fonction définie par une intégrale

Soit α un réel supérieur ou égal à un

On définit une application $F_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $F_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}dt}{1+tx}$.

Partie I

1.a Montrer que l'intégrale définissant $F_\alpha(x)$ est bien définie.

1.b Calculer $F_1(x)$ et $F_2(x)$

1.c Montrer que F_α est décroissante

2.a Montrer que l'application $x \mapsto F_\alpha(x)$ est continue en 0.

2.b Etablir, pour $x > 0$, $\left|\frac{1}{x}(F_\alpha(x) - F_\alpha(0)) + \int_0^1 t^\alpha dt\right| \leq \frac{x}{\alpha+2}$.

En déduire que F_α est dérivable en 0 et donner $F_\alpha'(0)$.

3.a Pour $x > 0$, établir $F_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\int_0^x \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du$.

3.b En déduire que F_α est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $F_\alpha'(x)$.

4. Pour $\alpha > 1$, établir $0 \leq F_\alpha(x) \leq \frac{1}{x(\alpha-1)}$.