

Commande linéaire des systèmes multivariables

Benoît Bergeon
Professeur

2014-2015

<i>Commande linéaire des systèmes multivariables.....</i>	<i>1</i>
Chapitre 1 : Commande Linéaire Quadratique.....	1
1 Introduction.....	1
2 La Commande L.Q.....	2
2.1 Formulation du problème de commande à retour d'état.....	2
2.2 Le critère d'optimalité L.Q.....	3
2.3 Gestion des objectifs et spécification des matrices de pondération.....	4
3 La solution du problème L.Q stationnaire.....	6
4 La matrice HAMILTONIENNE et la solution de l'équation de Riccati.....	9
5 Stabilité de la boucle fermée.....	11
<i>Chapitre 2 : Commande Linéaire Quadratique Gaussienne.....</i>	<i>13</i>
1 Problème de commande stochastique à retour de sortie.....	13
2 Observateur d'état et principe de séparation	14
3 L'observateur optimal de Kalman.....	17
4 Solution du problème L.Q.G.....	21
Annexe.....	23
<i>Chapitre 3: De la commande à modèle interne au système augmenté.....</i>	<i>25</i>
1 Introduction.....	25
2 Le modèle interne de Francis et Wonham.....	27
2.1 Le principe du modèle interne.....	27
2.2 Représentation générale.....	28
2.3 Spécifications.....	30
2.4 Détectabilité.....	31
2.5 Le modèle interne.....	32
3 Commandes LQG sur modèle augmenté.....	38
3.1 Rappels.....	39
3.2 LQG à modèle interne.....	40
3.3 Bruit coloré.....	43
4 Le problème standard.....	45
<i>Chapitre 4 : Commande Robuste monovariante : Aspects fréquentiels.....</i>	<i>47</i>
1 Robustesse et désensibilisation.....	47
2 Description des incertitudes.....	48
2.1 Origine des erreurs de modèle.....	49
2.2 Structuration d'incertitudes.....	49
2.3 Représentations d'incertitudes	50
3 Description de performances.....	52
3.1 Stabilité de la boucle fermée.....	52
3.2 Régulation.....	54
3.3 Compromis performances / robustesse.....	55
3.4 Conclusion.....	57
<i>Chapitre 5 : Systèmes Linéaires Multivariables, représentations et quelques propriétés.....</i>	<i>59</i>
1 Représentation d'état et matrice de transfert.....	59
2 Système bouclé par retour dynamique de sortie.....	61
3 Définitions générales des L.F.T.....	62
3.1 L.F.T Supérieure (Fu).....	62
3.2 L.F.T Inférieure (FI).....	63
4 Représentation par matrice de système.....	63

5 Les zéros de systèmes multivariables.....	64
6 Théorème de Nyquist généralisé.....	66
7 Critère de Nyquist multivariable.....	66
<i>Chapitre 6 : Représentations fréquentielles des systèmes multivariables.....</i>	<i>69</i>
1 Les valeurs singulières de matrices.....	69
2 Décomposition d'une matrice en valeurs singulières.....	69
3 Propriétés des valeurs singulières.....	70
4 Normes H2 et H de matrices de transfert.....	71
4.1 Rappels sur la norme L2.....	71
4.2 Transmission de signaux aléatoires.....	71
4.3 Les gains principaux de matrices de transfert.....	73
4.4 Les normes de matrices de transfert.....	73
4.5 Interprétation fréquentielle de LQG.....	74
5 Calcul de norme H	76
6 Théorème du faible gain (Zames 1981).....	77
7 Description d'incertitudes non structurées multivariables	78
8 Théorème de stabilité robuste.....	79
<i>Chapitre 7 : Synthèse multivariable robuste, minimisation de sensibilité mixte.....</i>	<i>83</i>
1 Optimisation L2 et modelage de transfert de boucle (Loop Shaping).....	83
2 La spécification de performance.....	87
3 La contrainte de stabilité robuste.....	88
4 La contrainte sur la commande.....	88
5 Le système augmenté : problème standard.....	89
6 La spécification H	90
7 Matrices de transfert premières.....	91
7.1 Définitions.....	91
7.2 Théorèmes.....	91
8 L'algorithme de Glover-Doyle.....	96
<i>Chapitre 8 : Synthèse multi-objectifs.....</i>	<i>99</i>
1 Les valeurs singulières structurées.....	99
2 Théorème de stabilité robuste structurée.....	100
3 Le problème de performance robuste.....	102
3.1 Performance nominale.....	102
3.2 Performance robuste.....	103
4 Calcul de , D-K itérations.....	105

Chapitre 1 : Commande Linéaire Quadratique

Bibliographie :

KWAKERNAAK – SIVAN : *Linear optimal control system*, Wiley, 1972

KAILATH : *Linear systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1979

ASTRÖM – WITTENMARK : *Computer controlled systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984.

de LARMINAT : *Automatique, commande des systèmes linéaires*, Hermès, 1993.

1 Introduction

La commande Linéaire Quadratique est présentée dans ce chapitre sur les systèmes dynamiques à temps continu:

- (i) linéaires,
- (ii) à coefficients constants.
- (iii) stabilisables par retour d'état.

Un système linéaire est stabilisable s'il existe une commande en boucle fermée telle que le système commandé soit stable. Si la commande utilise un retour d'état, il suffit que les éventuels modes instables du système soient gouvernables (commandables).

D'une façon générale, la commande en boucle fermée cherche à répondre à des objectifs de

- (i) stabilité : retour à l'état d'équilibre après une perturbation ;
- (ii) performance de régulation : rejet d'une perturbation, ainsi que la rapidité du rejet. En termes de performances, il s'agit donc de déplacer les valeurs propres de la boucle fermée dans le demi-plan complexe gauche, le plus loin possible de l'axe imaginaire.

Exemple :

Soit le système scalaire :

$$\dot{x} = ax ; x(0) \neq 0 \quad 1-1$$

La solution de ce système scalaire est :

$$\forall t \geq 0 ; x(t) = e^{at} x(0) \quad 1-2$$

Le système est stable si $a < 0$ et la solution est d'autant plus rapide que $|a|$ est grand.

Les contraintes de la régulation se situent au niveau de l'amplitude ou de l'énergie de la commande : soit à cause de saturations d'actionneurs, soit pour des raisons de coût énergétique.

Finalement, le problème de la régulation en boucle fermée, avec stabilité, est toujours le résultat d'un compromis entre la rapidité et l'énergie de la commande.

2 La Commande L.Q

2.1 Formulation du problème de commande à retour d'état

Soit le système à régler décrit par le modèle d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ z(t) &= C x(t) \end{aligned} \quad 1-3$$

- $x(t)$: vecteur d'état, $\dim x(t) = n \times 1$
- $u(t)$: vecteur de commande de dimension : $l \times 1$, où l est le nombre d'actionneurs.
- $z(t)$: vecteur des grandeurs à régler, $\dim z(t) = m \times 1$
- A : matrice d'état du système, $\dim A = n \times n$
- B : matrice de commande, $\dim B = n \times l$

Le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal au sens du compromis rapidité-énergie de commande. Il s'agit donc de trouver la matrice de gain du retour d'état K :

$$u(t) = -K x(t) \quad 1-4$$

avec : $\dim K = l \times n \quad 1-5$

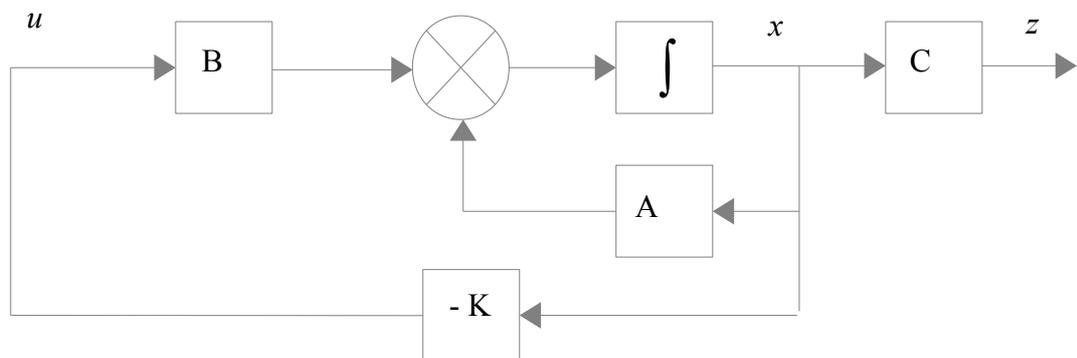


Figure11- 1 schéma-bloc de commande à retour d'état.

En boucle fermée, l'équation d'état devient, après calcul de K :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{bf}(t) &= [A - B K] x_{bf}(t) \\ z(t) &= C x_{bf}(t) \end{aligned} \quad 1-6$$

Les conditions initiales sont rejetées d'autant plus rapidement que les valeurs propres de la matrice $(A - B K)$, ont une partie réelle très négative. Les « gains » de la matrice K seront d'autant plus grands que l'on désire accélérer le rejet de perturbation.

2.2 Le critère d'optimalité L.Q

2.2-1 Vitesse de rejet de perturbation

Soient 2 systèmes monovariabiles du 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ x_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad 1-7$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad 1-8$$

Les solutions sont respectivement :

$$x_1(t) = e^{-t}, \forall t \geq 0 ; \quad 1-9$$

et

$$x_2(t) = e^{-2t}, \forall t \geq 0 \quad 1-10$$

On peut évaluer les rapidités respectives en comparant les aires des courbes $x_i^2(t)$:

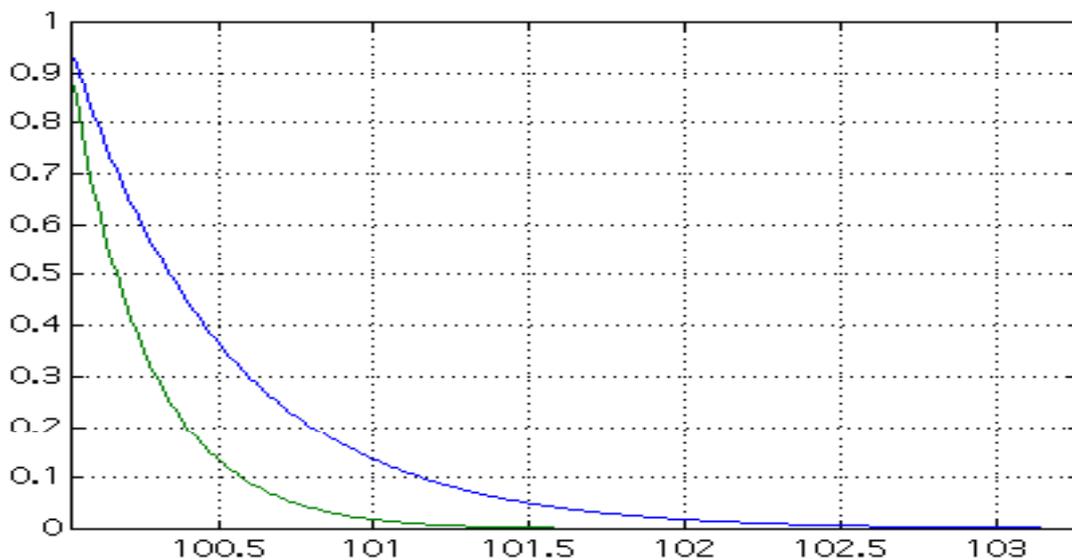


Figure 1-2: comparaison d'aires.

On constate aisément que $\int_0^{\infty} x_1^2(t) dt > \int_0^{\infty} x_2^2(t) dt$, si bien qu'on peut dire qu'un objectif de rapidité de rejet de perturbation est respecté par la minimisation de :

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad 1-11$$

Généralisation à un problème multivariable.

Soit :

$$J_x = \int_0^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt$$

1- 12

Q : est une matrice symétrique définie non négative: $x^T Q x \geq 0$

C'est une matrice de pondération : elle donne un poids différent à chaque composante du vecteur d'état dans le critère.

Exemple :

$$\text{Soient : } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T Q x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2$$

si on prend : $q_1 = 1$ et $q_2 = 1000$

il vient : $x^T Q x = x_1^2 + 1000 x_2^2$

le critère s'écrit alors :

$$J_x = \int_0^{\infty} x^T(t) Q x(t) dt = \int_0^{\infty} [x_1^2 + 1000 x_2^2] dt$$

2.2-2 Energie de commande

De la même façon on peut évaluer l'énergie de commande par le critère :

$$J_u = \int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt$$

1- 13

R est une matrice symétrique définie positive : $u^T(t) R u(t) > 0$, si $u(t) \neq 0$. C'est la matrice de pondération de la commande. On peut ainsi affecter un poids différent à chaque composante du vecteur de commande.

2.2-3 Critère de compromis

$$J_{LQ} = J_x + J_u = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

1- 14

Dans ce critère, les matrices Q et R doivent être spécifiées : les performances de la commande dépendent fortement des valeurs numériques des coefficients de ces matrices.

2.3 Gestion des objectifs et spécification des matrices de pondération

En général, les objectifs de performance portent sur certaines combinaisons linéaires de l'état, qui sont regroupées dans un vecteur de sorties à régler.

La dimension de $z(t)$ est : $m \times 1$, avec : $m \leq n \Rightarrow \dim(C) = m \times n$

Soit $Q = C^T S C$

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} x^T(t) C^T S C x(t) dt + \int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt \quad 1-15$$

$$\Rightarrow z^T(t) S z(t) = x^T(t) C^T S C x(t) \quad 1-16$$

Le problème est ramené au choix de la matrice S

Si on choisit cette matrice diagonale, il y a m coefficients à choisir.

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & s_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & s_i & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & s_m \end{bmatrix} \quad 1-17$$

Pour que S soit non négative, il faut que tous les s_i soient positifs ou nuls.

La matrice R est la matrice de pondération des commandes. On pose : $R = \rho R'$, où ρ est un réel positif.

ρ est un paramètre de Lagrange qui sert à régler le poids relatif de R par rapport à Q . On peut alors choisir la matrice R' diagonale, en posant :

$$R' = \begin{bmatrix} r'_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & r'_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & r'_i & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & r'_m \end{bmatrix} \quad 1-18$$

On commence par choisir les différents r'_i qui pondèrent les énergies de commande des différents actionneurs.

$$R = \rho \begin{bmatrix} r'_1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & r'_2 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & r'_i & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & r'_m \end{bmatrix} \quad 1-19$$

$$\int_0^{\infty} u^T(t) R u(t) dt = \rho \int_0^{\infty} u^T(t) R' u(t) dt \quad 1-20$$

Le critère optimal linéaire quadratique s'écrit finalement :

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} z^T(t) S z(t) dt + \rho \int_0^{\infty} u^T(t) R' u(t) dt \quad 1-21$$

Le problème est de choisir ρ

- si ρ croît la part relative du critère $\rho \int_0^{\infty} u^T(t) R' u(t) dt$ croît : l'objectif est d'économiser l'énergie de commande,

- si ρ décroît le terme $\int_0^{\infty} z^T(t) S z(t) dt$ prend plus d'importance : l'objectif est d'accroître les performances.

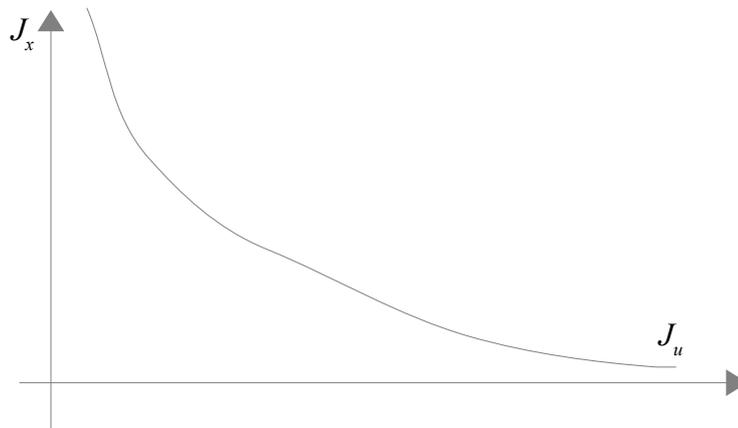


Figure 1- 3: parts relatives des critères de performance J_x et d'énergie de commande J_u , selon la valeur de ρ

3 La solution du problème L.Q stationnaire.

Soit le système linéaire invariant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad 1-22$$

Le problème est de calculer la matrice K qui permet de déterminer le retour d'état : $u(t) = -Kx(t)$, et telle que le critère L.Q:

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} ([x^T(t) Q x(t)] + [u^T(t) R u(t)]) dt \quad 1-23$$

soit minimum. Q est une matrice symétrique définie non négative, R est une matrice symétrique définie positive.

Soit $u^0(t)$ la commande optimale, solution du problème. Toute commande $u(t)$ peut s'écrire :

$$u(t) = u^0(t) + \epsilon \tilde{u}(t); \epsilon \in \mathbb{R} \quad 1-24$$

Le système est linéaire donc il vérifie le théorème de superposition :

$$x(t) = x^\circ(t) + \epsilon \tilde{x}(t); \epsilon \in \mathbb{R} \quad 1-25$$

où $x^\circ(t)$ est la solution optimale du système (c'est la trajectoire d'état obtenue lorsque l'on applique la commande optimale).

$$\dot{x}^\circ(t) = Ax^\circ(t) + Bu^\circ(t) \quad 1-26$$

Ce qui nous permet d'écrire de la même manière :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \quad 1-27$$

On suppose $x(0) \neq 0$ (état initial indépendant de $u(t)$; $t \geq 0$), donc $x(0) = x^\circ(0)$ et $\tilde{x}(0) = 0$.

Pour $t \geq 0$, la solution s'écrit :

$$x^\circ(t) = e^{At} x^\circ(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u^\circ(\tau) d\tau \quad 1-28$$

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \tilde{u}(\tau) d\tau \quad 1-29$$

donc :

$$J_{LQ} = \int_0^\infty [x^\circ(t) + \epsilon \tilde{x}(t)]^T Q [x^\circ(t) + \epsilon \tilde{x}(t)] dt + \int_0^\infty [u^\circ(t) + \epsilon \tilde{u}(t)]^T R [u^\circ(t) + \epsilon \tilde{u}(t)] dt \quad 1-30$$

$$\begin{aligned} J_{LQ} &= \int_0^\infty [x^{\circ T}(t) Q x^\circ(t) + u^{\circ T}(t) R u^\circ(t)] dt \\ &+ 2\epsilon \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t) Q x^\circ(t) + \tilde{u}^T(t) R u^\circ(t)] dt \\ &+ \epsilon^2 \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t) R \tilde{u}(t)] dt \end{aligned} \quad 1-31$$

si $u^\circ(t)$ est la commande qui minimise J_{LQ} , toute autre commande conduit à augmenter la valeur de J_{LQ} .

La commande s'écrivant : $u(t) = u^\circ(t) + \epsilon \tilde{u}(t)$, le minimum du critère J_{LQ} se trouve en $\epsilon = 0$.

Il faut donc résoudre :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} J_{LQ}(\epsilon=0) = 0$$

c'est-à-dire:

$$2 \int_0^{\infty} [\tilde{x}^T(t) Q x^\circ(t) + \tilde{u}^T(t) R u^\circ(t)] dt = 0 \quad 1-32$$

donc :

$$\int_0^{\infty} \left\{ \left[\int_0^t \tilde{u}^T(\tau) B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \right] Q x^\circ(t) + \tilde{u}^T(t) R u^\circ(t) \right\} dt = 0 \quad 1-33$$

après calcul (permutation d'intégrales), on obtient :

$$\int_0^{\infty} \tilde{u}^T(t) \left\{ B^T \int_t^{\infty} e^{A^T(\tau-t)} Q x^\circ(\tau) d\tau + R u^\circ(t) \right\} dt = 0 \quad 1-34$$

on définit alors :

$$p(t) = \int_t^{\infty} e^{A^T(\tau-t)} Q x^\circ(\tau) d\tau \quad 1-35$$

$p(t)$ est donc un vecteur de dimension : $n \times 1$, défini par une intégrale de convolution. Ce vecteur peut donc être considéré comme un vecteur d'état d'un système dynamique dont l'équation d'évolution serait :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -A^T p(t) - Q x^\circ(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= 0 \end{aligned} \quad 1-36$$

L'équation 1-34 devient

$$\int_0^{\infty} \tilde{u}^T(t) \{ B^T p(t) + R u^\circ(t) \} dt = 0 \quad 1-37$$

qui doit être vérifiée quel que soit $\tilde{u}^T(t)$ à tout instant $t \geq 0$, c'est-à-dire :

$$B^T p(t) + R u^\circ(t) = 0, \forall t > 0 \quad 1-38$$

Finalement on obtient :

$$u^\circ(t) = -R^{-1} B^T p(t) \quad 1-39$$

On a introduit le vecteur $p(t)$ comme vecteur d'état d'un système fictif de dimension n . On peut définir **un vecteur d'état étendu** :

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x^\circ(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad 1-40$$

Les équations 1-26 et 1-36 s'écrivent

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \xi(t) = \Sigma \xi(t) \quad 1-41$$

Σ est une matrice de dimension $2n \times 2n$, et qui est de structure HAMILTONIENNE
La commande optimale cherchée est une commande à retour d'état $u(t) = -K x(t)$, vérifiant l'équation 1-39.

Il reste donc à calculer une matrice constante P , telle que :

$$\begin{aligned} p(t) &= P x^\circ(t), \\ \dot{p}(t) &= P \dot{x}^\circ(t) \end{aligned} \quad 1-42$$

De l'équation 1-41 on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}^\circ(t) &= A x^\circ(t) - B R^{-1} B^T P x^\circ(t) \\ \dot{p}(t) &= -Q x^\circ(t) - A^T P x^\circ(t) \end{aligned} \quad 1-43$$

Des équations 1-42 et 1-43 on déduit la relation :

$$P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad 1-44$$

connue sous le nom d'**Equation de RICCATI algébrique**.

La matrice P est l'unique solution de cette équation, stabilisant la boucle fermée. Remarque : si $n = l = 1$, on résout en fait une équation du 2nd degré en P :

$$2 P A - \frac{P^2 B^2}{R} + Q = 0 \quad 1-45$$

qui a 2 solutions. Une seule de ces 2 solutions permet d'obtenir une boucle fermée stable.

4 La matrice HAMILTONIENNE et la solution de l'équation de Riccati

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad 1-46$$

R est une matrice symétrique définie positive, donc : $R > 0$ et R^{-1} existe.

est une matrice symétrique définie non négative, donc : $Q \geq 0$

Soit λ une valeur propre et V un vecteur propre associé **à droite** :

$$\Sigma V = \Sigma \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad 1-47$$

avec $\dim v_1 = n \times 1$ $\dim v_2 = n \times 1$

Alors le couple $[-\lambda; (v_2^T, -v_1^T)]$ est un couple de valeur propre et vecteur propre à gauche associé à la matrice Σ , c'est-à-dire:

$$\begin{bmatrix} v_2^T \\ -v_1^T \end{bmatrix} \Sigma = -\lambda \begin{bmatrix} v_2^T \\ -v_1^T \end{bmatrix} \quad 1-48$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} \quad 1-49$$

c.à.d.

$$\begin{aligned} A v_1 - B R^{-1} B^T v_2 &= \lambda v_1 \\ -Q v_1 - A^T v_2 &= \lambda v_2 \end{aligned} \quad 1-50$$

et :

$$\begin{bmatrix} v_2^T \\ -v_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2^T A + v_1^T Q, & -v_2^T B R^{-1} B^T + v_1^T A^T \end{bmatrix} \quad 1-51$$

$$\begin{bmatrix} v_2^T \\ -v_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2^T \lambda, & v_1^T \lambda \end{bmatrix} \quad 1-52$$

Les $2n$ valeurs propres du système Σ sont symétriques 2 à 2 par rapport à l'axe imaginaire (si λ_1 est valeur propre, alors $-\lambda_1$ l'est aussi).

Si aucune des valeurs propres n'est imaginaire pure, il y a n valeurs propres à partie réelle et n valeurs propres à partie réelle > 0 .

Soit Λ la matrice diagonale ($n \times n$) dont les éléments $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres à partie réelle négative.

Soit X une matrice composée des vecteurs propres à droite associés à ces n valeurs propres, X est une matrice de dimension $2n \times n$:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= X \Lambda \\ \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda \end{aligned} \quad 1-53$$

donc

$$\begin{aligned} A X_1 - B R^{-1} B^T X_2 &= X_1 \Lambda \\ -Q X_1 - A^T X_2 &= X_2 \Lambda \end{aligned} \quad 1-54$$

Soit :

$P =: X_2 X_1^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned} -Q - A^T P &= X_2 (X_1^{-1} X_1) \Lambda X_1^{-1} \\ &= P (A X_1 - B R^{-1} B^T X_2) X_1^{-1} \end{aligned} \quad 1-55$$

c'est-à-dire que P vérifie l'équation de Riccati 1-44:

$$P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

5 Stabilité de la boucle fermée

Le système linéaire de l'équation 1-22, auquel on applique la commande à retour d'état décrite aux équations 1-39 et 1-42:

$$\begin{aligned} u^o(t) &= -K x(t) \\ K &= R^{-1} B^T P \end{aligned} \tag{1-56}$$

devient le système dynamique homogène :

$$\dot{x}(t) = (A - B R^{-1} B^T P) x(t) \tag{1-57}$$

qui est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de sa matrice d'évolution sont dans le demi-plan complexe gauche. De l'équation 1-54 on obtient ; :

$$A X_1 - B R^{-1} B^T X_2 = X_1 \Lambda \tag{1-58}$$

Les valeurs propres de la matrice d'évolution de la boucle fermée sont donc les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ de la matrice diagonale Λ . Ces coefficients sont les valeurs propres à partie réelle négative de la matrice hamiltonienne Σ donc le système est stable en boucle fermée.

Remarque :

Dans MATLAB : CONTROL SYSTEM TOOLBOX, après avoir défini les matrices A, B, Q et R, la commande **lqr(A, B, Q, R)** génère le calcul de la matrice K.

Chapitre 2 : Commande Linéaire Quadratique Gaussienne

1 Problème de commande stochastique à retour de sortie

Soit le système de l'équation 1-3 dans lequel on suppose que la sortie et l'état sont perturbés par des bruits (signaux aléatoires gênants). On peut l'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ z(t) &= Cx(t) + w_2(t) \end{aligned} \quad 2-1$$

- $x(t)$: vecteur d'état, $\dim x(t) = n \times 1$
- $u(t)$: vecteur de commande de dimension : $l \times 1$, où l est le nombre d'actionneurs.
- $z(t)$: vecteur des grandeurs à régler, $\dim z(t) = m \times 1$
- $w_1(t)$: vecteur de bruits blancs gaussiens centrés, $\dim w_1(t) = n \times 1$
- $w_2(t)$: vecteur de bruits blancs gaussiens centrés, $\dim w_2(t) = m \times 1$
- A : matrice d'état du système, $\dim A = n \times n$
- B : matrice de commande, $\dim B_1 = n \times l$
- C : matrice d'observation, $\dim C = m \times n$

Un bruit $w(t)$ est un signal aléatoire qui est :

- blanc lorsque sa fonction d'autocorrélation est de la forme :

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = V(t) \delta(t - \tau) \quad 2-2$$

- gaussien si $V(t)$ est une variable aléatoire gaussienne (loi de probabilité normale),
- centré si l'espérance mathématique $E(V(t))$ est nulle.

Le critère d'optimalité doit porter sur une grandeur probabiliste : l'espérance mathématique d'un critère quadratique. Par ailleurs la sortie (vecteur des grandeurs à régler, ou des variables mesurées) est soumise à des perturbations : le rejet ou atténuation de ces bruits ne peut pas être obtenu par retour d'état.

D'un autre côté, il n'est pas toujours possible (voire jamais) de mesurer l'état dont on a besoin pour le retour d'état.

Le critère LQG s'écrit donc :

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \right\} \quad 2-3$$

où Q et R sont symétriques, définies positives.

2 Observateur d'état et principe de séparation

Un observateur d'état (ou reconstruteur) est un filtre dont l'entrée est le vecteur des mesures bruitées de sortie d'un système dynamique, ainsi que le vecteur de ses entrées. La sortie de ce filtre est un vecteur proche du vecteur d'état du système. La connaissance d'un modèle du système dynamique et de ses entrées permet de restituer un état du système à partir des mesures de sortie.

Soit le système déterministe (pas de bruit aléatoire) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad 2-4$$

on peut construire un autre système dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + Le(t) \\ \hat{z}(t) &= C\hat{x}(t) \\ e(t) &= z(t) - \hat{z}(t) \end{aligned} \quad 2-5$$

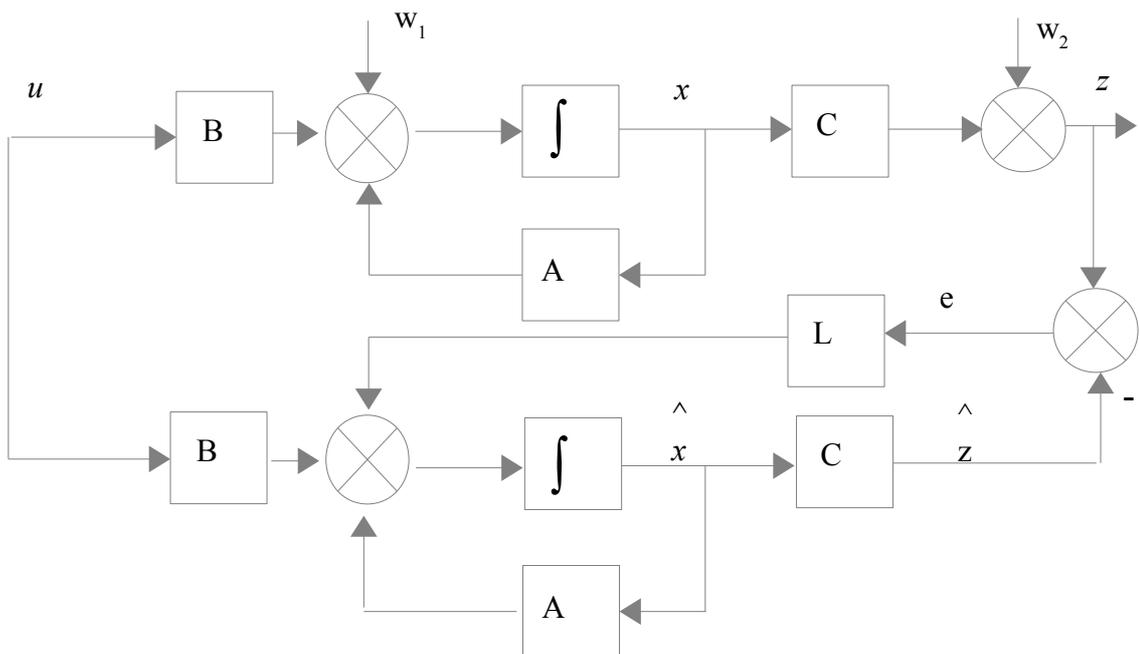


Figure 2- 1 structure d'observateur d'état

On peut calculer l'écart entre les vecteurs d'état :

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \dot{\epsilon}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \end{aligned} \quad 2-6$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - [A\hat{x}(t) + Bu(t) + Le(t)] \\ \dot{\epsilon}(t) &= A[x(t) - \hat{x}(t)] - LC[x(t) - \hat{x}(t)] \\ \dot{\epsilon}(t) &= [A - LC]\epsilon(t)\end{aligned}$$

2- 7

Si les valeurs propres de $A - LC$ sont toutes dans le demi-plan complexe gauche, ce système est asymptotiquement stable et le vecteur d'erreur entre l'état x et l'état \hat{x} tend exponentiellement vers zéro. On a construit un observateur : son état \hat{x} tend exponentiellement vers l'état x du système.

Pour réaliser une commande à retour de sortie, on peut donc utiliser un observateur d'état et effectuer une commande à retour d'état en utilisant l'état observé (état de l'observateur).

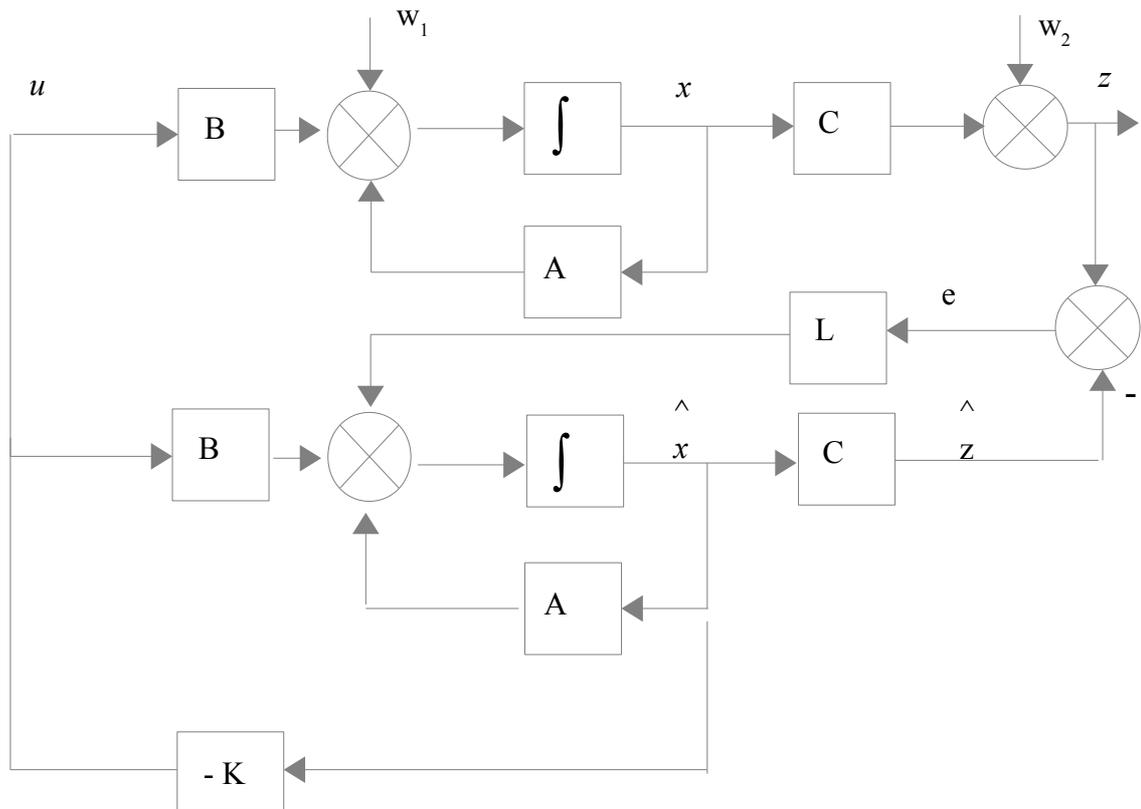


Figure 2- 2 : structure de commande à retour d'état observé

On peut alors écrire les équations d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t) + w_1(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - [BK + LC]\hat{x}(t) + Lw_2(t) + LCx(t)\end{aligned}$$

2- 8

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) - B K [x(t) - \epsilon(t)] + w_1(t) \\ \dot{\epsilon}(t) &= [A - L C] \epsilon(t) + w_1(t) - L w_2(t)\end{aligned}\quad 2-9$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\epsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B K & B K \\ 0 & A - L C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}\quad 2-10$$

La matrice d'évolution est bloc-triangulaire. Ses valeurs propres sont les valeurs propres des blocs de la diagonale : $[A - B K], [A - L C]$. Les dynamiques du retour d'état d'une part, et de l'observateur d'autre part, sont séparées : on peut régler les valeurs propres de la commande par la matrice de retour d'état K , de façon indépendante des valeurs propres de l'observateur que l'on règle par le choix de la matrice L . C'est le **principe de séparation**.

Le critère LQG de la relation (2-3) s'écrit :

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \right\}$$

De l'équation 2-6 on déduit

$$x = \hat{x} + \epsilon$$

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [(\hat{x} + \epsilon)^T Q (\hat{x} + \epsilon) + u^T R u] dt \right\}$$

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u] dt \right\} + 2 E \left\{ \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \epsilon] dt \right\} + E \left\{ \int_0^{\infty} [\epsilon^T Q \epsilon] dt \right\}\quad 2-11$$

Comme \hat{x} n'est pas aléatoire, il vient :

$$J_{LQG} = \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u] dt + 2 \int_0^{\infty} [\hat{x}^T Q E\{\epsilon\}] dt + E \left\{ \int_0^{\infty} [\epsilon^T Q \epsilon] dt \right\}\quad 2-12$$

et donc si $E\{\epsilon\} = 0$ (c'est une variable aléatoire centrée), il vient :

$$J_{LQG} = J_{LQ} + E \left\{ \int_0^{\infty} [\epsilon^T Q \epsilon] dt \right\}\quad 2-13$$

où J_{LQ} est un critère de type LQ, portant sur l'état \hat{x} de l'observateur.

L'observateur devra donc être conçu pour que la quantité $E\left\{\int_0^{\infty} [\epsilon^T Q \epsilon] dt\right\}$ soit la plus petite possible.

Un tel observateur est un observateur optimal, de Kalman.

3 L'observateur optimal de Kalman

Dans le critère de l'équation 2-13, la matrice Q est symétrique définie positive, donc la quantité $\epsilon^T Q \epsilon$ est une forme quadratique :

$$\epsilon^T Q \epsilon > 0, \forall \epsilon \quad 2-14$$

Le minimum de $E\left\{\int_0^{\infty} [\epsilon^T Q \epsilon] dt\right\}$ est obtenu pour la matrice L telle que la variance $E\{\epsilon^T \epsilon\}$ soit minimum.

Par ailleurs, $\epsilon^T \epsilon$ est le carré scalaire du vecteur ϵ , c'est donc une norme de la matrice $\epsilon \epsilon^T$. En effet :

$$\epsilon^T \epsilon = \sum_i \epsilon_i^2 = tr(\epsilon \epsilon^T)$$

$$tr(\epsilon \epsilon^T) = 0 \Leftrightarrow \sum_i \epsilon_i^2 = 0 \Leftrightarrow \epsilon \epsilon^T = 0 \quad 2-15$$

$$tr(\lambda \epsilon \epsilon^T) = \sum_i \lambda \epsilon_i^2 = \lambda tr(\epsilon \epsilon^T)$$

$$tr(\epsilon_1 \epsilon_1^T + \epsilon_2 \epsilon_2^T) = \sum_i (\epsilon_{1,i}^2 + \epsilon_{2,i}^2) = \sum_i \epsilon_{1,i}^2 + \sum_i \epsilon_{2,i}^2 = tr(\epsilon_1 \epsilon_1^T) + tr(\epsilon_2 \epsilon_2^T)$$

La matrice L qui minimise la variance de l'erreur d'observation minimise n'importe quelle norme de la matrice $E\{\epsilon \epsilon^T\}$.

De l'équation 2-1 et 2-2 reproduites ici,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ z(t) &= Cx(t) + w_2(t) \end{aligned}, \quad \Phi_{ww}(t, \tau) = V(t) \delta(t - \tau)$$

on déduit, en utilisant la définition de la fonction d'autocorrélation :

$$\Phi_{ww}(t, \tau) = E\{w(t)w^T(\tau)\} = V(t) \delta(t - \tau)$$

soit en formant le vecteur $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$, dans lequel on suppose que les bruits $w_1(t)$ et $w_2(t)$ sont indépendants et stationnaires, on obtient :

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad 2-16$$

La matrice $V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ est une matrice de variance-covariance, constante, dans laquelle les matrices V_1 et V_2 sont **symétriques définies positives**.

Les conditions initiales du système ne sont pas connues : $x(0)$ est un vecteur aléatoire, que l'on caractérise par :

son espérance mathématique $E\{x(0)\} = \bar{x}_0$,

sa matrice de variance-covariance $E\{[x(0) - \bar{x}_0][x(0) - \bar{x}_0]^T\} = Q_0$

De l'équation (2-9) on tire :

$$\dot{\epsilon}(t) = [A - LC]\epsilon(t) + [I; -L] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \quad 2-17$$

avec la condition initiale : $\epsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$.

Le vecteur $\hat{x}(0)$ représente la condition initiale de l'observateur : c'est un vecteur que l'utilisateur doit déterminer pour régler l'observateur. L'erreur d'observation $\epsilon(t)$ est un vecteur aléatoire de caractéristiques :

$$\begin{aligned} E\{\epsilon(t)\} &= \bar{\epsilon}(t) \\ \epsilon(t) &= \bar{\epsilon}(t) + \tilde{\epsilon}(t) \\ E\{\tilde{\epsilon}(t)\} &= 0 \\ E\{\tilde{\epsilon}(t)\tilde{\epsilon}^T(t)\} &= \tilde{Q}(t) \\ E\{\epsilon(t)\epsilon^T(t)\} &= \bar{\epsilon}(t)\bar{\epsilon}^T(t) + \tilde{Q}(t) \end{aligned} \quad 2-18$$

Le minimum d'une norme de cette matrice de covariance est obtenu si les 2 termes (qui sont positifs) sont minimums. Pour le premier, on cherche :

$$\bar{\epsilon}(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad 2-19$$

Or, puisque les bruits w_1 et w_2 sont centrés :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\epsilon}}(t) &= [A - LC] \bar{\epsilon}(t), \\ \dot{\tilde{\epsilon}}(t) &= [A - LC] \tilde{\epsilon}(t) + [I; -L] \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad 2-20$$

A chaque instant $t > 0$:

$$\bar{\epsilon}(t) = e^{[A-LC]t} \bar{\epsilon}(0) \quad 2-21$$

il faut et il suffit donc que :

$$\bar{\epsilon}(0) = 0, \hat{x}(0) = \bar{x}_0 \quad 2-22$$

L'état initial de l'observateur doit donc être réglé sur l'espérance mathématique de l'état initial du système.

Il reste à trouver la matrice L qui minimise une norme de $\tilde{Q}(t) = E\{\tilde{\epsilon}(t)\tilde{\epsilon}^T(t)\}$.

Soient :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A - LC \\ \tilde{B} &= [I; -L] \\ w(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\epsilon}} &= \tilde{A} \tilde{\epsilon} + \tilde{B} w \\ \dot{\tilde{\epsilon}}^T &= \tilde{\epsilon}^T \tilde{A}^T + w^T \tilde{B}^T\end{aligned}\quad 2-23$$

On peut calculer à chaque instant :

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}(t) &= e^{\tilde{A}t} \tilde{\epsilon}(0) + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)} \tilde{B} w(\tau) d\tau \\ \tilde{\epsilon}^T(t) &= \tilde{\epsilon}^T(0) e^{\tilde{A}^T t} + \int_0^t w^T(\tau) \tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T(t-\tau)} d\tau\end{aligned}\quad 2-24$$

En posant

$$\Phi(t-\tau) = e^{\tilde{A}(t-\tau)} \quad 2-25$$

on peut calculer :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= E\{\Phi(t)\tilde{\epsilon}(0)\tilde{\epsilon}^T(0)\Phi^T(t)\} \\ &+ E\{\Phi(t)\tilde{\epsilon}(0)\int_0^t w^T(\tau)\tilde{B}^T\Phi^T(t-\tau)d\tau\} \\ &+ E\{\int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}w(\tau)d\tau\tilde{\epsilon}^T(0)\Phi^T(t)\} \\ &+ E\{\int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}w(\tau)d\tau\int_0^t w^T(\tau)\tilde{B}^T\Phi^T(t-\tau)d\tau\} \end{aligned} \quad 2-26$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \Phi(t)E\{\tilde{\epsilon}(0)\tilde{\epsilon}^T(0)\}\Phi^T(t) \\ &+ \Phi(t)\int_0^t E\{\tilde{\epsilon}(0)w^T(\tau)\}\tilde{B}^T\Phi^T(t-\tau)d\tau \\ &+ \int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}E\{w(\tau)\tilde{\epsilon}^T(0)\}d\tau\Phi^T(t) \\ &+ E\{\int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}w(\tau)d\tau\int_0^t w^T(\tau)\tilde{B}^T\Phi^T(t-\tau)d\tau\} \end{aligned} \quad 2-27$$

Or, par causalité, l'erreur initiale ne peut être corrélée avec les bruits d'entrée futurs :

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\epsilon}(0)w^T(\tau)\} &= 0 \\ E\{w(\tau)\tilde{\epsilon}^T(0)\} &= 0 \end{aligned} \quad 2-28$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \Phi(t)\tilde{Q}(0)\Phi^T(t) \\ &+ \int_0^t \int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}E\{w(\tau)w^T(\theta)\}\tilde{B}^T\Phi^T(t-\theta)d\theta d\tau \end{aligned} \quad 2-29$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \Phi(t)\tilde{Q}(0)\Phi^T(t) \\ &+ \int_0^t \int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}V\delta(\theta-\tau)\tilde{B}^T\Phi^T(t-\theta)d\theta d\tau \end{aligned} \quad 2-30$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \Phi(t)\tilde{Q}(0)\Phi^T(t) \\ &+ \int_0^t \Phi(t-\tau)\tilde{B}V\tilde{B}^T\Phi^T(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad 2-31$$

Cette relation exprime la solution du système différentiel :

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = \tilde{A}\tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t)\tilde{A}^T + \tilde{B}V\tilde{B}^T \quad 2-32$$

(voir annexe).

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = [A-LC]\tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t)[A-LC]^T + [I; -L] \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -L^T \end{bmatrix} \quad 2-33$$

$$\dot{\tilde{Q}}(t) = [A-LC]\tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t)[A^T - C^T L^T] + V_1 + L V_2 L^T \quad 2-34$$

La solution stationnaire exprime que la variance de l'erreur d'observation est indépendante du temps :

$$0 = [A-LC]\tilde{Q} + \tilde{Q}[A^T - C^T L^T] + V_1 + L V_2 L^T \quad 2-35$$

Si on pose (par analogie avec la commande LQ) :

$$L = \tilde{Q} C^T V_2^{-1} \quad 2-36$$

on obtient une équation de Riccati algébrique :

$$0 = A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + V_1 - \tilde{Q}C^T V_2^{-1} C \tilde{Q} \quad 2-37$$

et la matrice hamiltonienne associée :

$$H = \begin{bmatrix} A^T & C^T V_2^{-1} C \\ V_1 & -A \end{bmatrix} \quad 2-38$$

Un calcul semblable à celui utilisé au chapitre 1 permet donc de calculer la matrice L de l'observateur de Kalman.

4 Solution du problème L.Q.G

La commande optimale à retour de sortie du système défini par les relations 2-1 et 2-16

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t) \\ z(t) &= Cx(t) + w_2(t) \end{aligned}, \quad E\{w(t)w^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

et le critère LQG de la relation 2-3 :

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \right\}$$

est définie par la structure observateur/retour d'état, du schéma de la figure 2-2, dans laquelle on calcule les matrices K et L par les relations 1-44, 1-56, 2-36 et 2-37:

$$P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

$$u^o(t) = -K x(t)$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

$$L = \tilde{Q} C^T V_2^{-1}$$

$$0 = A \tilde{Q} + \tilde{Q} A^T + V_1 - \tilde{Q} C^T V_2^{-1} C \tilde{Q}$$

Remarque :

Dans MATLAB : CONTROL SYSTEM TOOLBOX :

$$[AF, BF, CF, DF] = \text{LQG}(A, B, C, D, W, V), \text{ où } W = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$$

Annexe

Soit :

$$\phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$$

où $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues, et $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont différentiables, alors :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx + f(\beta(t), t) \frac{d}{dt} \beta(t) - f(\alpha(t), t) \frac{d}{dt} \alpha(t)$$

La solution de l'équation d'évolution d'un système :

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} B u(\tau) d\tau,$$

sa dérivée par rapport au temps s'écrit :

$$\dot{x}(t) = a e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t a e^{a(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + e^{a(t-t)} B u(t)$$

c'est-à-dire, si $t_0 \rightarrow t$:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + B u(t)$$

qui est bien l'équation d'évolution correspondante.

Pour trouver une équation d'évolution dont l'équation 2-31 ci-dessus serait la solution, il faut successivement dériver par rapport à t , puis faire tendre t_0 vers t :

$$\tilde{Q}(t) = \Phi(t-t_0) \tilde{Q}(t_0) \Phi^T(t-t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \tilde{B} V \tilde{B}^T \Phi^T(t-\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t-t_0) \tilde{Q}(t_0) \Phi^T(t-t_0)] = \tilde{A} \Phi(t-t_0) \tilde{Q}(t_0) \Phi^T(t-t_0) + \Phi(t-t_0) \tilde{Q}(t_0) \Phi^T(t-t_0) \tilde{A}^T$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) \tilde{B} V \tilde{B}^T \Phi^T(t-\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} [\Phi(t-\tau) \tilde{B} V \tilde{B}^T \Phi^T(t-\tau)] d\tau \\ &+ \Phi(t-t) \tilde{B} V \tilde{B}^T \Phi^T(t-t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(t-\tau) &= e^{\tilde{A}(t-\tau)} \\ \frac{d}{dt}\Phi(t-\tau) &= \tilde{A}e^{\tilde{A}(t-\tau)} \\ \Phi(t-t) &= I\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{d}{dt} \tilde{Q}(t) = \tilde{A} \tilde{Q}(t) + \tilde{Q}(t) \tilde{A}^T + \tilde{B} V \tilde{B}^T$$

Chapitre 3: De la commande à modèle interne au système augmenté

1 Introduction

Classiquement, le problème de la commande automatique de systèmes s'est posé en termes de *régulation* et *asservissement*. L'utilisateur final fixe une *consigne* que le système automatisé doit atteindre, malgré la présence de *perturbations* ou bruits divers. Ces objectifs de poursuite de consigne et de rejet de perturbation sont spécifiés dans un cahier des charges soumis au concepteur de la loi de commande.

Le travail de l'automaticien est alors de confronter ce cahier des charges avec le *système physique* dont il doit assurer le contrôle : la première étape consiste à en obtenir un *modèle mathématique* directement utilisable (équation différentielle, fonction ou matrice de transfert, représentation d'état, ...) pour la synthèse du *régulateur* (loi de commande). La démarche générale peut être représentée par le diagramme de la figure 1 ci-dessous.

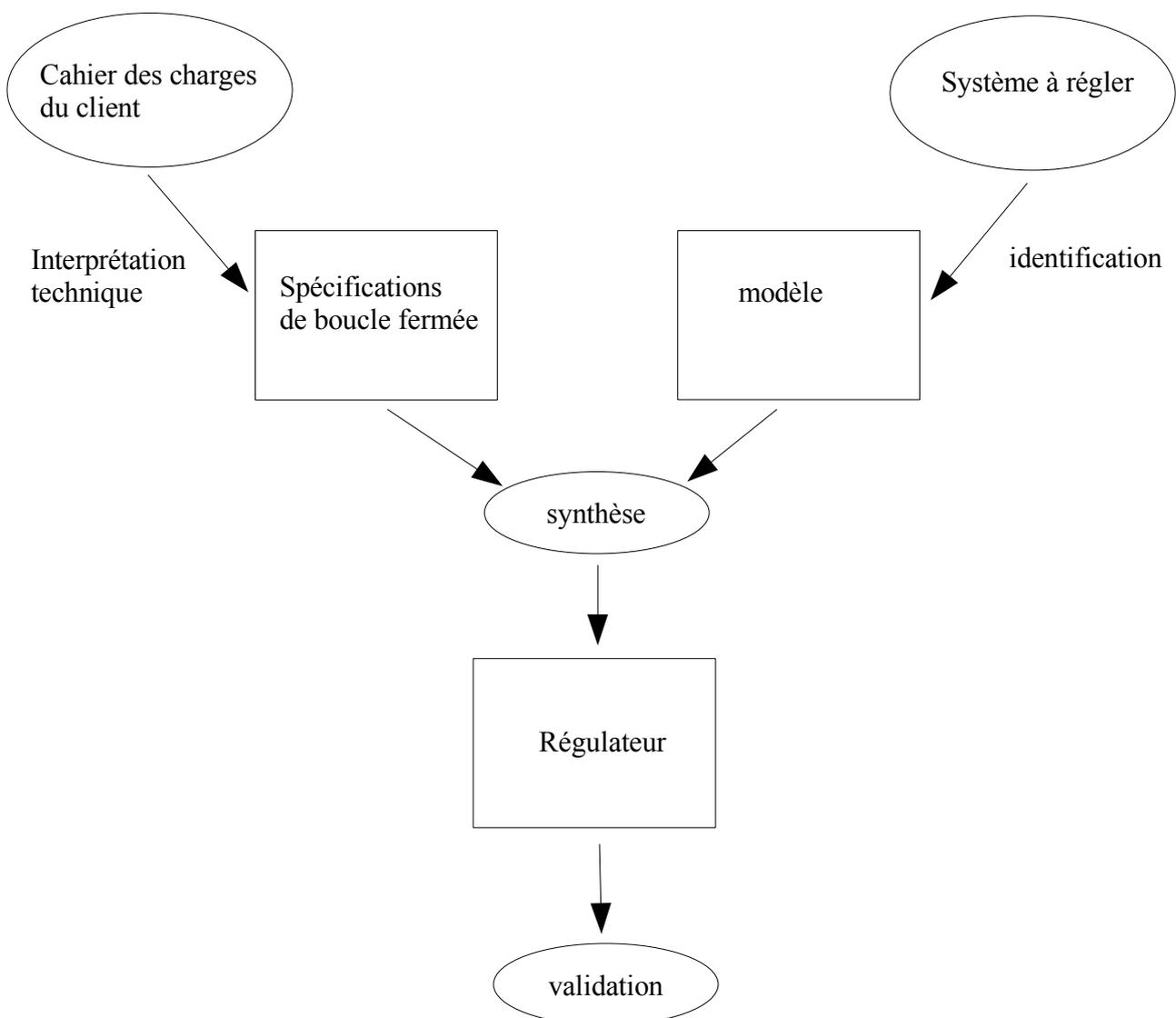


Figure 3-1

Les développements récents des théories de la commande et des outils informatiques de calcul numérique permettent d'automatiser cette démarche, en définissant un *modèle augmenté* comportant un modèle du système à régler, un modèle de son environnement (bruits, perturbations, consignes, ...) ainsi qu'une description opérationnelle des spécifications.

La synthèse du régulateur se met alors sous la forme d'un *problème standard* défini par un critère sur ce modèle augmenté.

Cette démarche se résume par le diagramme de la figure 2.

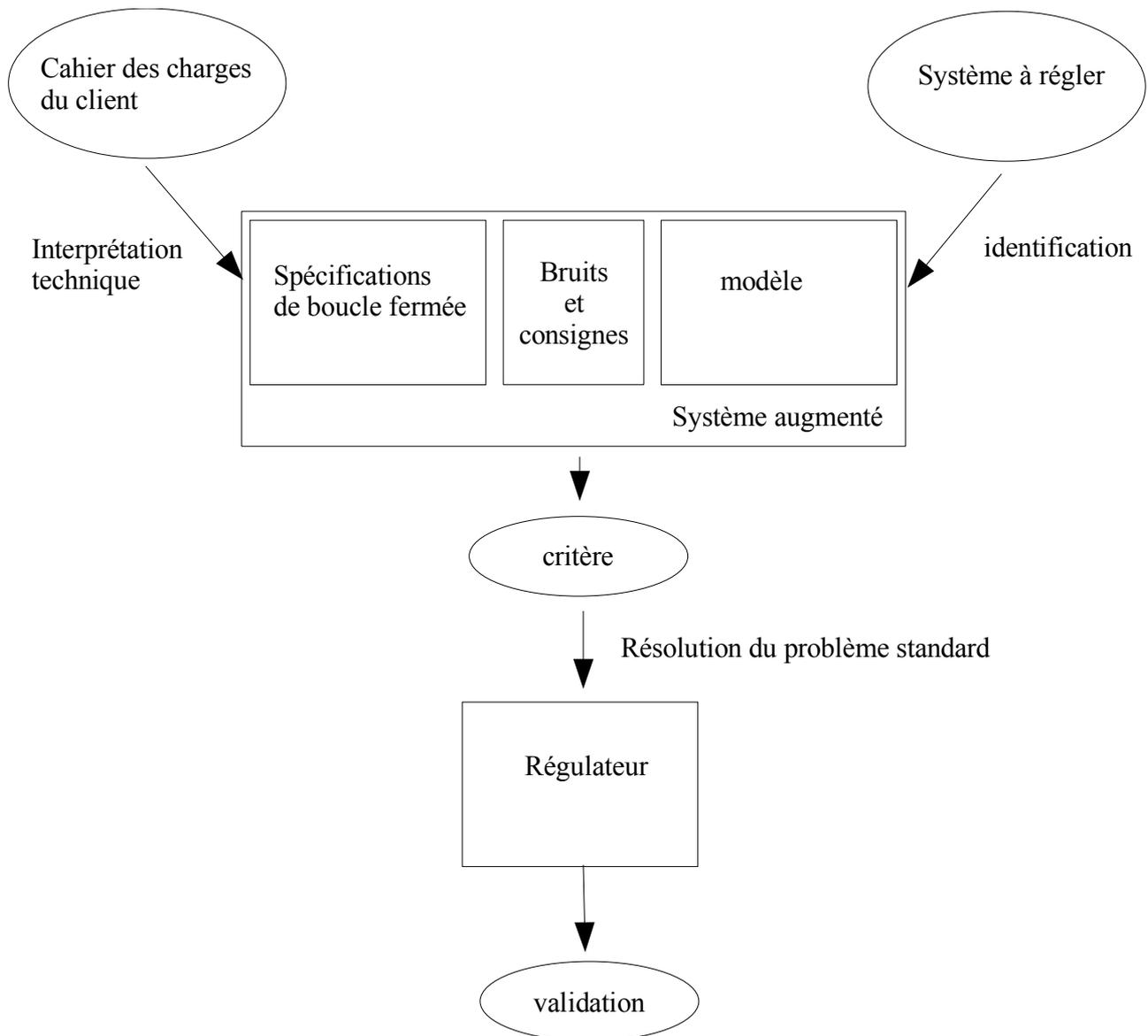


Figure 3-2

La résolution du problème standard se fait par optimisation sous contrainte du critère.

2 Le modèle interne de Francis et Wonham.

Bibliographie:

- The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, Francis & Wonham, *Applied Mathematics & Optimization*, Vol. 2, n° 2, 1975.
- *Linear Multivariable Control, a Geometric Approach*, Wonham, Springer Verlag, New York 1974.

2.1 Le principe du modèle interne.

"Une synthèse de régulateur n'est *structurellement stable* que si le régulateur utilise en feedback les variables régulées et incorpore, dans la boucle fermée, un modèle convenablement recopié de la structure dynamique du signal exogène que le régulateur est censé contrôler."

Exemple élémentaire:

Soit un système linéaire, stationnaire, monovarié (Single Input Single Output) décrit par une fonction de transfert $F(p)$. L'utilisateur désire que l'effet de la présence éventuelle d'une perturbation constante (offset) sur la commande de ce système n'engendre pas d'erreur asymptotique entre la référence et la sortie.

La structure de la commande en boucle fermée est décrite par la figure 3:

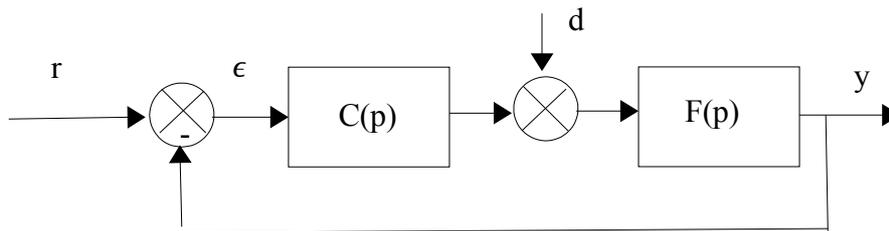


Figure 3-3

La "structure dynamique" de la perturbation est :

$$D(p) = \frac{1}{p}$$

La synthèse est dite "structurellement stable" si et seulement si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$$

Il est bien connu que cette erreur asymptotique est nulle si et seulement si le régulateur $C(p)$ contient (au moins) un intégrateur. Cet intégrateur est le *modèle interne* de la perturbation.

$$C(p) = \frac{1}{p} C'(p), \text{ avec } \lim_{p \rightarrow 0} C'(p) \neq 0.$$

2.2 Représentation générale.

Le système à régler (SAR) est représenté par le modèle d'état à temps continu (mais aussi bien à temps discret ou à temps pseudo-continu) linéaire invariant (Linear Time Invariant, LTI):

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, est le vecteur d'état, comprenant d'une part la partie commandable (stable ou instable) et la partie non commandable stable $x_1 (n_1 \times 1)$ et d'autre part la partie non commandable instable (de la perturbation) $x_2 (n_2 \times 1)$.

L'équation d'évolution s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad 3-1$$

où:

$\delta (n_1 + n_2 \times 1) \in \Delta$ est un vecteur d'impulsions de Dirac (ou bien représente les conditions initiales);

$u_2 (m \times 1) \in U$ est le vecteur des commandes (issu du régulateur);

$x_1 (n_1 \times 1) \in X_1$;

$x_2 (n_2 \times 1) \in X_2$;

L'équation des sorties :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad 3-2$$

où:

$y_1 (p_1 \times 1) \in Y_1$ est le vecteur des variables à régler;

$y_2 (p_2 \times 1) \in Y_2$ est le vecteur des mesures utilisées par le régulateur).

La figure 4 représente le schéma-bloc correspondant:

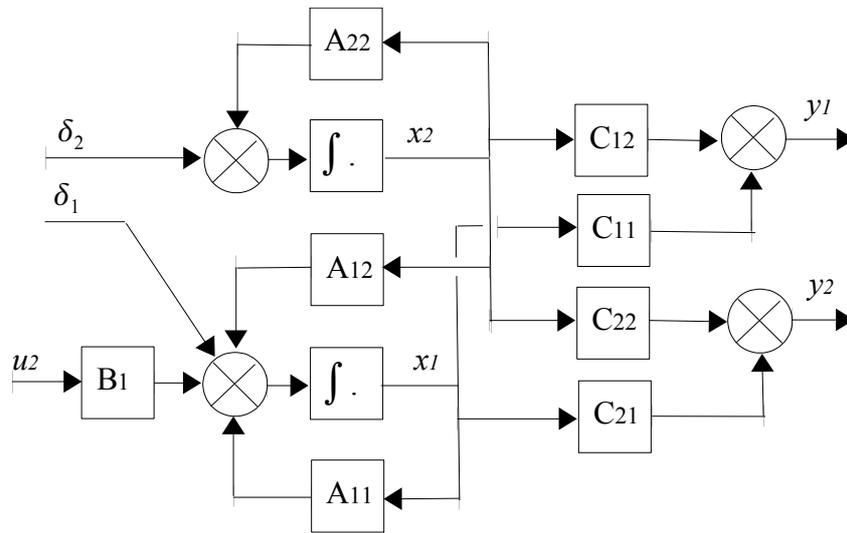


Figure 3-4

Commentaires:

1. Le sous-système dont le vecteur d'état est x_2 représente les dynamiques des entrées exogènes:
 - les signaux de consigne ou références;
 - les signaux de perturbation et bruits d'état, de sortie, de mesure.
2. Le vecteur δ représente des impulsions de Dirac assurant la mise en conditions initiales non nulles.
3. La matrice d'évolution A_{22} de ce système a toutes ses valeurs propres dans le demi-plan fermé droit. Les éventuelles dynamiques stables (asymptotiquement) des signaux exogènes sont incluses dans le système de matrice d'évolutions A_{11} .

Il faut également représenter le régulateur:

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= A_R x_R + B_R y_2 \\ u_2 &= C_R x_R + D_R y_2 \end{aligned} \quad 3-3$$

où:

$$x_R (n_R \times 1) \in X_R \text{ est le vecteur d'état du régulateur.}$$

En boucle fermée, l'état du système commandé est défini par :

$$x_{BF} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_R \end{bmatrix} \in X_{BF} = X_1 \oplus X_R$$

et les équations :

$$\dot{x}_{BF} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 D_R C_{21} & B_1 C_R \\ B_R C_{21} & A_R \end{bmatrix} x_{BF} + \begin{bmatrix} A_{12} + B_1 D_R C_{22} \\ B_R C_{22} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3-4$$

$$y_1 = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 \quad 3-5$$

$$y_2 = C_{21} x_1 + C_{22} x_2 \quad 3-6$$

La figure 3- 5 représente le système bouclé.

2.3 Spécifications.

- Stabilité de la boucle:

$$\forall x_{BF}(0), x_{BF}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \text{ si } x_2(0) = 0. \quad 3-7$$

- Régulation de la sortie:

$$y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0; \forall x_{BF}(0), \forall x_2(0). \quad 3-8$$

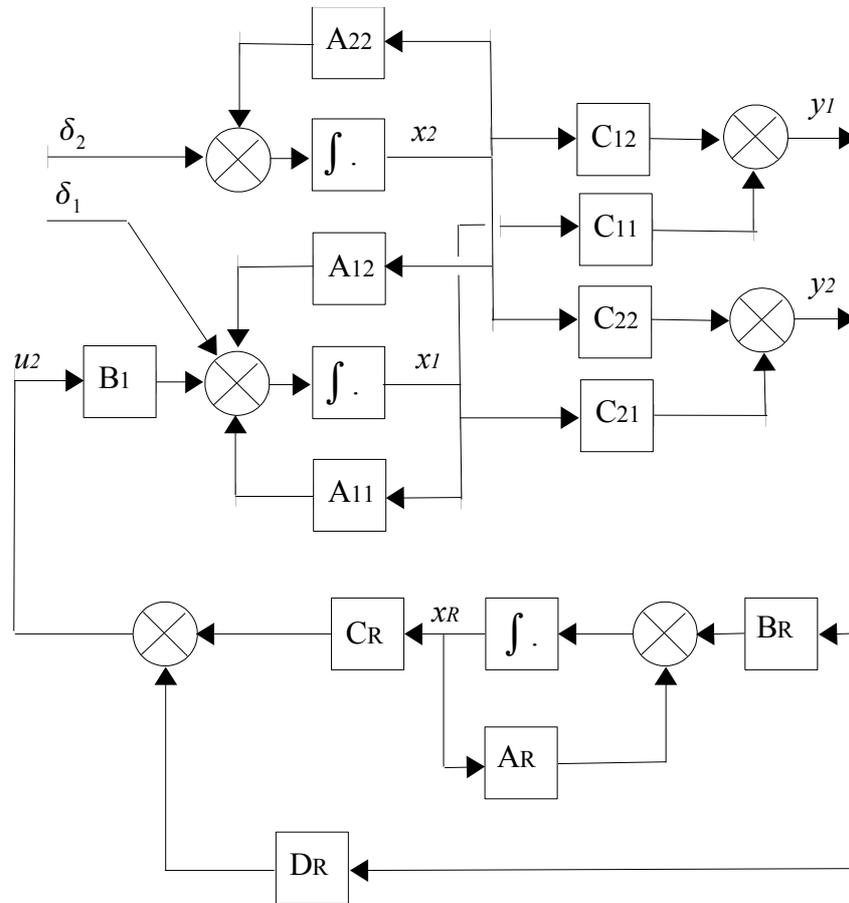


Figure 3-5

2.4 Détectabilité

La spécification de régulation porte sur le vecteur $y_1(t)$, qui contient donc les variables à régler. Les entrées du régulateur sont les sorties des capteurs, contenues dans le vecteur $y_2(t)$ des mesures. Il faut donc s'assurer que ces mesures contiennent les informations nécessaires sur les variables à régler, et en particulier que :

$$y_2(t)=0 \Rightarrow y_1(t)=0 \quad .$$

3-8

Il faut donc:

$$[C_{21} \ C_{22}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [C_{11} \ C_{12}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

c'est à dire:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Ker} [C_{21}, C_{22}] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \text{Ker} [C_{11}, C_{12}]$$

et donc:

$$\text{Ker} [C_{21}, C_{22}] \subset \text{Ker} [C_{11}, C_{12}] \quad 3-9$$

On dit alors que la paire $([C_{21}, C_{22}], [C_{11}, C_{12}])$ est détectable.

Il en résulte qu'il existe une transformation Q telle que:

$$y_1 = Q y_2 \quad .$$

La relation (10) implique que la dimension de y_2 est plus grande que celle de y_1 . ($p_2 \geq p_1$)

Il existe donc un sous-espace W de Y_2 , qui vérifie:

$$Y_2 = Y_1 \oplus W \quad 3-10$$

La transformation Q est donc une projection de Y_2 sur Y_1 , et on peut écrire:

$$[C_{21}, C_{22}] = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \quad 3-11$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} w \\ y_1 \end{bmatrix} \quad 3-12$$

où

$$w = E_1 x_1 + E_2 x_2 \quad . \quad 3-13$$

Il est donc clair que le vecteur des mesures doit contenir les informations sur les variables à régler.

2.5 Le modèle interne.

La figure 6 ci-dessous montre le schéma de synthèse canonique : l'état du régulateur x_R est scindé en 2 parties :

$$x_R = \begin{bmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{bmatrix}$$

Le principe du modèle interne est vérifié si:

- les modes de la perturbation instable (les valeurs propres de A_{22}) sont copiés dans le régulateur, commandables de y_1 et observables de u_2 . Il suffit que ces modes correspondent aux valeurs propres de A_{R2} . La dimension de cette matrice doit être au moins égale à la dimension de y_1 .

Remarque: Il ne s'agit ici que de condition suffisante. Le théorème énonce une condition nécessaire et suffisante plus technique.

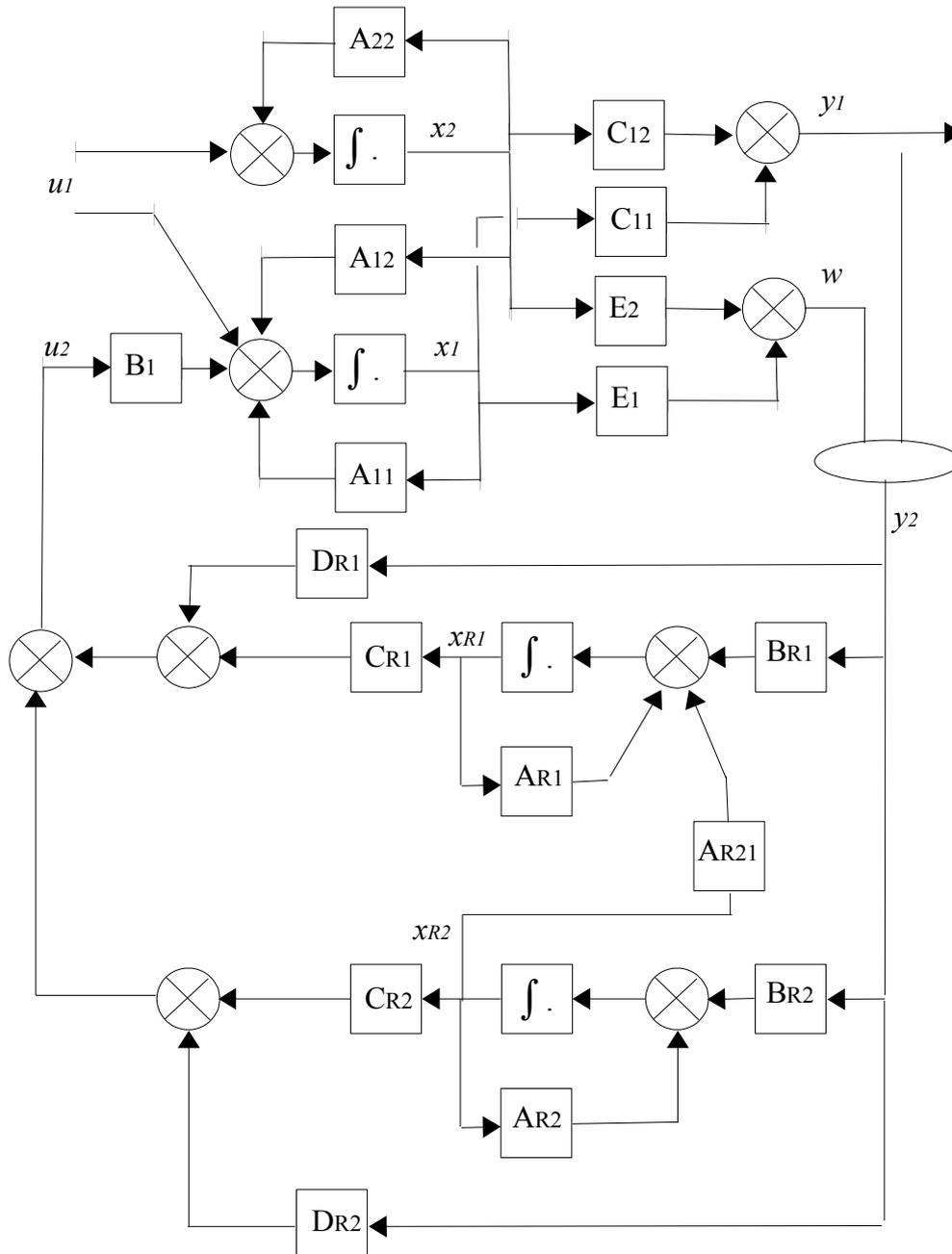


Figure 3-6

Exemple.

Soit le système:

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_2$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

avec $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C_1 = [1, 0]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_2 = [1, 0]$

Le signal $C_2 x_2$ est de la forme $\sin(\omega t)$, de pulsation 1 rad/s mais d'amplitude inconnue (qui dépend de la condition initiale).

L'objectif de commande est d'annuler asymptotiquement le signal $y_1(t)$.

On suppose par ailleurs (dans un premier temps) que l'on peut mesurer l'état x_1 .

On va donc réaliser un système augmenté, comportant un modèle interne du générateur de bruit sinusoïdal, puis calculer la commande optimale LQ sur l'état augmenté.

La figure 3- 7 donne le schéma-bloc.

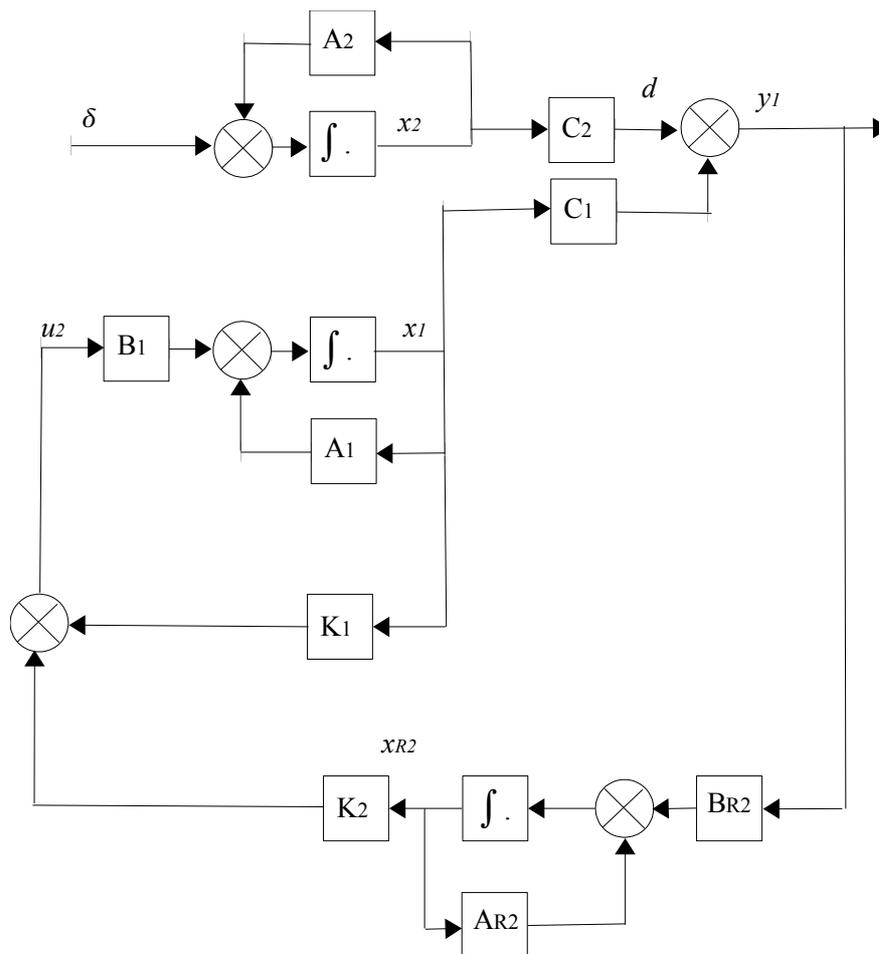


Figure 3-7

Le modèle interne de la perturbation est ici :

$$\dot{x}_{R2} = A_{R2} x_{R2} + B_{R2} y_1, A_{R2} = A_2, B_{R2} = B_2 \quad .$$

Le modèle d'état du système augmenté s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & 0 & 0 \\ [B_{R2} \cdot C_1] & [A_{R2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [u_2]$$

On peut alors se donner le critère LQ sur cet état augmenté:

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} \{ [x_1^T, x_{R2}^T] Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + R u_2^2 \} dt, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 2.$$

Le résultat donne alors les matrices de retour de l'état augmenté:

$$K_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}/2], K_2 = [-0,6933, 0,7207].$$

Les simulations numériques montrent:

1. L'évolution de y_1 :

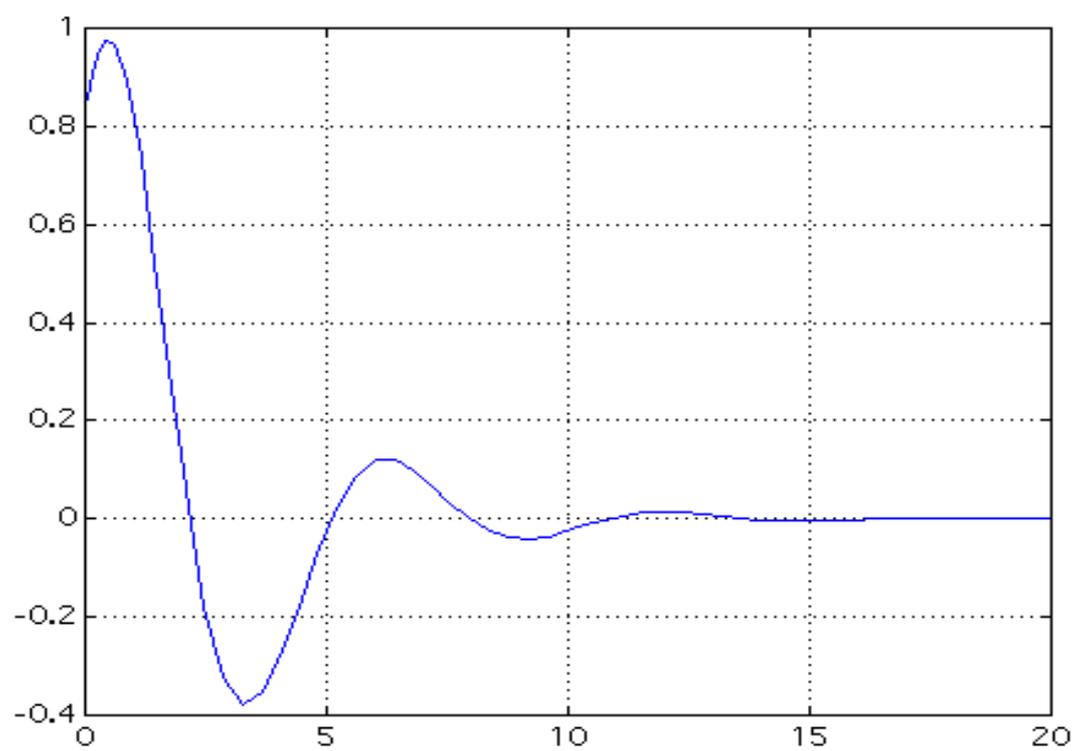


Figure 3-8

2. l'évolution de la commande u_2 :

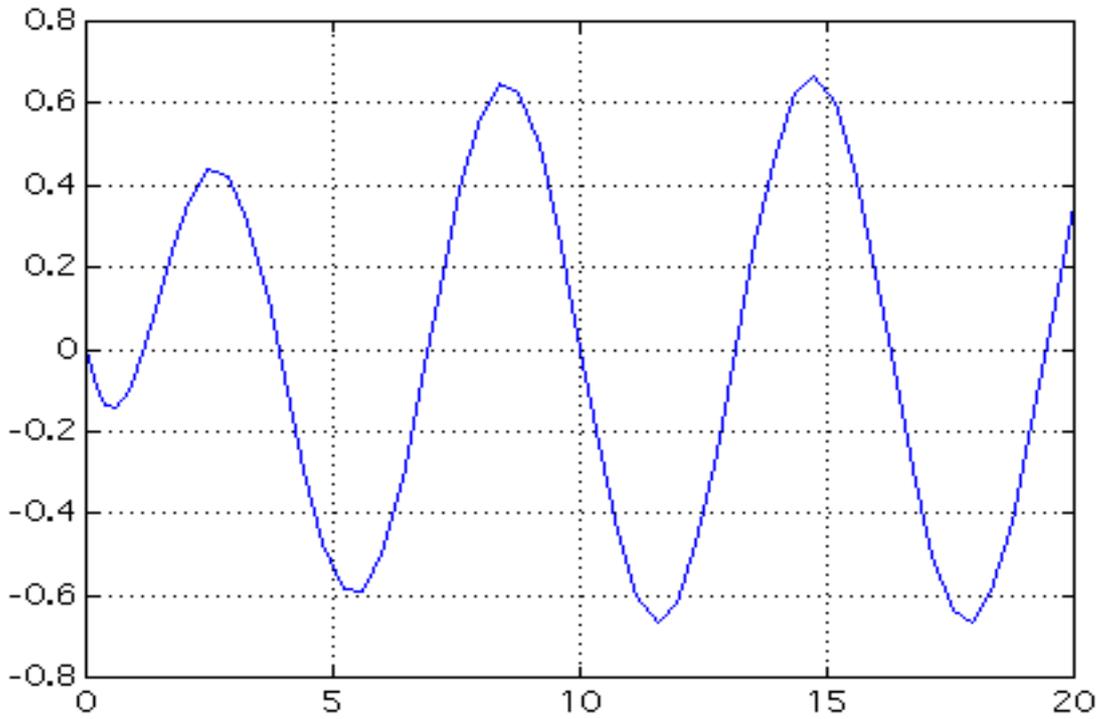


Figure 3-9

Cette dernière figure 9 montre que la commande ne tend pas asymptotiquement vers zéro, mais reproduit un signal sinusoïdal.

On peut également tracer le diagramme de Bode de la boucle fermée entre le signal de bruit d et la sortie y_1 . On constate un "trou" dans cette réponse fréquentielle à la pulsation 1 rad/s, pulsation correspondant au bruit à rejeter.

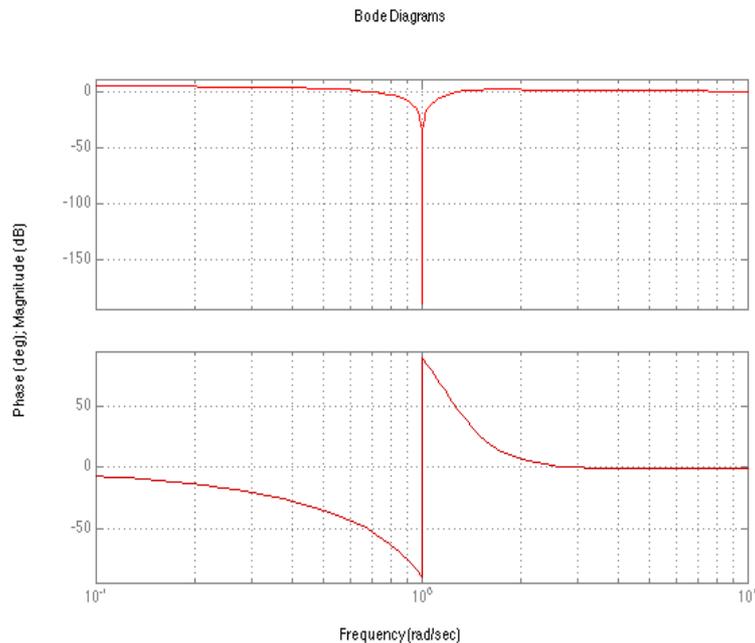


Figure 3-10

L'incorporation du modèle interne de la perturbation a généré les zéros de transmission dans la boucle fermée, nécessaires à la simplification des pôles instables du générateur de bruit. Les modes oscillants de ce générateur sont donc rendus inobservables de la sortie.

Cependant, la figure 9 montre que ce signal de bruit est reproduit sur la commande : dans le cas de bruits instables divergents (de type exponentiel) la commande est également divergente. Ce qui conduit (éventuellement) à la saturation des actionneurs.

Toutefois, ce schéma de commande à modèle interne est intéressant du point de vue de poursuite asymptotique de consigne.

3 Commandes LQG sur modèle augmenté.

Bibliographie:

- *Linear Optimal Control Systems*, Kwakernaak & Sivan, Wiley 1972.
- *Linear Systems*, Kailath, Englewoods Cliffs, NJ, Prentice-Hall 1979.
- *Multivariable feedback design*, J. M. Maciejowski, Addison Wesley 1989.

3.1 Rappels

Le problème Linéaire Quadratique Gaussien consiste à trouver le retour d'état et l'observateur optimaux vis à vis d'un critère stochastique. L'hypothèse fondamentale est que les bruits sont blancs et gaussiens.

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \tag{3-14}$$

Les bruits w et v sont supposés indépendants, blancs et gaussiens, c'est à dire :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(\tau) & v^T(\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \tag{3-15}$$

Les matrices W ($n \times n$) et V (1×1) sont les matrices de covariance des bruits, donc symétriques, définies positives.

La commande LQG stationnaire (à horizon infini) consiste à calculer le retour d'état K et le gain d'observateur L tel que le critère

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \right\}$$

soit minimisé.

Le schéma-bloc est :

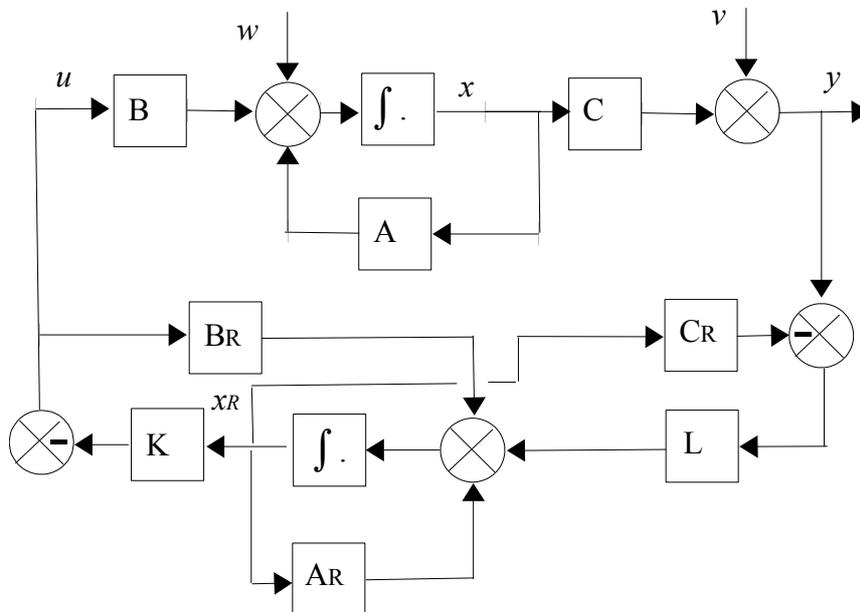


Figure 3-11

3.2 LQG à modèle interne

Lorsque l'état de la partie commandable n'est pas mesurable et/ou bruité, il convient d'implanter un observateur optimal.

Soit le système:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_2 + G w \\ x_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_1 \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + v \end{aligned} \quad 3-16$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [1, 0], A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = [1, 0] .$$

Comme précédemment, le modèle d'état du système, augmenté du modèle interne, s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_1] & 0 & 0 \\ [B_{R2} \cdot C_1] & [A_{R2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_{R2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \quad 3-17$$

On construit l'observateur de la partie commandable :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{RI} &= A_{RI} x_{RI} + B_{RI} u_2 + L_1 \epsilon \\ \epsilon &= y - C_{RI} x_{RI} \end{aligned}$$

avec

$$A_{RI} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_{RI} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La matrice L_I minimise la variance:

$$J_{obs} = E \left\{ \int_0^{\infty} [x_1 - x_{RI}]^T [x_1 - x_{RI}] dt \right\},$$

avec :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\tau) \\ v(\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \delta(t - \tau)$$

On obtient ainsi les matrices de gain:

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1,423 \\ 0,513 \end{bmatrix}, K_1 = [1,4140; 0,7071], K_2 = [-0,6933; 0,7207] .$$

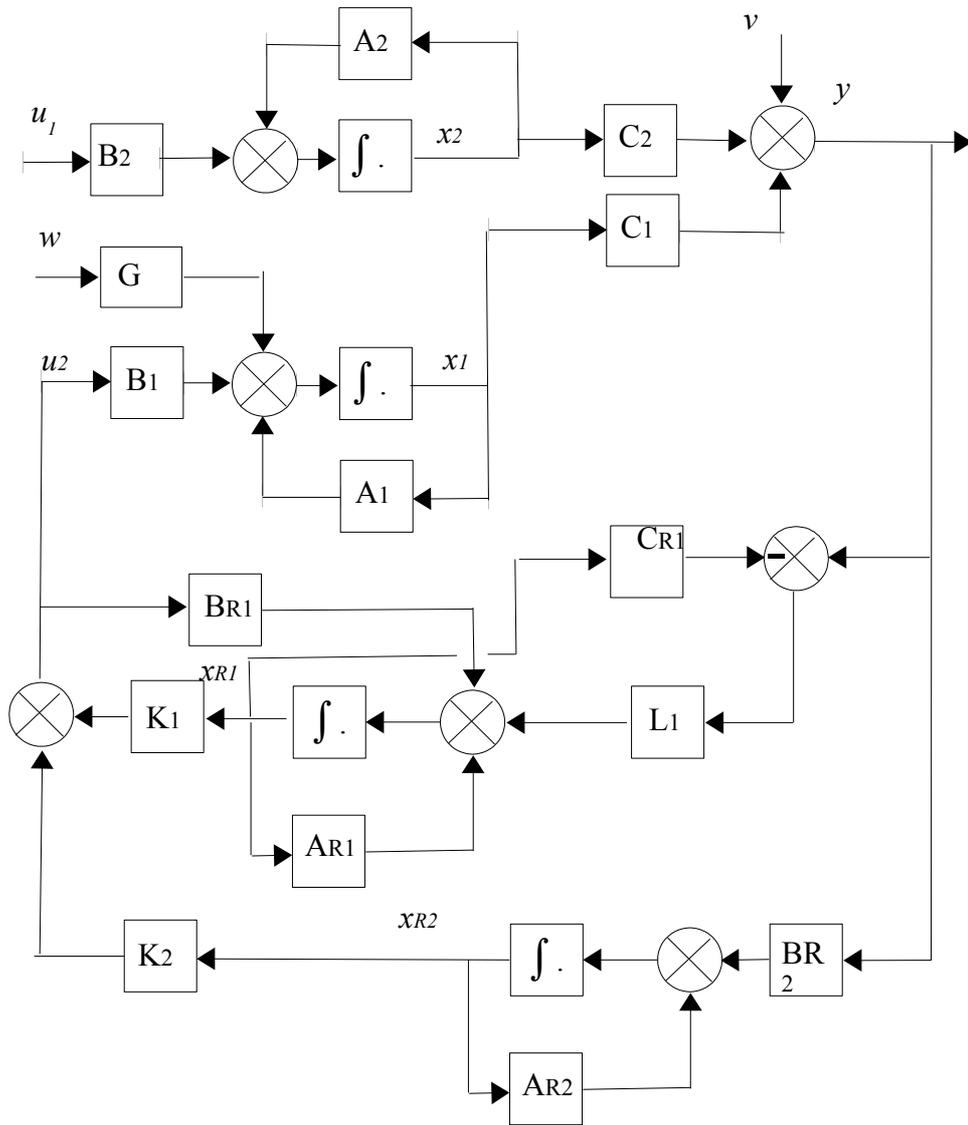


Figure 3-12

Les résultats de simulation:

1. L'évolution de y_1 :

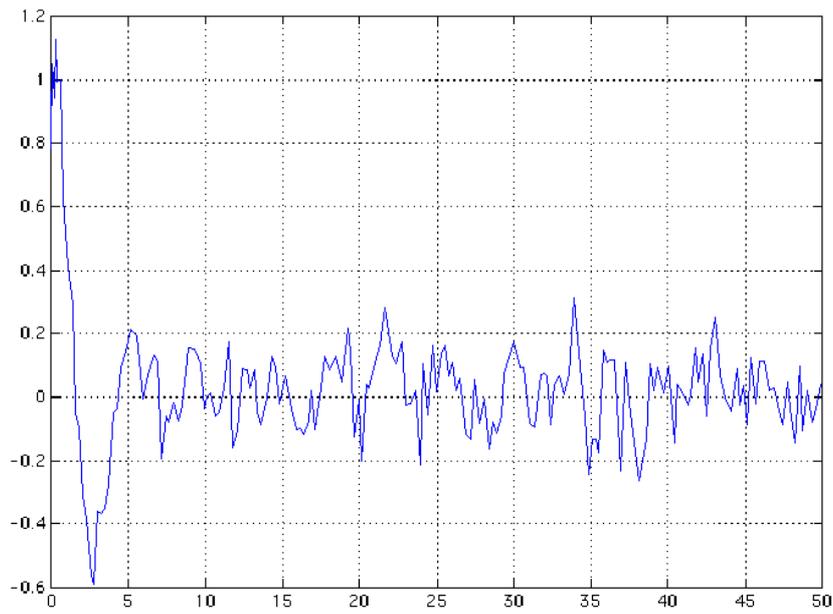


Figure 3-13

2. l'évolution de la commande u_2 :

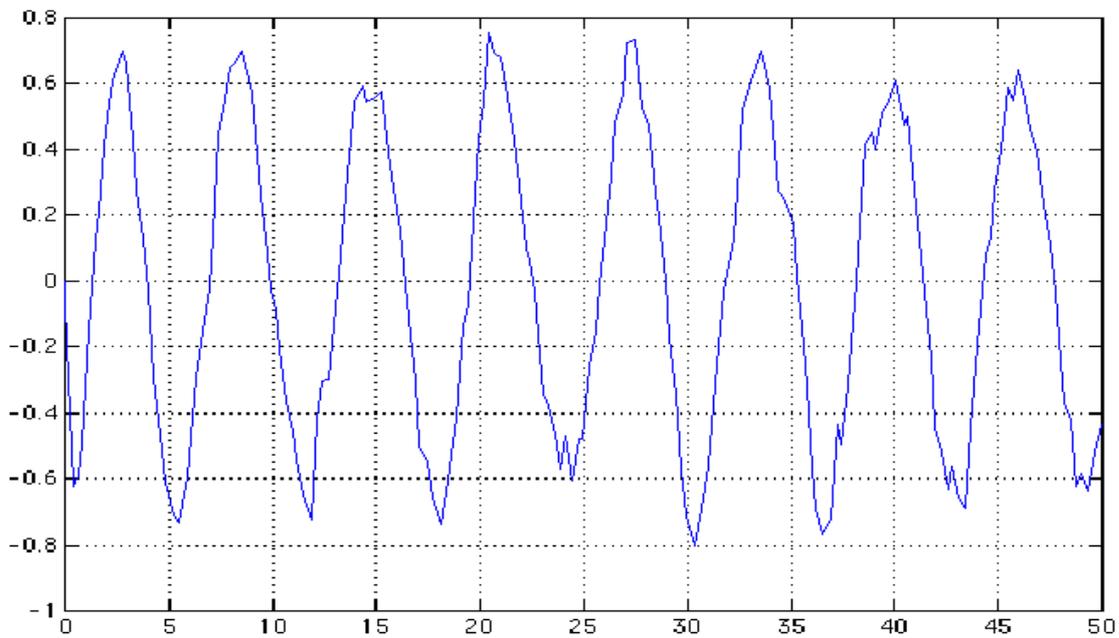


Figure 3-14

3.3 Bruit coloré.

On appelle *bruit coloré* le signal de sortie d'un système dynamique (linéaire stationnaire): le *filtre formeur* du bruit, dont l'entrée est un bruit blanc.

Ainsi, on peut généraliser la notion de système bruité selon le schéma de la figure 15, où w est un bruit coloré de sortie et v un bruit de mesure :

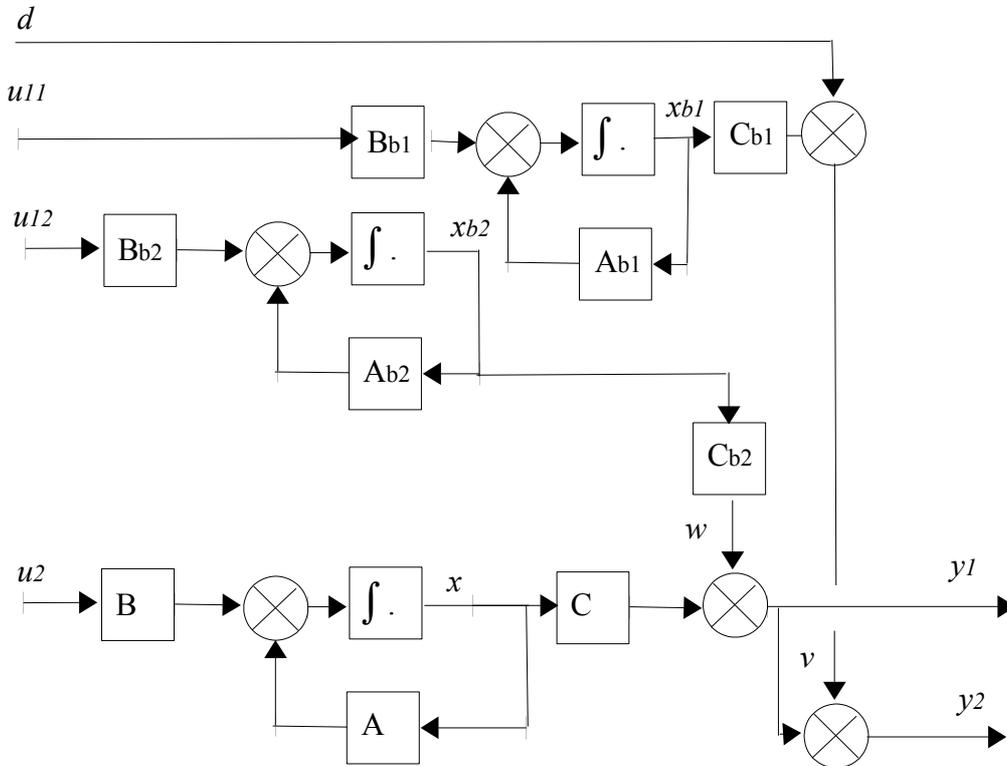


Figure 3-15

Ce schéma-bloc représente le *modèle augmenté* du système à régler et des bruits. Les entrées d , u_{11} et u_{12} sont supposées être des bruits blancs gaussiens (indépendants), tels que :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} d(t) \\ u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^T(\tau) & u_{11}^T(\tau) & u_{12}^T(\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & U_{12} \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \quad 3-18$$

Ce modèle augmenté a pour équations d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{b1} \\ \dot{x}_{b2} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{b1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{b2} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} B_{b1} & 0 \\ 0 & B_{b2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad 3-19$$

$$y_1 = [0, C_{b2}, C] \begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix} \quad 3-20$$

$$y_2 = [C_{b1}, C_{b2}, C] \begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix} + d \quad 3-21$$

On écrit donc ce modèle sous la forme condensée :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aug} &= A_{aug} x_{aug} + B_{aug1} u_1 + B_{aug2} u_2 \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{aug1} \\ C_{aug2} \end{bmatrix} x_{aug} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} d \end{aligned} \quad 3-22$$

Le critère LQG :

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [y_1^T Q y_1 + u_2^T R u_2] dt \right\} \quad 3-23$$

ou encore:

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [X^T Q_c X + u_2^T R u_2] dt \right\}$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_{b1} \\ x_{b2} \\ x \end{bmatrix}, Q_c = C_{aug1}^T Q C_{aug1}$$

où Q_c est symétrique définie positive si Q l'est, permet de calculer:

- la matrice K de retour d'état :

$$K = R^{-1} B_{aug2}^T P_c \quad 3-24$$

où P_c est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$P_c A_{aug} + A_{aug}^T P_c + Q_c - P_c B_{aug2} R^{-1} B_{aug2}^T P_c = 0 \quad 3-25$$

- la matrice L de gain de l'observateur :

$$L = P_f C_{aug2} V^{-1} \quad 3-26$$

où P_f est solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$A_{aug} P_f + P_f A_{aug}^T + Q_f - P_f C_{aug2}^T V^{-1} C_{aug2} P_f = 0 \quad 3-27$$

dans laquelle :

$$Q_f = B_{aug2} \begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix} B_{aug2}^T \quad 3-28$$

Le régulateur est de la forme représentée à la figure 16:

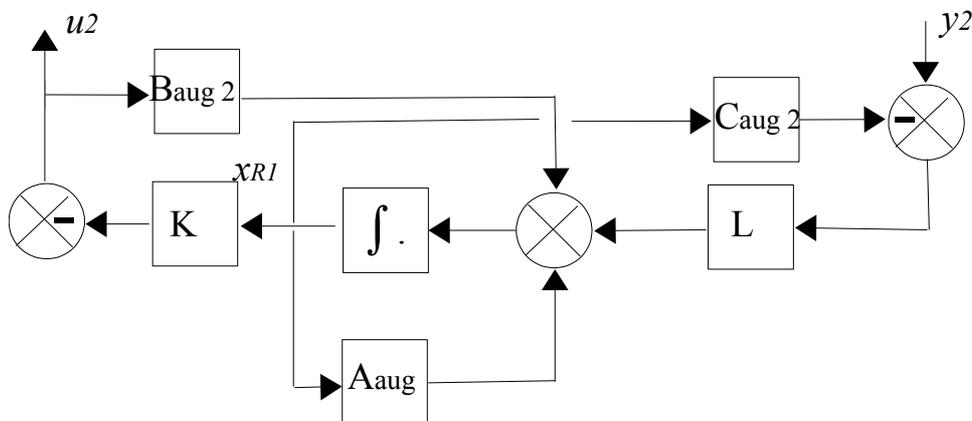


Figure 3-16

On peut alors écrire :

$$u_2(p) = -K [pI - A_{aug} - L C_{aug2} - B_{aug2} K]^{-1} L y_2(p) \quad 3-29$$

4 Le problème standard.

On peut généraliser les procédures précédentes pour donner une formulation générique du problème de commande optimale: c'est le problème standard.

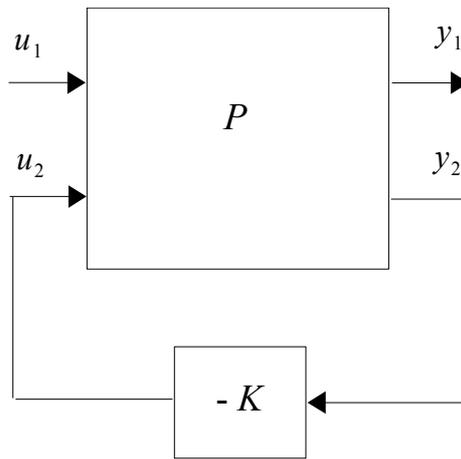


Figure 3-17

Le système P contient :

- le modèle du système à régler;
- les modèles de bruit et des références ou consigne;
- les pondérations représentant les objectifs de commande.

Les vecteurs exogènes sont :

- u_1 : contient les entrées ;
- y_1 : contient les variables à régler, les erreurs à minimiser, etc : doivent vérifier la propriété de *déteçtabilité* depuis le vecteur des mesures.

Les vecteurs endogènes sont :

- u_2 : vecteur des commandes qui doivent rester bornées, si possible inférieures aux niveau des saturation d'actionneur ;
- y_2 : vecteur des mesures.

Le problème standard d'optimisation consiste à calculer le régulateur K selon une procédure d'optimisation adaptée au critère de performance.

Si le critère est de type temporel, on utilisera l'optimisation LQG. On va cependant montrer au chapitre 6 qu'il existe une formulation fréquentielle équivalente utilisant la norme L_2 des matrices de transfert.

La norme L_2 de matrice de transfert est une norme qui évalue le gain en *énergie* du vecteur de signaux de sortie par rapport au vecteur d'entrée. Ce gain est une intégrale sur l'espace des fréquences. Il en résulte que le minimum de cette norme est un résultat global, obtenu "en moyenne" sur l'ensemble des fréquences.. Il est en particulier pratiquement impossible de modeler précisément les sensibilités dans des plages réduites de fréquences.

Dès 1981, Zames, Doyle et Athans (et quelques autres) ont utilisé la norme H_∞ pour exprimer le critère d'optimisation. La solution numérique au problème d'optimisation n'a été publiée qu'en 1989, par Glover, Doyle, Kargonekar et Francis.

Chapitre 4 : Commande Robuste monovariante : Aspects fréquentiels

1 Robustesse et désensibilisation

La commande L. Q. est une commande à retour d'état, calculée sur un modèle, supposé parfait et non bruité, du système à régler. L'introduction d'un observateur de Kalman a permis de relâcher l'hypothèse de mesurabilité de l'état, tout en prenant en compte l'existence de bruits supposés blancs et gaussiens.

Cependant, l'élaboration de la commande L.Q.G. utilise un modèle d'état, dont on connaît parfaitement l'ordre (les dimensions des matrices) ainsi que les valeurs numériques précises des coefficients de ces matrices. Dans la réalité, les modèles ne sont que des représentations simplifiées des comportements mesurables des systèmes : il est donc nécessaire de réfléchir aux performances réellement atteintes par ces commandes lorsqu'on les applique au système réel.

On peut également prendre en compte ce problème lors de la conception de la commande. Pour cela il existe 2 approches très différentes :

La Désensibilisation : on cherche à minimiser un critère du type :

$$\left| \frac{\delta \text{ performance}}{\delta \text{ modèle}} \right|$$

dans lequel : $\delta \text{ performance}$ est une mesure d'écart de performance obtenu pour un écart de modèle $\delta \text{ modèle}$.

Un tel critère est un critère **local**, qui n'a de sens que pour un écart de modèle petit, dont on ne peut préciser une limite.

La Robustesse : une commande est dite robuste si on peut garantir la satisfaction d'un certain niveau de performances malgré la présence d'erreur (bornée) de modèle (notion d'incertitude).

La robustesse a un caractère global.

Exemple de désensibilisation :

Soit un système **monovariante** P et son modèle P_0 . Soit δP l'erreur de modèle, selon la relation :

$$P = P_0(1 + \delta P) \quad 4-1$$

Soit R un régulateur calculé sur le modèle P_0 . Ce régulateur permettait d'obtenir la fonction de transfert de boucle fermée (**sensibilité complémentaire**):

$$T_0 = \frac{P_0 R}{1 + P_0 R} \quad 4-2$$

La fonction de transfert en boucle fermée correspondant au schéma de la figure 4-1 s'écrit :

$$T = \frac{P R}{1 + P R} \quad 4-3$$

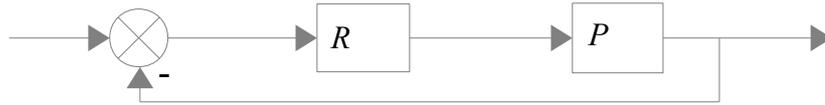


Figure 4- 1 Schéma fonctionnel de boucle fermée

Si on écrit :

$$T = T_0(1 + \delta T) \quad 4- 4$$

on peut calculer :

$$\delta T = \frac{T}{T_0} - 1 = \frac{1}{1 + RP} \delta P \quad 4- 5$$

La fonction de transfert :

$$S = \frac{1}{1 + RP} \quad 4- 6$$

est appelée **fonction de sensibilité**.

Si la quantité δT représente l'écart de performance de la boucle fermée, et δP l'écart de modèle, alors la désensibilisation est d'autant meilleure que le rapport $\frac{|\delta T|}{|\delta P|}$ est petit, c'est-à-dire que l'on cherche à minimiser :

$$|S| = \left| \frac{1}{1 + RP} \right| \quad 4- 7$$

Bien entendu, il faut respecter la contrainte de stabilité, et on ne peut obtenir $|S| \ll 1$ que dans une bande de fréquences limitée. Dans cette bande de fréquences, il suffit alors d'assurer que $|RP| \gg 1$: c'est la désensibilisation par grand gain.

Exemple du régulateur à action intégrale : si $R(p)$ est un régulateur à action intégrale, alors on peut l'écrire sous la forme $R(p) = R'(p)/p$. Il est alors bien connu que le gain statique de la boucle fermée (sensibilité complémentaire T) vaut 1, quel que soit le gain statique du système. En effet :

$$\lim_{p \rightarrow 0} |S| = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow 0} |T| = 1 \quad 4- 8$$

2 Description des incertitudes

Dans le cadre de la commande robuste, il est nécessaire de préciser l'ensemble des modèles possibles représentant le système à commander. Un tel ensemble est défini par un modèle nominal et un domaine d'incertitude :

$$P \in \Pi(P_0, \Delta P) \quad 4- 9$$

2.1 Origine des erreurs de modèle

Les systèmes physiques sont essentiellement des systèmes dynamiques non linéaires, dont on approxime le comportement par celui d'un modèle linéaire, plus ou moins proche.

- Le système non linéaire peut fonctionner autour de plusieurs points d'équilibre (points de fonctionnement, dans l'espace d'état) au cours de son évolution normale : on peut alors calculer en chaque point un modèle linéaire tangent par dérivation au premier ordre. L'ensemble des modèles possibles doit donc contenir l'ensemble de ces modèles linéarisés.
- Certains paramètres de modèle linéaire peuvent changer de valeur par saut (c'est le cas de l'inertie d'un bras de robot qui prend un objet pesant) : l'ensemble des modèles possibles doit alors contenir les différents modèles correspondant aux valeurs possibles de ces paramètres.
- Souvent les modèles sont obtenus (ou « calés ») à partir d'identification utilisant des mesures d'entrée-sortie (analyse harmonique, moindres carrés ou autres). Dans ce cas, les erreurs ou bruits de mesure induisent des erreurs de modèles qu'il faut quantifier. En général le rapport signal/bruit des signaux se dégrade en haute fréquence : les modèles sont donc imprécis à ces hautes fréquences
- Les modèles linéaires utilisés pour la synthèse de commande, sont souvent des modèles d'ordre fini et réduit, alors que les systèmes physiques sont souvent d'ordre infini (paramètres répartis ou systèmes à retard). Il faut donc caractériser cette erreur de troncature (dynamiques non modélisées) et la borner.

2.2 Structuration d'incertitudes

On distingue 2 types d'incertitudes

- Les incertitudes structurées : ce sont les incertitudes sur les paramètres de modèle.
- Les incertitudes non structurées : ce sont les incertitudes sur les réponses de systèmes.

2.2-1 Incertitudes structurées

Il y a 2 types d'incertitudes structurées :

- Les incertitudes fortement structurées : Les incertitudes sont données sur les paramètres physiques ($m = m_0 \pm \Delta m$) .
- Les incertitudes faiblement structurées : Les incertitudes sont données sur les paramètres de modèle.

Exemples:

- fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}$$

pour ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), $a_i = a_i(\theta)$ où θ est un vecteur de paramètres physiques. Chaque a_i est de la forme $a_i = a_{i0} \pm \Delta a_i$.

- modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= A_0 + \Delta A \\ B &= B_0 + \Delta B \\ C &= C_0 + \Delta C\end{aligned}$$

Cette description d'incertitude est moins précise que la structuration forte.

2.2-2 Incertitudes non structurées

Ces incertitudes définissent des domaines d'appartenance d'une réponse de type :

- réponse transitoire à un échelon.
- réponse transitoire à une impulsion.
- réponse fréquentielle.

Ces incertitudes sont facilement observables et quantifiables. De plus elles contiennent les incertitudes sur les grandeurs physiques (incertitudes structurées) et elles peuvent tenir compte des dynamiques négligées.

2.3 Représentations d'incertitudes

On utilise les formes additives et les formes multiplicatives :

- additives :

$$\begin{aligned}P(j\omega) &= P_0(j\omega) + \delta_a(j\omega), \\ |\delta_a(j\omega)| &\leq \Delta_a(\omega)\end{aligned}\tag{4-10}$$

- multiplicatives :

$$\begin{aligned}P(j\omega) &= P_0(j\omega)[1 + \delta_m(j\omega)], \\ |\delta_m(j\omega)| &\leq \Delta_m(\omega)\end{aligned}\tag{4-11}$$

A chaque valeur de pulsation on représente l'ensemble $\Pi(P_0(j\omega), \Delta_m(\omega))$ par un disque dans le plan complexe (figure 4-2).

On peut donc tracer un tel disque autour de chaque point du lieu de Nyquist de $P_0(j\omega)$, et on obtient un tube qui contient tous les lieux de Nyquist possibles (figure 4-3).

A cause des dynamiques négligées, des retards non représentés et plus généralement de la difficulté d'identifier précisément les systèmes dans les fréquences élevées (à cause de la diminution des gains et donc de la dégradation des rapports signal/bruit des signaux issus des capteurs), l'incertitude croît avec la fréquence, selon une courbe qui a, en général, l'allure de la figure 4-4.

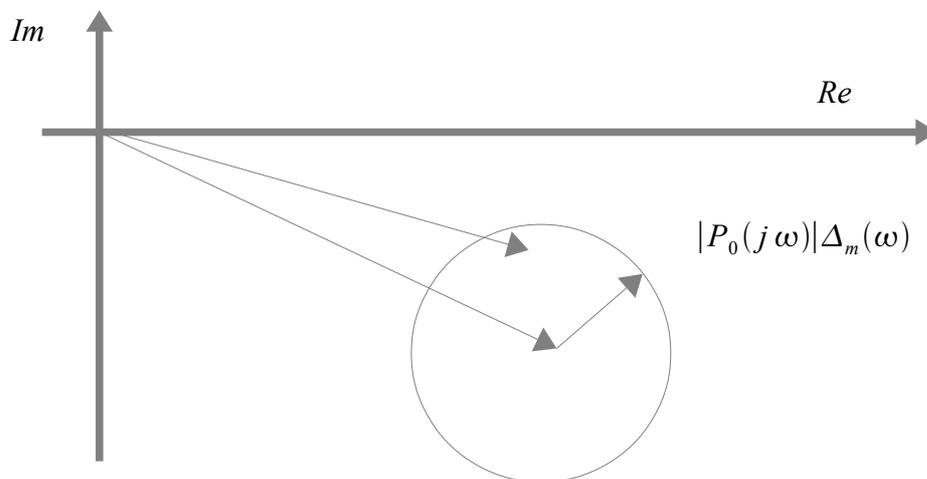


Figure 4- 2 : Ensemble des valeurs de P à la fréquence ω

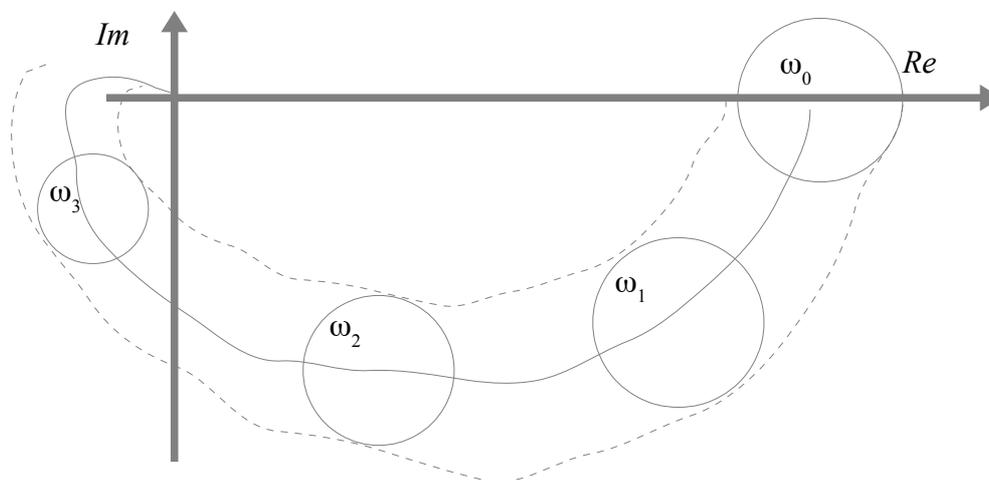


Figure 4-3 : Ensemble des lieux de Nyquist possibles.

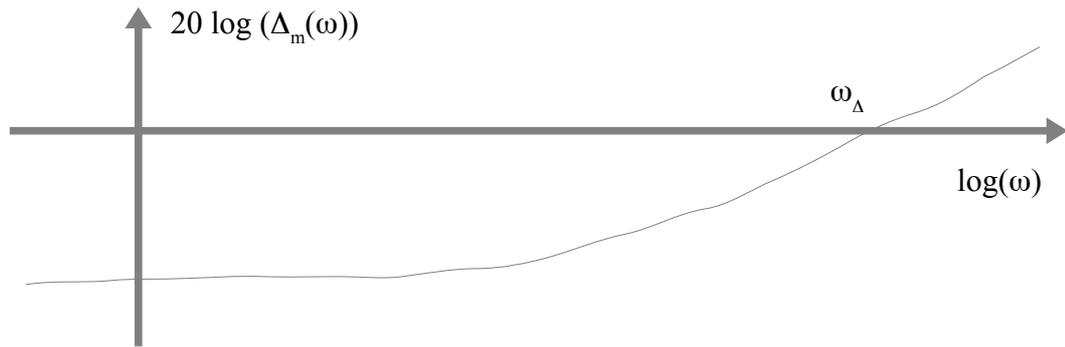


Figure 4- 4: allure de la représentation fréquentielle de l'incertitude multiplicative.

Remarques :

- 1 Les incertitudes structurées ne remettent pas en cause le comportement fréquentiel asymptotique. Elles interviennent dans la bande passante du système, c'est-à-dire la plage de fréquences dans laquelle la structure du modèle est bien connue (ordre fini).
- 2 Les incertitudes non structurées sont prépondérantes dans les hautes fréquences, c'est-à-dire dans les plages de fréquences où le rapport signal/bruit des mesures est faible et où les modèles de connaissance sont imprécis du fait des dynamiques négligées et de l'approximation inhérente aux lois de la physique.
- 3 Par conséquent, la notion de comportement fréquentiel asymptotique est à remettre en cause : les modèles d'ordre fini et connu ne constituent qu'une approximation qui n'est utilisable que dans une plage de fréquences limitée.

3 Description de performances

3.1 Stabilité de la boucle fermée

La stabilité du système commandé est la première performance exigée. Dans le cadre de la commande en boucle fermée de systèmes linéaires monovariables à partir de modèles exacts, les méthodes habituelles d'analyse de stabilité de boucle fermée suffisent :

- lieu des racines,
- plan de phase,
- critère de Nyquist
- critères algébriques,

S'il s'agit de commande robuste, la première exigence est la robustesse de la stabilité. Dès les travaux de Bode et Nyquist (1930-1950) cette exigence est présente à travers les notions de marge de stabilité : marge de gain et marge de phase. Dans l'approche moderne (1980-) les marges de stabilité doivent être spécifiées en fonction des incertitudes, pour garantir de façon certaine la stabilité.

On peut ainsi formuler un critère de Nyquist robuste :

Si :

1. le système incertain et son modèle nominal ont le même nombre de pôles à partie réelle positive,

2. le lieu de Nyquist de la boucle ouverte nominale (régulateur + modèle nominal) vérifie le critère de Nyquist (nombre de tours encerclant le point $(-1, 0)$ égal au nombre de pôles à partie réelle positive), c'est-à-dire que la boucle fermée nominale est stable,

3. le point critique $(-1, 0)$ est à l'extérieur de tous les disques d'incertitudes (contenant de façon certaine le système incertain) centrés sur le lieu de Nyquist nominal (figure 4-2),

alors la boucle fermée de commande du système incertain est stable : on parle de stabilité robuste.

Il est en effet évident que le lieu de Nyquist de la boucle ouverte réelle fait le même nombre de tours encerclant le point critique que la boucle ouverte nominale, et le critère de Nyquist est donc vérifié.

Théorème 4-1 : cas d'incertitudes multiplicatives non structurées

Soit $P(j\omega)$ la fonction de transfert d'un système incertain, $P_0(j\omega)$ un modèle nominal de ce système, alors, soit :

(i) $R(j\omega)$ est la fonction de transfert d'un régulateur qui stabilise (en boucle fermée) le modèle $P_0(j\omega)$,

(ii) L'ensemble des systèmes possibles est décrit par des incertitudes multiplicatives non structurées : $P(j\omega) = P_0(j\omega)[1 + \delta_m(j\omega)]$, $|\delta_m(j\omega)| < \Delta_m(\omega)$;

(iii) $P(j\omega)$ et $P_0(j\omega)$ ont le même nombre de pôles à partie réelle positive,

Le régulateur $R(j\omega)$ stabilise certainement $P(j\omega)$ si et seulement si :

$$\forall \omega ; |1 + P_0(j\omega)R(j\omega)| > |P_0(j\omega)R(j\omega)|\Delta_m(\omega) . \quad 4- 12$$

Remarque :

ce théorème impose de fixer une marge de stabilité suffisante pour stabiliser le système dans le cas le plus contraignant.

Théorème 4-2 : cas d'incertitudes additives non structurées

Soit $P(j\omega)$ la fonction de transfert d'un système incertain, $P_0(j\omega)$ un modèle nominal de ce système, alors, soit :

(i) $R(j\omega)$ est la fonction de transfert d'un régulateur qui stabilise (en boucle fermée) le modèle $P_0(j\omega)$,

(ii) L'ensemble des systèmes possibles est décrit par des incertitudes additives non structurées : $P(j\omega) = P_0(j\omega) + \delta_a(j\omega)$, $|\delta_a(j\omega)| < \Delta_a(\omega)$;

(iii) $P(j\omega)$ et $P_0(j\omega)$ ont le même nombre de pôles à partie réelle positive,

Le régulateur $R(j\omega)$ stabilise certainement $P(j\omega)$ si et seulement si :

$$\forall \omega ; |1 + P_0(j\omega)R(j\omega)| > \Delta_a(\omega) . \quad 4- 13$$

Corollaire 4-1 : cas d'incertitudes multiplicatives non structurées

Le choix de la fréquence au gain unité de la boucle ouverte (crossover frequency) est imposé par le

profil fréquentiel de l'incertitude. En effet, si ω_0 est la fréquence au gain unité de la boucle ouverte, elle vérifie :

$$|P_0(j\omega_0)R(j\omega_0)|=1 \quad 4- 14$$

et il faut donc choisir ω_0 telle que :

$$\Delta_m(\omega_0) < 2 \quad . \quad 4- 15$$

Corollaire 4-2 :

Le choix a priori de ω_0 et de la marge de phase nominale M_ϕ impose une valeur maximale à l'incertitude :

$$\Delta_m(\omega_0) < 2 \sin\left(\frac{M_\phi}{2}\right) \quad 4- 16$$

Il faut donc soigner l'identification pour obtenir la précision requise par le niveau de performance spécifié.

3.2 Régulation

Le premier objectif d'un système de régulation est la réduction des effets des signaux perturbateurs (bruits) sur les grandeurs à régler. Dans l'approche linéaire, les signaux perturbateurs sont représentés par des signaux additifs sur l'entrée (biais ou offset d'actionneur, couple induit par un coup de vent en aéronautique, ...), l'état ou la sortie. Pour simplifier la présentation, nous ne traiterons, dans ce chapitre, que la perturbation de sortie sur un système monovariante.

La structure de régulation est présentée à la figure 4-5 ci-dessous. Le problème est donc de concevoir le régulateur R tel que le signal de perturbation de sortie d affecte peu la sortie z .

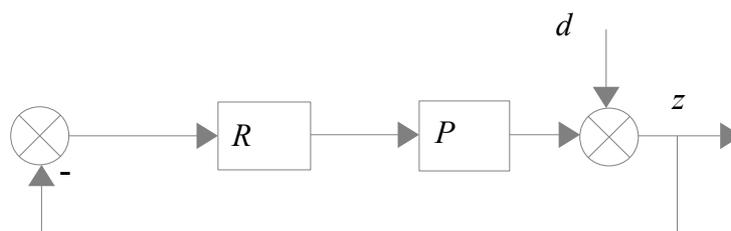


Figure 4- 5 : Schéma fonctionnel de régulation de sortie.

Dans le domaine fréquentiel, on peut définir une fonction $m(\omega)$, réelle positive, dont la valeur soit une borne supérieure au transfert z/d :

$$\left| \frac{z(j\omega)}{d(j\omega)} \right| \leq m(\omega); \forall \omega \quad 4- 17$$

soit :

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + P(j\omega)R(j\omega)} \right| \leq m(\omega), \forall \omega \quad 4-18$$

Cette fonction doit vérifier les contraintes :

$$\begin{aligned} m(\omega) &\ll 1 \text{ si } \omega \rightarrow 0 \\ m(\omega) &\geq 1 \text{ si } \omega \rightarrow \infty \end{aligned} \quad 4-19$$

Pour le rejet exact de perturbation constante on imposera :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} m(\omega) = 0 \quad 4-20$$

La figure 4-6 donne l'allure d'une telle fonction cible.

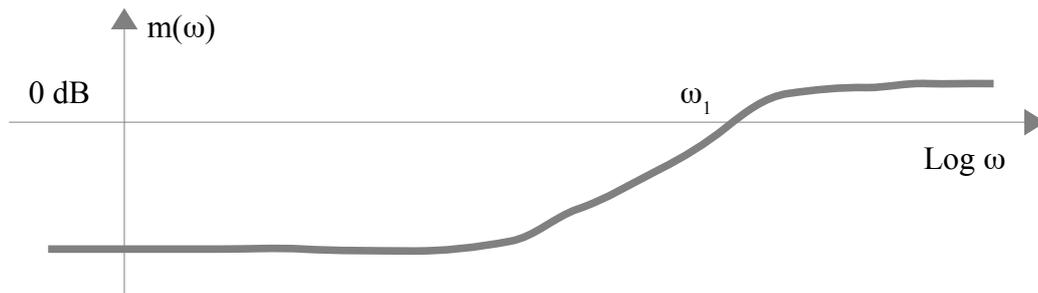


Figure 4- 6: allure de la fonction $m(\omega)$.

Remarque :

On peut comparer les relations 4-17, 4-18, 4-19 et 4-20 avec les relations 4-7 et 4-8 : en basses fréquences, une « bonne » régulation assure une « bonne » désensibilisation aux erreurs paramétriques (décrites par des incertitudes structurées).

3.3 Compromis performances / robustesse

On distingue généralement 3 plages de fréquences distinctes :

- les fréquences « basses », correspondent à la plage de fréquences où le système à régler est bien modélisé : les incertitudes sont faibles et la boucle ouverte peut donc présenter un gain important (voire un ou plusieurs intégrateurs) ;
- les fréquences intermédiaires où les incertitudes croissent, imposant de diminuer le gain de boucle ouverte et de prendre en compte les marges (gain, phase) ;
- les fréquences élevées où la contrainte de robustesse impose de diminuer le gain de boucle ouverte.

Dans les **fréquences basses** : $\omega < \omega_b; \{m(\omega) \ll 1\}$

La relation 4-18 est vérifiée si :

$$|R(j\omega)P(j\omega)| \gg \frac{1}{m(\omega)} \quad 4-21$$

puisque

$$\{|R(j\omega)P(j\omega)| \gg 1\} \Rightarrow \{|R(j\omega)P(j\omega)| \approx |1 + R(j\omega)P(j\omega)|\} \quad 4-22$$

Dans les **fréquences hautes** : $\omega > \omega_\Delta; \Delta_m(\omega) > 1$

La relation 4-12 est vérifiée si :

$$|R(j\omega)P(j\omega)| \ll \frac{1}{\Delta_m(\omega)} \quad 4-23$$

puisque

$$\{|R(j\omega)P(j\omega)| \ll 1\} \Rightarrow \{|1 + R(j\omega)P(j\omega)| \approx 1\} \quad 4-24$$

Dans les **fréquences intermédiaires** : $\omega_b < \omega < \omega_\Delta$

Il faut vérifier les relations 4-12, 4-15 et 4-16, c'est-à-dire que la fréquence au gain unité de boucle ouverte, ω_0 , doit être fixée dans cet intervalle, de façon à pouvoir respecter la marge de phase spécifiée.

On peut représenter cet ensemble de contraintes sur le lieu de Bode du module de la boucle ouverte :

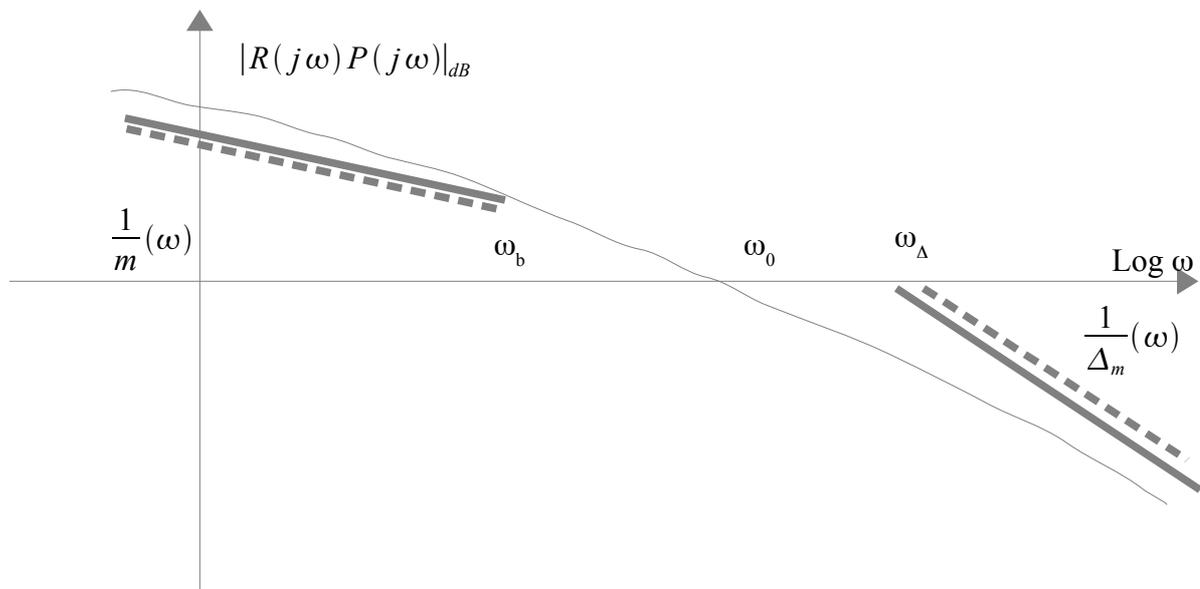


Figure 4- 7 : Contraintes sur le lieu de Bode du module de la boucle ouverte.

3.4 Conclusion

Les étapes des méthodes modernes de synthèse de commande robuste :

- définition d'incertitudes (liées au processus d'identification),
- contraintes sur la commande (saturation d'actionneurs, ...),
- contraintes de stabilité robuste (décroissance du gain en hautes fréquences : roll-off),
- spécification des performances (bande passante de boucle fermée, gain en basses fréquences).

Chapitre 5 : Systèmes Linéaires Multivariables, représentations et quelques propriétés.

1 Représentation d'état et matrice de transfert

Un système dynamique linéaire peut être décrit par un modèle d'état du type de la relation 1-3 que l'on généralise ici en représentant un transfert direct de l'entrée vers la sortie :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad 5-1$$

$x(t)$: vecteur d'état, $\dim x(t) = n \times 1$

$u(t)$: vecteur de commande de dimension : $l \times 1$, où l est le nombre d'actionneurs.

$z(t)$: vecteur des grandeurs à régler, $\dim z(t) = m \times 1$

A : matrice d'état du système, $\dim A = n \times n$

B : matrice de commande, $\dim B = n \times l$

C : matrice d'observation, $\dim C = m \times n$

D : matrice de transfert direct, $\dim D = m \times l$

On peut grouper les 2 équations matricielles en une :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad 5-2$$

et on peut le représenter par le schéma fonctionnel :

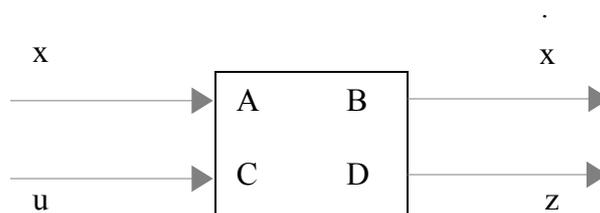


Figure 5- 1: schéma fonctionnel

En fait, l'entrée x dépend de la sortie \dot{x} :

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow x(p) = \frac{1}{p} L\{\dot{x}(t)\} \quad 5-3$$

d'où le schéma fonctionnel bouclé de la figure 5-2 ci-dessous.

On peut calculer la matrice ($m \times l$) de transfert entre le vecteur des entrées $u(p)$ et le vecteur des sorties $z(p)$, en transformées de Laplace :

$$z(p) = [C(pI_n - A)^{-1}B + D]u(p) \quad 5-4$$

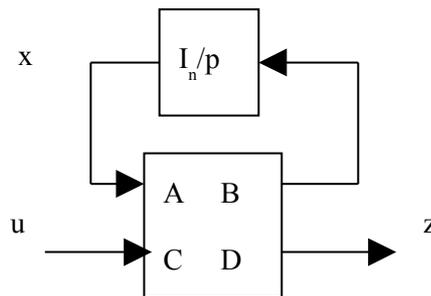


Figure 5- 2 : schéma fonctionnel bouclé

Soit M la matrice du système, définie par :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad 5-5$$

on note :

$$z(p) = F_u \left(M, \frac{1}{p} I_n \right) u(p) \quad 5-6$$

La transformation :

$$\left(M, \frac{1}{p} I_n \right) \rightarrow F_u \left(M, \frac{1}{p} I_n \right) = [C(pI_n - A)^{-1}B + D] \quad 5-7$$

s'appelle Transformation Linéaire Fractionnelle haute (upper Linear Fractional Transformation, upper LFT).

2 Système bouclé par retour dynamique de sortie

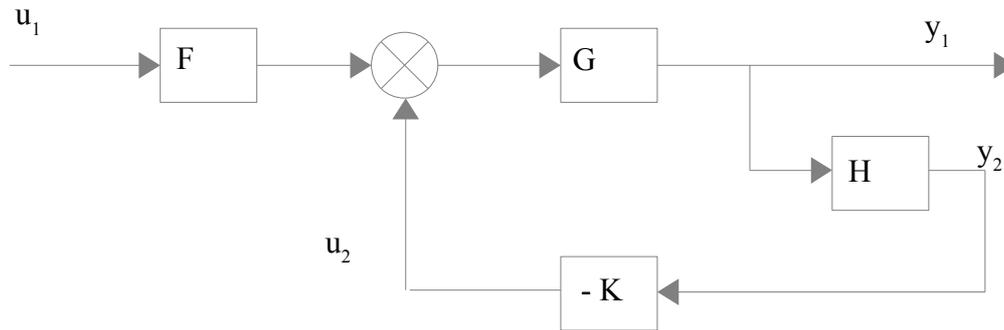


Figure 5- 3 : schéma fonctionnel de système commandé

La figure 5-3 représente un système dynamique commandé. Sur ce schéma, on reconnaît :

- **G** : matrice de transfert du système à régler,
- **H** : matrice de transfert des capteurs,
- **F** : matrice de transfert du précompensateur (feedforward) de consigne,
- **K** : matrice de transfert du correcteur de boucle (feedback).

On peut écrire les équations :

$$\begin{aligned} y_1 &= GF u_1 + G u_2 \\ y_2 &= HGF u_1 + HG u_2 \end{aligned} \quad 5- 8$$

soit en posant :

$$P = \begin{bmatrix} GF & G \\ HGF & HG \end{bmatrix} \quad 5- 9$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 5- 10$$

et puisque :

$$u_2 = -K y_2 \quad 5- 11$$

on obtient en boucle fermée :

$$y_1(p) = [GF + G(I + KHG)^{-1}KHGF]u_1(p) \quad 5-12$$

On note :

$$y_1(p) = F_l(P, K)u_1(p) \quad 5-13$$

La transformation :

$$(P, K) \rightarrow F_l(P, K) = [GF + G(I + KHG)^{-1}KHGF] \quad 5-14$$

s'appelle Transformation Linéaire Fractionnelle basse (lower Linear Fractional Transformation, lower LFT).

3 Définitions générales des L.F.T

3.1 L.F.T Supérieure (F_u)

Selon le schéma de la figure 5-4, on peut écrire la matrice de transfert du vecteur u vers le vecteur z

$$z = F_u \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right) u \quad 5-15$$

$$z = [P_{21}(I - \Delta P_{11})^{-1} \Delta P_{12} + P_{22}]u$$

$$z = [P_{21} \Delta (I - P_{11} \Delta)^{-1} P_{12} + P_{22}]u$$

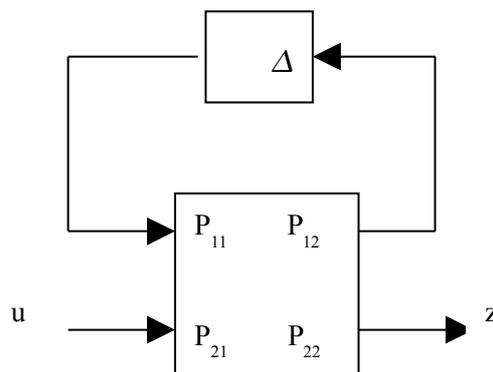


Figure 5- 4 : Schéma fonctionnel de LFT haute.

3.2 L.F.T Inférieure (F_l)

De même, la figure 5-5 représente une LFT basse dont on peut écrire la matrice de transfert :

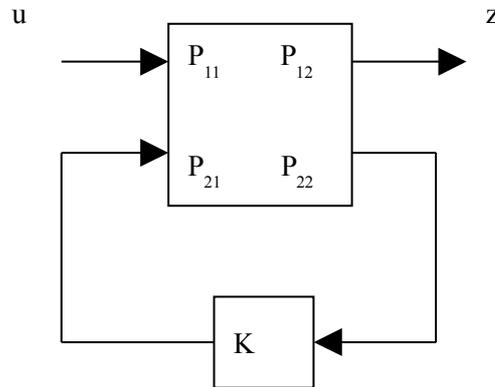


Figure 5-5 : schéma fonctionnel de LFT basse.

$$z = F_l \left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) u$$

$$z = \begin{bmatrix} P_{12} (I - K P_{22})^{-1} K P_{21} + P_{11} \\ P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} + P_{11} \end{bmatrix} u$$
5- 16

4 Représentation par matrice de système

Soit le système dynamique multivariable :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ z &= C x + D u \end{aligned}$$

écrit en transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} 0 &= (A - p I) x + B u \\ z &= C x + D u \end{aligned}$$
5- 17

ou sous une forme plus générale :

$$\begin{aligned} 0 &= T(p) x + B u \\ z &= C x + D u \end{aligned}$$
5- 18

On appelle matrice du système:

$$\Sigma(p) = \begin{bmatrix} T(p) & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad 5-19$$

Ce système est stable si et seulement si les zéros de $\det[T(p)]$ sont dans le demi-plan complexe gauche. Dans le cas du système de l'équation 5-17, ces zéros sont les valeurs propres de la matrice d'évolution A .

5 Les zéros de systèmes multivariables

Théorème :

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ z &= Cx \end{aligned} \quad 5-20$$

- A est de dimension $n \times n$
- B est de dimension $n \times m$
- C est de dimension $m \times n$

soit

$$H(p) = C[pI - A]^{-1}B \quad 5-21$$

sa matrice de transfert (carrée, de dimension $m \times m$) ;

alors :

$$\det[H(p)] = \frac{\Psi(p)}{\Phi(p)} \quad 5-22$$

où :

$$\Phi(p) = \det[pI - A] \quad 5-23$$

et $\Psi(p)$ est un polynôme de degré $n - m$, ou moins.

Démonstration :

En utilisant un *lemme d'inversion matricielle* :

Soit M une matrice $m \times n$ et N une matrice $n \times m$, alors :

$$(i) \quad \det[I_m + MN] = \det[I + NM]$$

(ii) si $\det[I_m + M N] \neq 0$, alors $[I_m + M N]^{-1} = I_m - M [I_n + N M]^{-1} N$

On peut calculer :

$$\det[\lambda I_m + C(p I_n - A)^{-1} B] = \lambda^m \frac{\det\left[p I_n - A + \frac{1}{\lambda} B C\right]}{\det[p I_n - A]} \quad 5-24$$

C'est une fraction rationnelle des 2 polynômes :

$$\Phi(p) = \det[p I_n - A]$$

$$\text{et } \lambda^m \det\left[p I_n - A + \frac{1}{\lambda} B C\right].$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \det[H(p)] &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \{ \det[\lambda I_m + C(p I_n - A)^{-1} B] \} \\ \Psi(p) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \lambda^m \det\left[p I_n - A + \frac{1}{\lambda} B C\right] \right\} \end{aligned} \quad 5-25$$

Pour déterminer le degré de $\Psi(p)$, il faut calculer :

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{p^m \Psi(p)}{\Phi(p)} = \lim_{|p| \rightarrow \infty} p^m \det[C(p I_n - A)^{-1} B] \quad 5-26$$

or :

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} p(p I_n - A)^{-1} = \lim_{|p| \rightarrow \infty} \left(I_n - \frac{1}{p} A\right)^{-1} = I_n \quad 5-27$$

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} p^m \det[C(p I_n - A)^{-1} B] = \lim_{|p| \rightarrow \infty} \det[C p(p I_n - A)^{-1} B] = \det[CB] \quad 5-28$$

- si $\det[CB] \neq 0$, alors $\deg[\Psi(p)] = n - m$;
- si $\det[CB] = 0$, alors $\deg[\Psi(p)] < n - m$.

Les **pôles** du système (5-20) sont les racines de $\Phi(p)$, ses **zéros** sont les racines de $\Psi(p)$.

6 Théorème de Nyquist généralisé

Pour les systèmes monovariabiles, la condition de stabilité d'un système bouclé s'exprime par le théorème de Nyquist, selon lequel il faut et il suffit que les racines du dénominateur de la boucle fermée soient dans le 1/2 plan complexe gauche.

En ce qui concerne le système bouclé multivariable de la figure 5-6, dans lequel :

$$G: \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_G(p) & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G \\ u \end{bmatrix},$$

$$K: \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_K(p) & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ z \end{bmatrix},$$

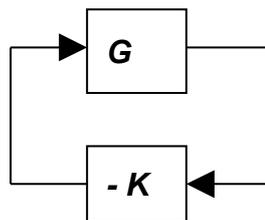


Figure 5- 6 : système bouclé multivariable.

elle est stable si et seulement si les racines du polynôme :

$$\det [T_H(p)] = \det [I + G(p) K(p)] \det [T_G(p)] \det [T_K(p)] \quad 5- 29$$

sont toutes dans le 1/2 plan complexe gauche.

7 Critère de Nyquist multivariable

Soient :

- \mathcal{D} un contour fermé dans le plan complexe, englobant tous les pôles à partie réelle positive de la boucle ouverte, c'est-à-dire les racines RHP de $\det[T_G] \det[T_K]$. On construit ce contour en prenant l'axe imaginaire (en contournant l'origine par la droite), et en fermant par un demi-cercle à droite, de rayon infini.

- p_0 le nombre de ces pôles RHP,

alors, la boucle fermée de la figure 5-6 est stable si et seulement si l'image de \mathcal{D} par $\det[I + GK]$ entoure l'origine $-p_0$ fois.

Preuve :

de l'équation 5-29 on déduit

$$\det[I + G(p)K(p)] = \frac{\det[T_H(p)]}{\det[T_G(p)]\det[T_K(p)]} \quad 5-30$$

Les pôles de la boucle ouverte sont les racines de $\det[T_G] \det[T_K]$, et $\det[T_H]$ ne doit pas avoir de racine RHP.

Remarque :

Dans le cas monovariante les matrices de transfert $G(p)$ et $K(p)$ sont des fractions rationnelles et :

$$\det[I + G(p)K(p)] = 1 + G(p)K(p) \quad , \quad 5-31$$

le nombre de tours de l'origine par l'image de \mathcal{D} par $\det[I + G(p)K(p)] = 1 + G(p)K(p)$ est égal au nombre de tours du point critique $(-1, 0)$ par l'image de \mathcal{D} par $G(p)K(p)$.

Pour que la boucle fermée soit stable, il faut que $\det[T_H]$ n'ait pas de racine RHP, donc que l'image de \mathcal{D} par $\det[T_H]$ n'entoure pas l'origine. Si $\det[T_G] \det[T_K]$ a p_0 racines RHP, l'image de \mathcal{D} par $\frac{1}{\det[T_G(p)]\det[T_K(p)]}$ fait $(-p_0)$ tours de l'origine.

Dans le cas multivariable, on montre facilement que :

$$\det[I + G(p)K(p)] = 1 + \Pi(p) \quad 5-32$$

où $\Pi(p)$ est une fraction rationnelle dont on peut calculer l'image du contour \mathcal{D} et compter le nombre d'encerclement du point critique $(-1, 0)$.

Utile pour analyser la stabilité d'un système multivariable bouclé, ce critère est inutilisable pour la synthèse de régulateur multivariable.

Chapitre 6 : Représentations fréquentielles des systèmes multivariables

Bibliographie :

J. M. MACIEJOWSKI: *Multivariable feedback design*, Addison Wesley, 1989.

B. A. FRANCIS : *A course in H_∞ control theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1987.

G. DUC et S. FONT : *Commande H_∞ et μ -analyse, des outils pour la robustesse*, Hermes Science, 1999.

1 Les valeurs singulières de matrices

Les valeurs singulières d'une matrice A , de dimension $m \times n$, à coefficients complexes, de rang r , sont les racines carrées non-négatives des valeurs propres de $\bar{A}^T A$, où \bar{A}^T est la matrice adjointe, c'est-à-dire conjuguée et transposée de A .

On peut énoncer quelques propriétés des valeurs singulières :

- les n valeurs singulières de A sont réelles, puisque $\bar{A}^T A$ est une matrice hermitienne définie non-négative, par construction ;
- on peut ordonner ces valeurs singulières :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n \quad 6-1$$

- si $r < n$, il y a $n - r$ valeurs singulières nulles. Donc, le rang de A est égal au nombre de valeurs singulières non nulles.

2 Décomposition d'une matrice en valeurs singulières

Pour toute matrice A , de dimension $m \times n$, à coefficients complexes, de rang r , il existe 2 matrices unitaires : $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, telles que :

$$\Sigma_{m,n} = U A \bar{V}^T$$

$$\Sigma_{m,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & & \\ & 0_{m-r,r} & & & 0_{m-r,n-r} & \end{bmatrix} \quad 6-2$$

$$\Sigma_{m,n} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$

où Σ_r est une matrice réelle positive, diagonale.

Remarque :

$$(M \text{ est unitaire}) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{M}^T M = I \\ M \bar{M}^T = I \\ M^{-1} = \bar{M} \\ \|M u\| = \|u\| \end{cases}$$

6- 3

3 Propriétés des valeurs singulières

- (i) $\bar{\sigma}(A) = \max_{i \leq r} [\sigma_i(A)] = \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|A x\|}{\|x\|} =: \sigma_1$
- (ii) $\underline{\sigma}(A) = \min_{i \leq r} [\sigma_i(A)] = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|A x\|}{\|x\|} =: \sigma_n$
- (iii) $\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}_i(A)$, où les $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de A
- (iv) si A^{-1} existe $\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$
- (v) si A^{-1} existe $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}$
- (vi) $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A)$, α scalaire
- (vii) $\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- (viii) $\bar{\sigma}(A \cdot B) \leq \bar{\sigma}(A) \cdot \bar{\sigma}(B)$
- (ix) $\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- (x) $\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}([A|B]) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\}$
- (xi) $\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \bar{\sigma}(A) \leq n \max_{i,j} |a_{i,j}|$
- (xii) $\sum_{i,j} \sigma_i^2(A) = \text{trace}(\bar{A}^T A)$
- (xiii) $\forall i=1,2,\dots,n; \sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i(A+B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B)$

4 Normes H_2 et H_∞ de matrices de transfert.

Dans ce chapitre on suppose que G est une matrice de transfert stable et propre d'un système d'ordre minimal (observable et commandable).

4.1 Rappels sur la norme L_2 .

Soit $x(t)$ un vecteur de signaux. Alors on appelle *norme L_2* de ce vecteur la quantité :

$$\|x\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} [x^T(t)x(t)] dt \right]^{1/2} \quad 6-4$$

si l'intégrale converge. Par le théorème de Parseval-Bessel, si $x(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$ on obtient également :

$$\|x\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [x^T(-j\omega)x(j\omega)] d\omega \right]^{1/2} \quad 6-5$$

Le vecteur x est dit L_2 si ces intégrales convergent, c'est à dire que le vecteur de signaux a une "énergie" finie.

Remarque: On définit également la norme H_2 :

$$\|x\|_2 = \left[\max_{\xi > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^T(\xi + j\omega)x(\xi + j\omega) d\omega \right) \right]^{1/2}$$

Souvent les normes L_2 et H_2 sont égales. On appelle H_2 l'ensemble des vecteurs dont la norme L_2 ou H_2 est finie :

4.2 Transmission de signaux aléatoires.

On suppose maintenant que le vecteur $x(t)$ est un vecteur de signaux aléatoires centrés dont les propriétés sont :

$$E\{x(t)\} = 0$$

$E\{x(t)x^T(t)\}$ est la variance et $\Phi_{xx}(\omega)$ est la densité spectrale de puissance (DSP), définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation :

$$\Phi_{xx}(\omega) = F\{E\{x(t)x^T(t+\tau)\}\}$$

Par ailleurs :

$$x^T x = \text{tr}(x x^T) \Rightarrow \text{tr}(E\{x x^T\}) = E\{x^T x\} \quad . \quad 6-6$$

Soit un système linéaire SISO (monovarié) défini par :

$$y(p) = G(p)u(p)$$

et soit $\Phi_{uu}(\omega)$ la DSP de $u(t)$, on calcule alors la DSP de $y(t)$:

$$\Phi_{yy}(\omega) = |G(j\omega)|^2 \Phi_{uu}(\omega) \quad .$$

Dans le cas MIMO:

$$E\{y y^T\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(\omega) d\omega \quad ,$$

$$E\{y^T y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[\Phi_{yy}(\omega)] d\omega \quad .$$

Si W est une matrice symétrique définie positive de dimension adéquate,

$$E\{y^T W y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W \Phi_{yy}(\omega)] d\omega \quad . \quad 6-7$$

Si $G(p)$ est une matrice de transfert stable, alors :

$$y(p) = G(p)u(p) \Rightarrow \Phi_{yy}(\omega) = G(j\omega) \Phi_{uu}(\omega) G^T(-j\omega) \quad .$$

Comme :

$$\text{tr}[W \Phi_{yy}(\omega)] = \text{tr}[W^{1/2} \Phi_{yy}(\omega) W^{1/2}] = \text{tr}[W^{1/2} G(j\omega) \Phi_{uu}(\omega) G^T(-j\omega) W^{1/2}] \quad 6-8$$

on déduit que :

$$E\{y^T W y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W^{1/2} G(j\omega) \Phi_{uu}(\omega) G^T(-j\omega) W^{1/2}] d\omega \quad . \quad 6-9$$

On définit les valeurs singulières d'une matrice A à coefficients complexes par :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^A A)} \quad , \text{ où } A^A(j\omega) = A^T(-j\omega) \quad .$$

On a donc $tr[A^A A] = \sum_i \sigma_i^2(A)$

et

$$E\{y^T W y\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \sigma_i^2[W^{1/2} G(j\omega)] \sigma_{uu}^{1/2}(\omega) d\omega \quad 6-10$$

4.3 Les gains principaux de matrices de transfert

Pour chaque valeur de ω , on peut décomposer la matrice de transfert $G(j\omega)$ en valeurs singulières, ordonnées dans le sens décroissant. On peut alors créer 2 fonctions réelles positives et continues :

$$\begin{aligned} \forall \omega > 0, \bar{\sigma}[G(j\omega)] &= : \max_i \{ \sigma_i[G(j\omega)] \} \\ \forall \omega > 0, \underline{\sigma}[G(j\omega)] &= : \inf_i \{ \sigma_i[G(j\omega)] \} \end{aligned} \quad 6-11$$

Ces fonctions s'appellent les gains principaux (supérieur et inférieur) de la matrice de transfert.

4.4 Les normes de matrices de transfert

La norme L_2 induite :

$$\|G(j\omega)\|_2 = \frac{\|y(j\omega)\|_2}{\|x(j\omega)\|_2} \quad 6-12$$

$$\|G(j\omega)\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} \left[G^T(j\omega) G(j\omega) \right] d\omega \right\}^{1/2} \quad 6-13$$

Remarque:

Si $\Phi_{uu}(\omega) = I$, alors la relation 6-10 devient :

$$E\{y^T W y\} = \|G W^{1/2}\|_2^2 \quad 6-14$$

La norme L_∞ :

$$\|G(j\omega)\|_\infty =: \max_x \{ \|G(j\omega)x(j\omega)\|_2; \|x(j\omega)\|_2=1 \} \quad 6-15$$

On montre que :

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \max_\omega \{ \bar{\sigma}[G(j\omega)] \} \quad 6-16$$

La norme H_∞ est induite de la même manière à partir de la norme H_2 .

Remarques :

- Dans le cas monovarié : $\|g(j\omega)\|_\infty = \max_\omega \{ |g(j\omega)| \}$
- G est une matrice de transfert propre si $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\sigma}[G(j\omega)] < \infty$
- G est une matrice de transfert strictement propre si $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\sigma}[G(j\omega)] = 0$.

4.5 Interprétation fréquentielle de LQG.

Soit le système d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad 6-17$$

Les bruits w et v sont supposés indépendants, blancs et gaussiens, c'est à dire :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(\tau) & v^T(\tau) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \quad 6-18$$

Les matrices W ($n \times n$) et V (1×1) sont les matrices de covariance des bruits, donc symétriques, définies positives.

La commande LQG stationnaire (à horizon infini) consiste à calculer le retour d'état K et le gain d'observateur L tel que le critère

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt \right\}$$

soit minimisé.

Soient $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$ symétrique définie positive; alors

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [z^T(t) M z(t)] dt \right\} \quad 6-19$$

Comme $[z^T(t) M z(t)]$ est une forme quadratique (donc positive) ce critère LQG est minimum si et seulement si la quantité $J = E \{ z^T(t) M z(t) \}$ est minimisée, $\forall t > 0$:

$$J = E \{ z^T(t) M z(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [M \Phi_{zz}(\omega)] d\omega \quad 6-20$$

Soit $H(j\omega)$ la matrice de transfert du système d'entrée $\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$ et de sortie $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$, alors:

$$\Phi_{zz}(\omega) = H(j\omega) \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} H^T(-j\omega) \quad 6-21$$

donc:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [M^{1/2} H(j\omega) \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} H^T(-j\omega) M^{1/2}] d\omega \quad 6-22$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[\begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} H(j\omega) \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} H^T(-j\omega) \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \right] d\omega \quad 6-23$$

En développant le calcul selon la relation 6-10:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{array}{l} \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} H_{11}(j\omega) W^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} H_{12}(j\omega) V^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} H_{21}(j\omega) W^{1/2}) \\ + \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} H_{22}(j\omega) V^{1/2}) \end{array} \right] d\omega \quad 6-24$$

Si δ_1 et δ_2 sont des bruits blancs gaussiens de variance unitaire, le schéma-bloc du système est :

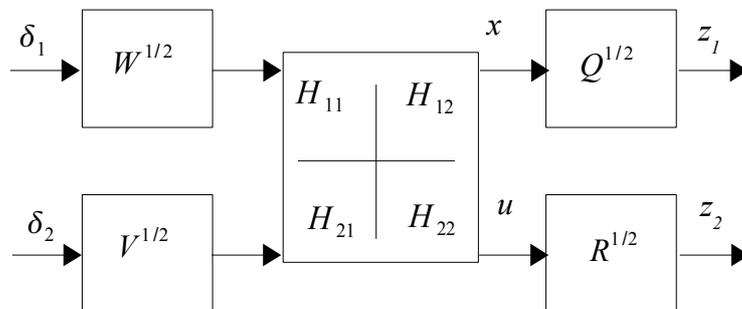


Figure 6-1

Soit $T(j\omega)$ la matrice de transfert de $\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$ vers $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, la commande optimale ($u = f(y)$) minimise le critère :

$$J = \|T(j\omega)\|_2^2 \quad 6-25$$

5 Calcul de norme H_∞

Soit G la matrice de transfert définie à partir d'une représentation d'état :

$$G = F_u \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{p} I \right\}, \quad 6-26$$

alors :

$$(\|G\|_\infty < \gamma) \Leftrightarrow (M_\gamma \text{ n'a pas de valeur propre imaginaire pure})$$

où la matrice M_γ est une matrice hamiltonienne définie par :

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A & \frac{B B^T}{\gamma} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \quad 6-27$$

Preuve :

Soit $\tilde{G}(p) = G^T(-p)$, la matrice conjuguée spectrale de $G(p)$.

On montre successivement :

$$\begin{aligned} (\|G\|_\infty < \gamma) &\Leftrightarrow (\forall \omega, \forall i, \sigma_i[G(j\omega)] < \gamma) \\ &\Leftrightarrow (\forall \omega, \forall i, \lambda_i[\tilde{G}(j\omega)G(j\omega)] < \gamma^2) \\ &\Leftrightarrow (\forall \omega, \forall i, \lambda_i[\gamma^2 I - \tilde{G}(j\omega)G(j\omega)] > 0) \\ &\Leftrightarrow (\forall \omega, [\gamma^2 I - \tilde{G}(j\omega)G(j\omega)] > 0) \\ &\Leftrightarrow ([\gamma^2 I - \tilde{G}(j\omega)G(j\omega)] \text{ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire}) \end{aligned} \quad 6-28$$

Une réalisation de $[\gamma^2 I - \tilde{G}(p)G(p)]^{-1}$ est représentée sous la forme de la matrice de système :

$$\begin{bmatrix} A & \frac{BB^T}{\gamma} & \frac{B}{\gamma^2} \\ \frac{-C^T C}{\gamma} & -A^T & 0 \\ 0 & \frac{B^T}{\gamma} & \frac{I}{\gamma^2} \end{bmatrix} \quad 6-29$$

Les zéros de $[\gamma^2 I - \tilde{G}(p)G(p)]$ sont les valeurs propres de la matrice d'évolution :

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A & \frac{BB^T}{\gamma} \\ \frac{-C^T C}{\gamma} & -A^T \end{bmatrix} \quad 6-30$$

Algorithme : Pour évaluer la norme H_∞ d'une matrice de transfert, on choisit une valeur arbitraire de γ , on calcule les valeurs propres de la matrice M_γ , si aucune n'est imaginaire pure on diminue γ et on recommence, sinon on augmente γ et on recommence. On ne peut donc pas calculer la valeur de la norme H_∞ , mais seulement en donner une borne supérieure, aussi proche que l'on veut.

6 Théorème du faible gain (Zames 1981)

Soit le système bouclé de la figure 6-6 dans laquelle les système G et K sont stables, **une condition suffisante** de stabilité de la boucle fermée est que :

$$\|GK\|_\infty < 1 \quad 6-31$$

Preuve : découle du théorème de Nyquist.

Par l'absurde. Supposons que la relation 6-31 soit vraie et que la boucle fermée soit instable : alors selon le théorème de Nyquist, l'image du contour \mathcal{D} par $\det[I + GK]$ entoure l'origine. Il existe donc une pulsation ω_0 et $\epsilon \in [0, 1]$ tels que $\det[I + \epsilon G(j\omega_0)K(j\omega_0)] = 0$.

Par conséquent, il existe une valeur propre $\lambda_i[I + \epsilon G(j\omega_0)K(j\omega_0)] = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une valeur propre $\mu_i[\epsilon G(j\omega_0)K(j\omega_0)] = -1$, $\mu_i[G(j\omega_0)K(j\omega_0)] = \frac{-1}{\epsilon}$.

Par la propriété (iii) des valeurs singulières :

$$\mu_i[G(j\omega_0)K(j\omega_0)] \leq \bar{\sigma}[G(j\omega_0)K(j\omega_0)] \quad 6-32$$

donc :

$$\bar{\sigma}[G(j\omega_0)K(j\omega_0)] \geq \frac{1}{\epsilon}$$

6- 33

Comme $0 \leq \epsilon \leq 1$, les relations 6-31 et 6-33 sont contradictoires.

7 Description d'incertitudes non structurées multivariables

Le chapitre 3 traite de système monovariante, il est donc nécessaire d'adapter les définitions au cas multivariante :

- forme additive :

$$G(p) = G_0(p) + \Delta_a(p)$$

avec

$$\bar{\sigma}[\Delta_a(j\omega)] \leq \delta_a(\omega), \forall \omega > 0$$

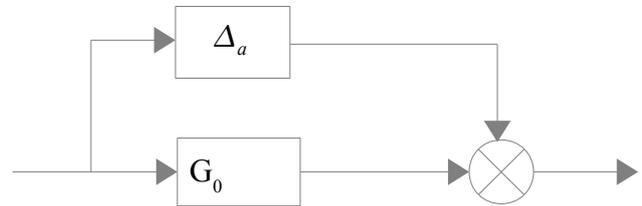


Figure 6-2: incertitudes additives

- forme multiplicative en entrée :

$$G(p) = G_0(p)[I + \Delta_e(p)]$$

$$\bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] \leq \delta_e(\omega), \forall \omega > 0$$

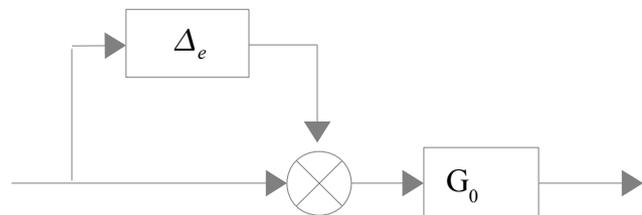


Figure 6-3 : incertitudes multiplicatives en entrée

- forme multiplicative en sortie :

$$G(p) = [I + \Delta_s(p)]G_0(p)$$

$$\bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)] \leq \delta_s(\omega), \forall \omega > 0$$

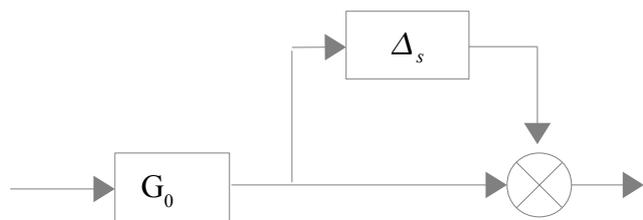


Figure 6-4 : incertitudes multiplicatives en sortie

8 Théorème de stabilité robuste

Soit le système incertain (incertitudes multiplicatives en entrée), bouclé par un régulateur K :

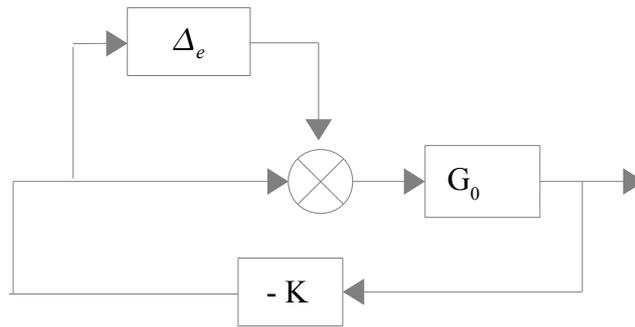


Figure 6-5 : système incertain bouclé.

On peut redessiner ce schéma fonctionnel :

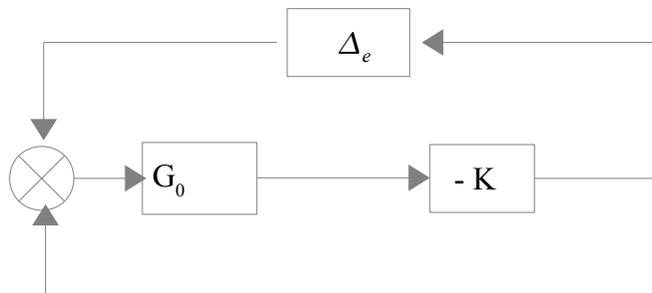


Figure 6-6: système incertain bouclé.

Ou encore :

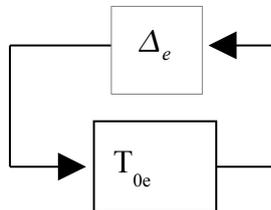


Figure 6-7: système incertain bouclé.

Dans lequel T_{0e} représente la boucle fermée nominale :

$$T_{0e}(p) = [I + K(p)G_0(p)]^{-1} K(p)G_0(p) \quad 6-34$$

Théorème :

- Si $\Delta_e(p)$ est une matrice de transfert stable inconnue, vérifiant :

$$\bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] \leq \delta_e(\omega), \quad \forall \omega > 0$$

- si T_{0e} est stable,
alors la boucle fermée incertaine de la figure 6-6 est stable si et seulement si :

$$\bar{\sigma}[T_{0e}(j\omega)] < \frac{1}{\delta_e(\omega)}, \quad \forall \omega \quad 6-35$$

Preuve :

- condition suffisante :

La relation (6-35) permet d'écrire, $\forall \omega$:

$$\begin{aligned} \delta_e(\omega) \bar{\sigma}[T_{0e}(\omega)] &< 1 \\ \bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] \bar{\sigma}[T_{0e}(\omega)] &< 1 \\ \bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega) T_{0e}(\omega)] &< 1 \end{aligned}$$

et donc:

$$\|\Delta_e(j\omega) T_{0e}(j\omega)\|_{\infty} < 1$$

Le théorème du petit gain permet de dire que la boucle fermée est stable.

- Condition nécessaire :

Supposons que la relation (6-35) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire :

$$\exists \omega_0 \text{ tq. } \bar{\sigma}[T_{0e}(j\omega_0)] \geq \frac{1}{\delta_e(\omega_0)}$$

et donc $\exists \omega_0 \text{ tq. } \sigma_1(j\omega_0) \delta_e(\omega_0) > 1$

On peut décomposer $T_{0e}(j\omega_0)$ en valeurs singulières :

$$T_{0e}(j\omega_0) = U \Sigma(j\omega_0) \bar{V}^T$$

$$\Sigma(j\omega_0) = \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n(j\omega_0) \end{bmatrix}$$

On choisit la matrice d'erreur :

$$\Delta_e(j\omega_0) = V D(j\omega_0) \bar{U}^T$$

$$D(j\omega_0) = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \delta_e(\omega_0)$$

Si $\epsilon < 1$ on vérifie bien que $\bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega_0)] \leq \delta_e(\omega_0)$.

Pour appliquer le théorème de Nyquist on calcule :

$$\begin{aligned} \det[I - T_{0e}(j\omega_0)\Delta_e(j\omega_0)] &= \det[I - U \Sigma(j\omega_0) \bar{V}^T V D(j\omega_0) \bar{U}^T] \\ &= \det[I - U \Sigma(j\omega_0) D(j\omega_0) \bar{U}^T] \\ &= \det[U] \det[I - \Sigma(j\omega_0) D(j\omega_0)] \det[\bar{U}^T] \\ &= \det[I - \Sigma(j\omega_0) D(j\omega_0)] \\ &= \det \left[I - \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2(j\omega_0) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n(j\omega_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \delta_e(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \det \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_1(j\omega_0) \epsilon \delta_e(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= 1 - \sigma_1(j\omega_0) \epsilon \delta_e(\omega_0) \end{aligned}$$

soit alors :

$$\epsilon = \frac{1}{\sigma_1(j\omega_0) \delta_e(\omega_0)}$$

on a bien $\epsilon < 1$ et $\det[I - T_{0e}(j\omega_0)\Delta_e(j\omega_0)] = 0$

et le théorème de Nyquist n'est plus vérifié. On a construit un système bouclé, vérifiant la relation d'incertitude, instable.

La relation 6-35 est bien une condition nécessaire.

Remarque :

On peut écrire des théorèmes équivalents pour des incertitudes multiplicatives en sortie ou additives.

Chapitre 7 : Synthèse multivariable robuste, minimisation de sensibilité mixte

1 Optimisation L_2 et modelage de transfert de boucle (Loop Shaping)

Reprenons le système du chap. III, § 3, figure 3-15, équations 3-19 à 3-23. Soient les matrices de transfert :

$$F(p) = C[pI - A]^{-1} B, F_v(p) = C_{b1}[pI - A_{b1}]^{-1} B_{b1}, F_w(p) = C_{b2}[pI - A_{b2}]^{-1} B_{b2} .$$

Soit $K(p)$ la matrice de transfert du régulateur à calculer. Le système bouclé peut se représenter selon la figure 7-1 :

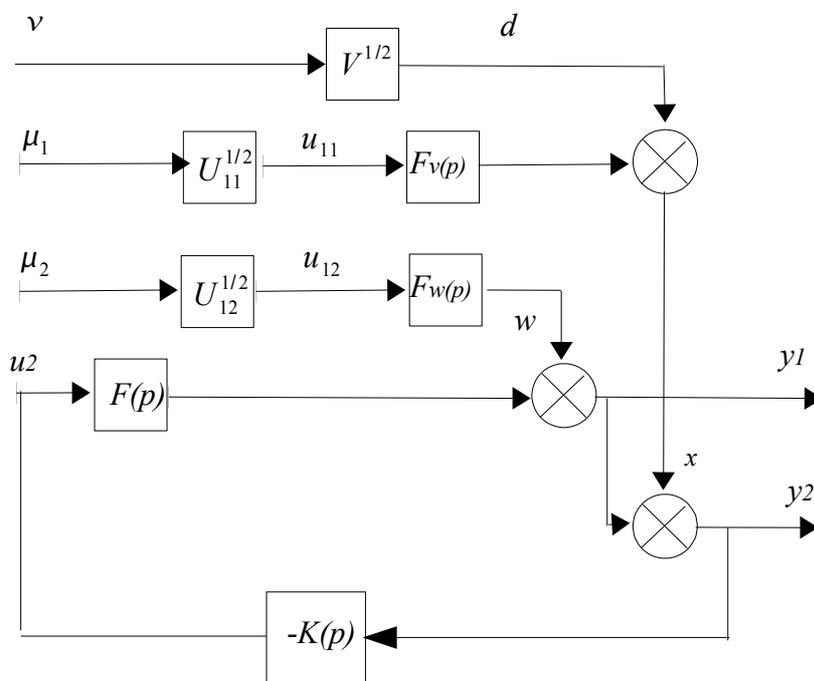


Figure 7-1

Les entrées exogènes (v, μ_1, μ_2) vérifient :

$$E \begin{bmatrix} v(t) \\ \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T(\tau), \mu_1^T(\tau), \mu_2^T(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad 7-1$$

On peut écrire les matrices de transfert de sensibilité et sensibilité complémentaire en boucle fermée:

$$\begin{aligned} S_i &= [I + K F]^{-1}; & S_o &= [I + F K]^{-1} \\ T_i &= K F [I + K F]^{-1}; & T_o &= [I + F K]^{-1} F K \end{aligned} \quad 3-2$$

et exprimer les vecteurs u_2 et y_1 :

$$\begin{aligned} u_2 &= -S_i K V^{1/2} v - S_i K F_v U_{11}^{1/2} \mu_1 - S_i K F_w U_{12}^{1/2} \mu_2 \\ y_1 &= -T_o V^{1/2} v - T_o F_v U_{11}^{1/2} \mu_1 + S_o F_w U_{12}^{1/2} \mu_2 \end{aligned} \quad 7-3$$

La commande LQG qui minimise le critère de l'équation 3-24 minimise également :

$$J = E \{ y_1^T Q y_1 + u_2^T R u_2 \} \quad 7-4$$

En appliquant les relations 6-20 à 6-24, on trouve:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o V^{1/2}) \\ &+ \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o F_v U_{11}^{1/2}) \\ &+ \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} S_o F_w U_{12}^{1/2}) \\ &+ \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K F_v U_{11}^{1/2}) \\ &+ \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K V^{1/2}) \\ &+ \sum \sigma_i^2 (R^{1/2} S_i K F_w U_{12}^{1/2}) \end{aligned} \right] d\omega \quad 7-5$$

Ce critère représente donc le carré de la norme L_2 de la matrice de transfert des entrées exogènes v, μ_1, μ_2 vers les sorties u_2 et y_1 .

On peut remarquer que si on force $V \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 0$, il reste :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} T_o F_v U_{11}^{1/2}) + \sum \sigma_i^2 (Q^{1/2} S_o F_w U_{12}^{1/2}) \right] d\omega \quad 7-6$$

Il s'agit alors de minimiser la norme L_2 des matrices de sensibilité et sensibilités complémentaires, pondérées en fréquences. C'est la procédure *de modelage de sensibilités* (Loop Shaping).

Dans le cas SISO, ce critère porte sur les modules des fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Q |T|^2 |F_v|^2 U_{11} + Q |S|^2 |F_w|^2 U_{12}) d\omega \quad 7-7$$

Le module de S est rendu *petit* dans les plages de fréquences où le module de F_w est *grand*, alors que le module de T est rendu *petit* dans les plages de fréquences où le module de F_v est *grand*.

Bien entendu les contraintes habituelles persistent:

- en basses fréquences:
 - $|T| \approx 1$ quel que soit $|F_v|$
 - $|S| \approx 1/|F_w|$
- en hautes fréquences:
 - $|T| \rightarrow 0$ mais il faut que $|F_v| < \infty$ pour que l'intégrale converge,
 - $|S| \rightarrow 1$ mais il faut que $|F_w| \rightarrow 0$ pour que l'intégrale converge.

Exemple

Soient les fonctions de transfert:

$$F(p) = \frac{30}{p^2 + p + 1}$$

$$F_v(p) = \frac{1000p + 3000}{p^2 + 60p + 900}$$

$$F_w(p) = \frac{100}{p^2 + 0,1 p}$$

Le critère LQG:

$$J_{LQG} = E \left\{ \int_0^{\infty} [y_1^T y_1 + u_2^T R u_2] dt \right\}$$

avec

$$\begin{bmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 0,001; V = 0,001$$

donne le régulateur :

$$K(p) = \frac{4,34 e4 p^5 + 2,75 e6 p^4 + 4,78 e7 p^3 + 1,37 e8 p^2 + 1,35 e8 p + 9 e7}{p^6 + 3,16 e4 p^5 + 1,68 e6 p^4 + 4,33 e7 p^3 + 2,68 e8 p^2 + 2,64 e7 p + 3001}$$

le diagramme de Black de la boucle ouverte :

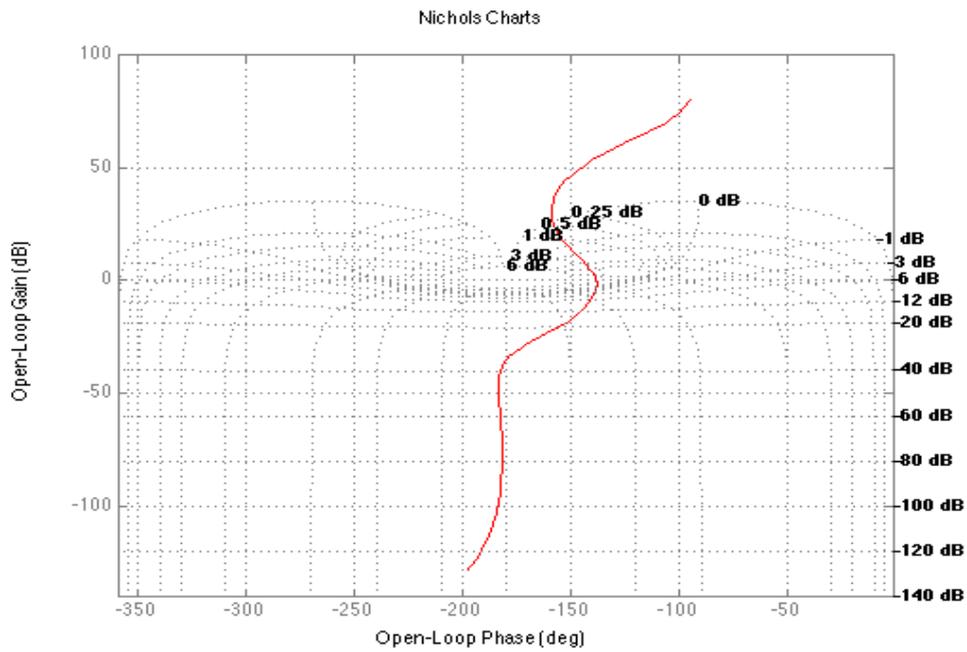


Figure 7-2

le diagramme de Bode des fonctions de sensibilité et des pondérations (module):

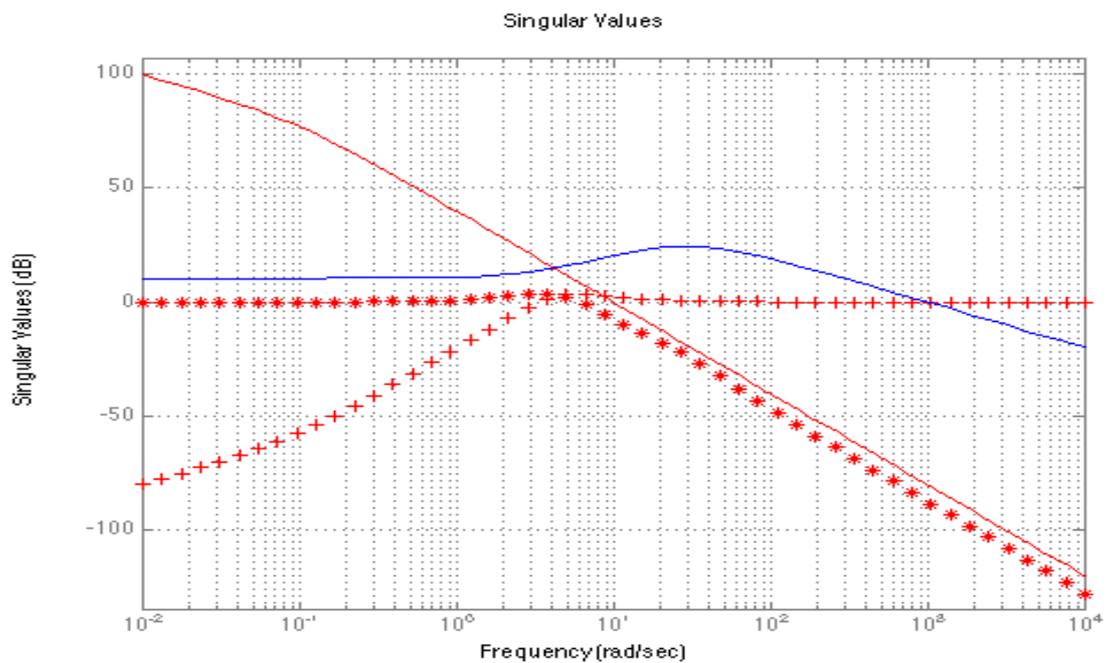


Figure 7-3

(+ : S ; --- : F_w ; * : T ; --- F_v)

2 La spécification de performance

Au chapitre 3 on a défini les fonctions de sensibilité pour les systèmes monovariables. Cette notion doit être étendue aux systèmes multivariables, en utilisant le gain principal (supérieur).

- sensibilité en sortie : c'est la matrice de transfert entre une perturbation de sortie et la sortie, selon la figure 7-1 :

$$S_{0,s}(j\omega) = [I + G_0(j\omega)K(j\omega)]^{-1} \quad 7-8$$

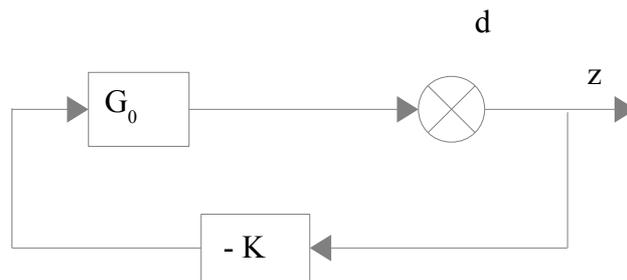


Figure 7-4: sensibilité en sortie.

- sensibilité en entrée : c'est la matrice de transfert entre une perturbation d'entrée (consigne) et l'erreur, selon la figure 7-2 :

$$S_{0,e}(j\omega) = [I + K(j\omega)G_0(j\omega)]^{-1} \quad 7-9$$

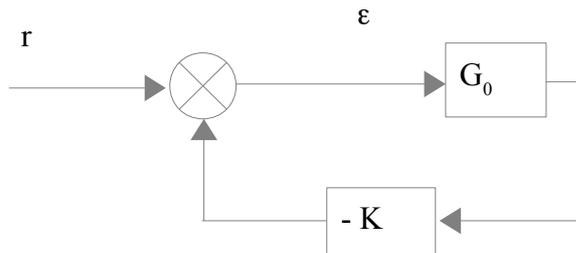


Figure 7-5 : sensibilité en entrée.

On peut alors, par exemple, fixer un objectif de performance sur la sensibilité en entrée sous la forme d'une contrainte sur son gain principal : la relation (7-18) devient :

$$\bar{\sigma}[S_{0,e}(j\omega)] \leq m(\omega), \forall \omega \quad 7-10$$

Cette fonction est de la forme décrite par la figure 3-6. Pour que l'on puisse l'utiliser dans la synthèse, il faut représenter cette fonction $m(\omega)$ par le module d'une fraction rationnelle propre et stable, d'inverse propre et stable.

Soit par exemple la fraction rationnelle:

$$W_1^{-1}(j\omega) = a \frac{1 + j\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\omega}{\omega_0}} \quad 7-11$$

alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} |W_1^{-1}(j\omega)| &= a; (a < 1) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_1^{-1}(j\omega)| &= b; (b \geq 1) \end{aligned} \quad 7-12$$

Pour a et b fixés, le problème est de trouver la plus grande valeur de ω_0 possible telle que :

$$\bar{\sigma}[S_{0,e}(j\omega)] \leq |W_1^{-1}(j\omega)|, \forall \omega \quad 7-13$$

3 La contrainte de stabilité robuste

Elle est donnée par le théorème de stabilité robuste et la relation 6-35, adaptée à l'incertitude de sortie. Cette contrainte doit être réécrite à l'aide d'une fraction rationnelle propre et stable, d'inverse propre et stable. Soit W_3 une telle fraction rationnelle, vérifiant:

$$|W_3^{-1}(j\omega)| \geq \bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)], \forall \omega \quad 7-14$$

alors la contrainte de stabilité robuste s'écrit :

$$\bar{\sigma}[T_{0,s}(j\omega)] \leq |W_3^{-1}(j\omega)|, \forall \omega \quad 7-15$$

4 La contrainte sur la commande

On peut contraindre le niveau de commande par le gain principal supérieur de la matrice de transfert

R_0 défini par :

$$R_0(j\omega) = [I + K(j\omega)G_0(j\omega)]^{-1}K(j\omega) \quad 7-16$$

Il faut alors créer une fraction rationnelle (souvent un simple gain) W_2 telle que:

$$\bar{\sigma}[R_{0,s}(j\omega)] \leq |W_2^{-1}(j\omega)|, \forall \omega \quad 7-17$$

5 Le système augmenté : problème standard

Le problème de synthèse consiste à chercher le régulateur K stabilisant G_0 et tel que la bande passante ω_0 soit la plus grande possible, tout en respectant les contraintes 7-13, 7-15 et 7-17.

On peut réécrire les relations 7-13, 7-15 et 7-17 sous la forme:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[S_{0,e}(j\omega)] &\leq 1 \\ |W_2(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[R_0(j\omega)] &\leq 1 \\ |W_3(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[T_{0,s}(j\omega)] &\leq 1 \end{aligned} \quad 7-18$$

et représenter le schéma fonctionnel:

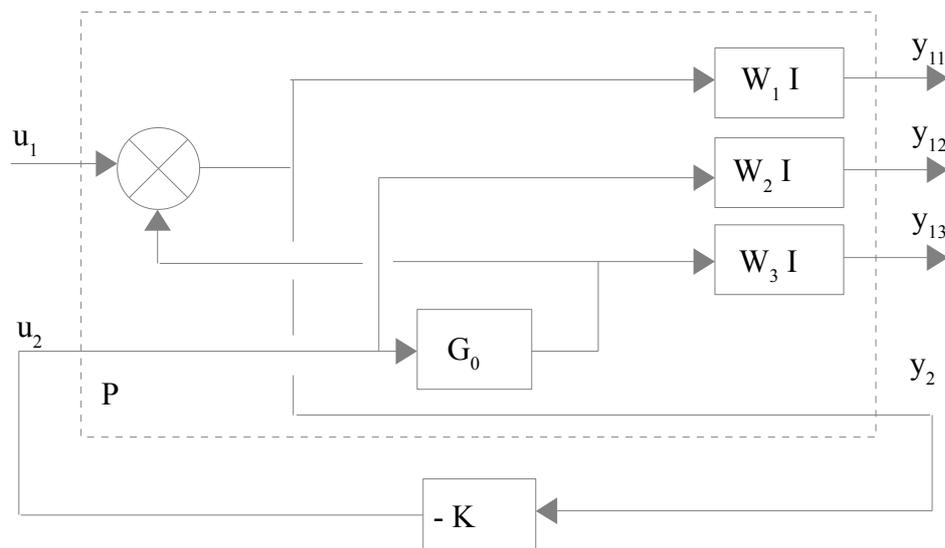


Figure 7-6: schéma fonctionnel représentant le problème standard

On peut écrire :

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = P U \quad 7-19$$

et

$$u_2 = -K y_2$$

6 La spécification H^∞

La propriété (vi) des valeurs singulières permet d'écrire:

$$\begin{aligned} |W_1(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[S_{0,e}(j\omega)] &= \bar{\sigma}[W_1(j\omega) \cdot S_{0,e}(j\omega)] \\ |W_2(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[R_0(j\omega)] &= \bar{\sigma}[W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega)] \\ |W_3(j\omega)| \cdot \bar{\sigma}[T_{0,s}(j\omega)] &= \bar{\sigma}[W_3(j\omega) \cdot T_{0,s}(j\omega)] \end{aligned} \quad 7-20$$

La propriété (x) permet d'écrire la condition suffisante:

$$\left(\bar{\sigma} \begin{bmatrix} W_1(j\omega) \cdot S_{0,e}(j\omega) \\ W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega) \\ W_3(j\omega) \cdot T_{0,s}(j\omega) \end{bmatrix} \leq 1, \forall \omega \right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}[W_1(j\omega) \cdot S_{0,e}(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \\ \bar{\sigma}[W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \\ \bar{\sigma}[W_3(j\omega) \cdot T_{0,s}(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \end{cases} \quad 7-21$$

Il suffit donc d'assurer que:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(j\omega) \cdot S_{0,e}(j\omega) \\ W_2(j\omega) \cdot R_0(j\omega) \\ W_3(j\omega) \cdot T_{0,s}(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad 7-22$$

La synthèse consiste à chercher la plus grande valeur de ω_0 pour laquelle on puisse trouver un régulateur K , qui stabilise G_θ , et pour lequel on vérifie:

$$\|F_t(P, K)\|_\infty \leq 1 \quad 7-23$$

Remarque:

Dans tous les cas, la relation

$$S_0 + T_0 = I \quad 7-24$$

permet d'écrire:

$$1 = \bar{\sigma}(T_0 + S_0) \leq \bar{\sigma}(T_0) + \bar{\sigma}(S_0) \leq |W_3^{-1}| + |W_1^{-1}| \quad 7-25$$

qui exprime une condition nécessaire à l'existence d'une solution au problème de synthèse:

$$\forall \omega, |W_3^{-1}| + |W_1^{-1}| \geq 1 \quad 7-26$$

Cette relation exprime le dilemme performance / robustesse.

7 Matrices de transfert premières

7.1 Définitions

Deux matrices de transfert $U(p)$ et $V(p)$ sont **premières à droite** (resp. premières à gauche) si leur facteur commun est stable et d'inverse stable:

$$\left(\begin{array}{l} U(p) \text{ et } V(p) \text{ sont} \\ \text{premières à droite} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} U(p) = W(p)X(p) \\ V(p) = Z(p)X(p) \end{array} \Rightarrow X(p) \text{ et } X^{-1}(p) \text{ sont stables} \right) \quad 7-27$$

$$\left(\begin{array}{l} U(p) \text{ et } V(p) \text{ sont} \\ \text{premières à gauche} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} U(p) = X(p)W(p) \\ V(p) = X(p)Z(p) \end{array} \Rightarrow X(p) \text{ et } X^{-1}(p) \text{ sont stables} \right) \quad 7-28$$

7.2 Théorèmes

• *Bezout:*

$U(p)$ et $V(p)$ sont premières à droite si et seulement si il existe $X(p)$ et $Y(p)$ telles que:

$$X(p)U(p) + Y(p)V(p) = I$$

$U(p)$ et $V(p)$ sont premières à gauche si et seulement si il existe $X(p)$ et $Y(p)$ telles que:

$$U(p)X(p) + V(p)Y(p) = I$$

• *factorisations premières de matrices de transfert:*
Soit $G(p)$ une matrice de transfert propre, alors:

$$\begin{aligned} \exists U(p), V(p) \text{ premières à droite et stables} \\ \exists \tilde{U}(p), \tilde{V}(p) \text{ premières à gauche et stables} \end{aligned}$$

telles que:

$$\begin{aligned} G(p) &= U(p)V^{-1}(p) \\ G(p) &= \tilde{V}^{-1}(p)\tilde{U}(p) \end{aligned}$$

• *Lemme*
Soit $G(p)$ une matrice de transfert propre, alors:

$$\begin{aligned} \exists U(p), V(p) \text{ premières à droite et stables} \\ \exists \tilde{U}(p), \tilde{V}(p) \text{ premières à gauche et stables} \end{aligned}$$

telles que:

$$G(p) = U(p)V^{-1}(p) = \tilde{V}^{-1}(p)\tilde{U}(p)$$

alors

$$(G(p) \text{ est stable}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V^{-1}(p) \text{ est stable} \\ \tilde{V}^{-1}(p) \text{ est stable} \end{pmatrix}$$

7- 29

Preuve:

$$\det[G(p)] = \det[U(p)] \det[V^{-1}(p)]$$

or on a vu (5-22)

$$\det[G(p)] = \frac{\Psi_G(p)}{\Phi_G(p)}$$

où $\Phi_G(p) = \det(pI - A_G)$.

On a de même:

$$\det[U(p)] = \frac{\Psi_U(p)}{\Phi_U(p)}$$

$$\det[V^{-1}(p)] = \frac{\Psi_{V^{-1}}(p)}{\Phi_{V^{-1}}(p)}$$

et donc $\Phi_G(p) = \Phi_U(p) \cdot \Phi_{V^{-1}}(p)$.

Comme $U(p)$ est stable par hypothèse, les éventuels zéros RHP de $\Phi_G(p)$ sont des zéros de $\Phi_{V^{-1}}(p)$.

• *Théorème de stabilité interne*

Le système bouclé de la figure 7-7 vérifie la propriété de stabilité interne si toutes les matrices de transfert que l'on peut écrire sont stables. C'est à dire:

$$\left(\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \right) \text{ et } H_{ij} \text{ stable } \forall i, j$$

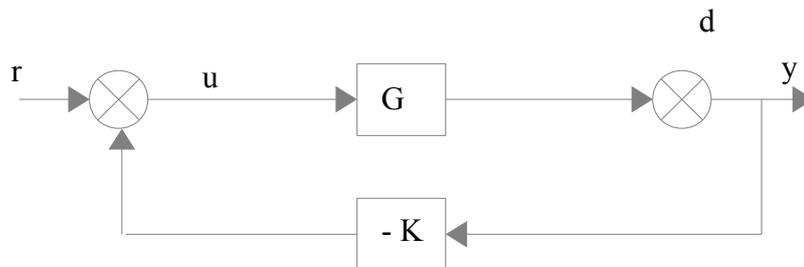


Figure 7-7 : système multivariable bouclé.

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité interne est:

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} \text{ est stable}$$

Preuve:

$$H = \begin{bmatrix} (I+KG)^{-1} & -(I+KG)^{-1}K \\ (I+GK)^{-1}G & (I+GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

puis on vérifie que:

$$H \begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix} H = I$$

d'où:

$$H = \begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1}$$

Remarque: la condition de stabilité interne est plus forte que la stabilité simple: il peut arriver que des pôles RHP de la boucle fermée soient simplifiés par des zéros RHP. La stabilité interne interdit de telles simplifications puisqu'elles ne peuvent pas apparaître sur tous les transferts de boucle fermée simultanément.

• *Théorème de stabilité des factorisations premières.*

Soient les factorisations premières de G et K :

$$\begin{aligned} G &= N M^{-1} = \tilde{M}^{-1} \tilde{N} \\ K &= U V^{-1} = \tilde{V}^{-1} \tilde{U} \end{aligned} \quad \text{où : } \left(\begin{array}{l} M, N, \tilde{M}, \tilde{N} \\ U, V, \tilde{U}, \tilde{V} \end{array} \text{ sont premières } 2 \text{ à } 2 \right)$$

alors la paire $(G, -K)$ est stable de manière interne (c'est à dire que la boucle fermée de G et $-K$ est stable de manière interne) si et seulement si:

$$\begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} \text{ est stable}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \tilde{V} & \tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^{-1} \text{ est stable}$$

Preuve:

$$\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & UV^{-1} \\ -NM^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1}$$

Par le théorème de Bezout:

$$(N \text{ et } M \text{ premières}) \Leftrightarrow (\exists X_1 \text{ et } Y_1 \text{ stables tq. } X_1 M + Y_1 N = I)$$

$$(U \text{ et } V \text{ premières}) \Leftrightarrow (\exists X_2 \text{ et } Y_2 \text{ stables tq. } X_2 V + Y_2 U = I)$$

Soient:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ -X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} 0 & -Y_1 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ce sont 2 matrices stables.}$$

Alors:

$$X \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} \text{ sont premières}$$

donc

$$\left(\begin{bmatrix} I & K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} \text{ stable} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} \text{ stable} \right)$$

La démonstration est identique pour la factorisation à gauche.

8 L'algorithme de Glover-Doyle

Bibliographie:

DOYLE J.C., GLOVER K., KARGONEKAR P.P., FRANCIS B.A., "State-space solutions to standard H₂ and H_∞ control problems", *I.E.E.E. Trans. Automatic Control*, Vol. 34, n° 8, 1989.

Le problème standard H_∞ est de trouver une famille de régulateurs K stabilisant le système augmenté P, et tel que :

$$\|F_1(P, K)\|_{\infty} < \gamma, \gamma \text{ réel positif donné.} \quad 7-30$$

Le système augmenté de la figure 7-6 s'écrit:

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad 7-31$$

Le calcul de régulateur à retour de sortie nécessite la résolution des 2 équations de Riccati associées aux matrices hamiltoniennes H₁ et H₂ :

$$\begin{aligned} X &= Ric(H_1) \\ Y &= Ric(H_2) \end{aligned} \quad 7-32$$

où:

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^2 B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -\tilde{C}_1^T \tilde{C}_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \\ H_2 &= \begin{bmatrix} A - B_1 D_{21}^T C_2 & \gamma^2 C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 7-33$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= B_1 (I - D_{21}^T D_{21}) \\ \tilde{C}_1 &= (I - D_{12}^T D_{12}) C_1 \end{aligned}$$

Alors, le problème est résolu si :

- $X \geq 0, Y \geq 0$ 7-34

- le rayon spectral : $\rho(XY) < \gamma^2$ 7- 35

- $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$. 7- 36

La famille de régulateurs K est donnée par $K = F_l(J, Q)$ où Q est stable, propre et $\|Q\|_\infty < \gamma$.

$$J = \begin{bmatrix} A + B_2 F + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + Z H (C_2 + \gamma^{-2} D_{12} B_1^T X) & -Z H & Z (B_2 + \gamma^{-2} Y C_1^T D_{12}) \\ F & 0 & I \\ -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X) & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = -(B_2^T X + D_{12}^T C_1) \quad 7- 37$$

$$H = -(Y C_2^T + B_1 D_{21}^T)$$

$$Z = (I - \gamma^2 Y X)^{-1}$$

Si toutes les conditions ci-dessus ne sont pas vérifiées, il faut augmenter γ et recommencer. La solution optimale est donnée par la plus petite valeur de γ pour laquelle on trouve une solution.

Remarques:

- Si le problème est de type Minimisation de Sensibilité Mixte, on cherche plutôt le jeu de pondérations tel que l'on trouve une solution pour $\gamma = 1$: c'est une solution sub-optimale. On s'attache dans ce cas à vérifier le caractère "passe-tout" du système augmenté bouclé: le gain principal doit avoir une réponse en fréquence plate à 0dB, sur la plage de fréquence la plus large possible.
- On peut de cette façon résoudre des problèmes d'optimisation sous contrainte très divers.

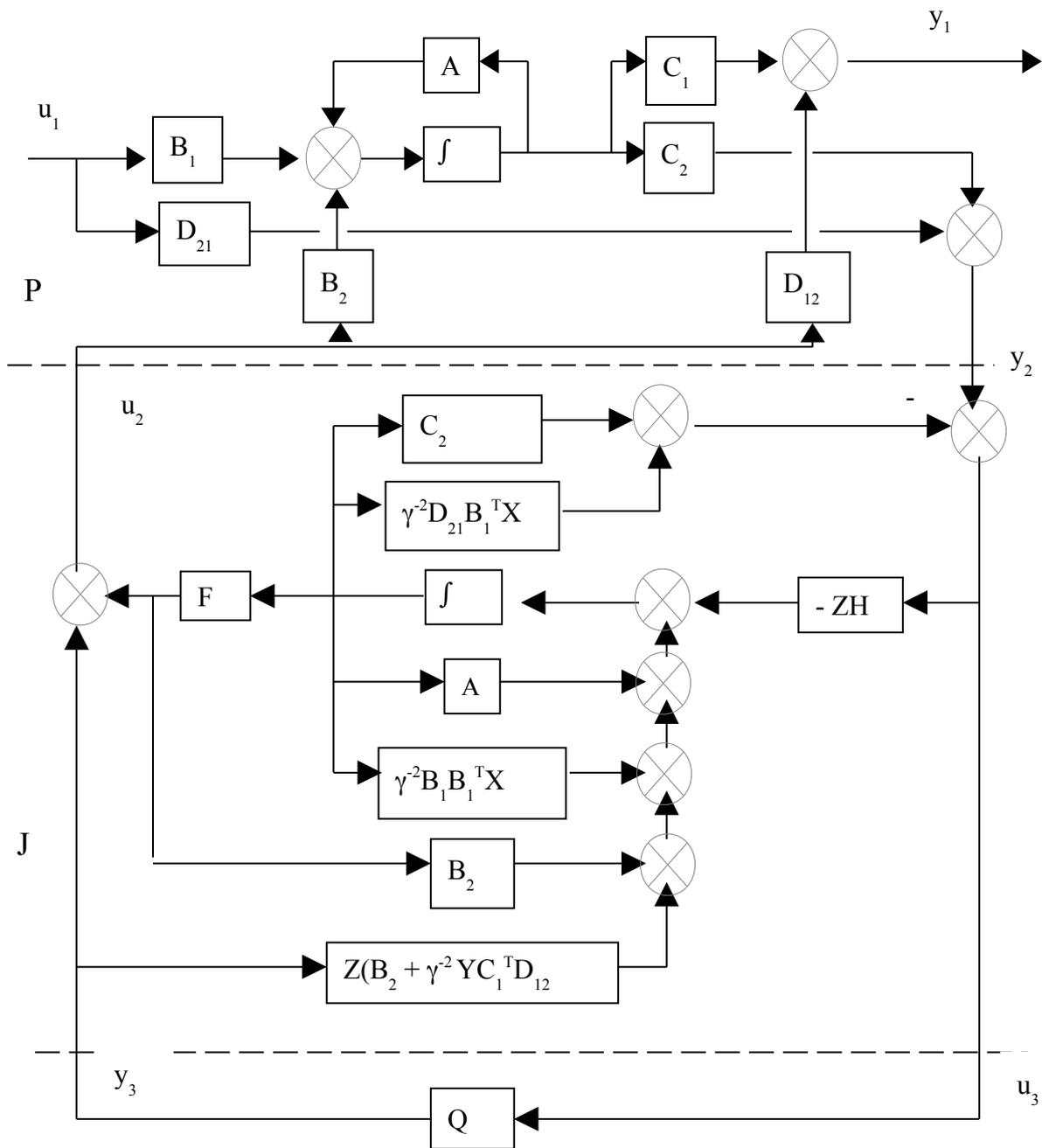


Figure 7-8 : structure du régulateur H^∞ .

Chapitre 8 : Synthèse multi-objectifs.

1 Les valeurs singulières structurées

Considérons le système représenté sous la forme dite " $M-\Delta$ " de la figure 8-1, dans lequel les matrices M et Δ sont des matrices de transfert stables. Alors ce système est stable pour toute matrice Δ qui vérifie $\|\Delta\|_\infty < 1$ si et seulement si $\|M\|_\infty \leq 1$: c'est le théorème de stabilité robuste.

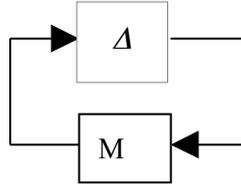


Figure 8-1 : Représentation $M-\Delta$.

Il n'existe donc pas de matrice Δ vérifiant les conditions, telle que $\det(I - M\Delta) = 0$.

Dans l'ensemble des matrices Δ considérées, on peut définir un sous-ensemble des matrices qui ont une structure particulière, de type "diagonale par blocs", chaque bloc étant par ailleurs défini par ses dimensions. Un tel sous-ensemble étant naturellement plus petit que l'ensemble des matrices Δ sans structure, le théorème de stabilité robuste n'est qu'une condition suffisante sur cet ensemble.

Pour prendre en compte les structures particulières des matrices Δ , il a été nécessaire d'introduire la notion de *valeur singulière structurée*¹.

Définition:

Soit $\underline{\Delta}$ la structure de matrice :

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta_n \end{bmatrix} \quad 8-1$$

dans laquelle par exemple:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \delta_1^r I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2^r I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3^r I_{r_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_i^r I_{r_i} \end{bmatrix} \quad 8-2$$

¹ J. C. Doyle: Analysis of feedback systems with structured uncertainty; *Proc. IEE, PtD*, **129**, 242-250. (1982)

où les δ_i^r sont des coefficients réels,

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_1^c I_{c1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2^c I_{c2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3^c I_{c3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_j^c I_{cj} \end{bmatrix} \quad 8-3$$

où les δ_j^c sont des coefficients complexes, et les matrices $\Delta_3, \dots, \Delta_n$ sont des matrices complexes pleines; alors on appelle "valeur singulière structurée de la matrice M , pour la structure $\underline{\Delta}$ " la fonction μ :

$$\bullet \mu_{\underline{\Delta}}(M) = \frac{1}{\min_{\Delta \in \underline{\Delta}} \{\bar{\sigma}(\Delta); \det(I - M \Delta) = 0\}} \quad 8-4$$

$$\bullet \mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta}; \det(I - M \Delta) \neq 0 \quad 8-5$$

Il s'agit en fait d'une "mesure" de la distance à l'instabilité de M : c'est l'inverse de la taille de la plus petite incertitude de structure définie par $\underline{\Delta}$ qui déstabilise M .

Remarque:

On a toujours:

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) \leq \bar{\sigma}(M), \forall \omega \quad 8-6$$

Par extension de notation, on définit:

$$\|M\|_{\mu, \underline{\Delta}} = \max_{\omega} [\mu_{\underline{\Delta}}(M)] \quad 8-7$$

En toute rigueur mathématique, ce n'est pas une norme.

2 Théorème de stabilité robuste structurée

Soit G un système multivariable incertain, décrit par le schéma fonctionnel de la figure 8-2:

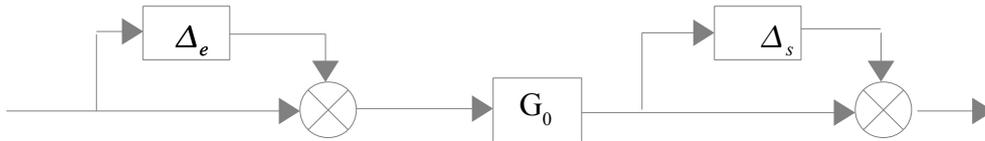


Figure 8-2 : Système incertain avec incertitudes en entrée et en sortie.

Il s'agit d'un système dont les actionneurs (incertitudes en entrée) et les capteurs (incertitudes en sortie) sont incertains. Quelques manipulations élémentaires de schéma fonctionnel permettent de le transformer en la figure 8-3.

La matrice d'incertitude a donc une structure diagonale par bloc (bloc-diagonale), constituée de 2 blocs complexes pleins Δ_e et Δ_s . Le théorème de stabilité robuste structuré établit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un régulateur K qui stabilise le système nominal G_0 stabilise le système incertain quelles que soient les matrices Δ_e et Δ_s , de dimension H_∞ inférieure à 1.

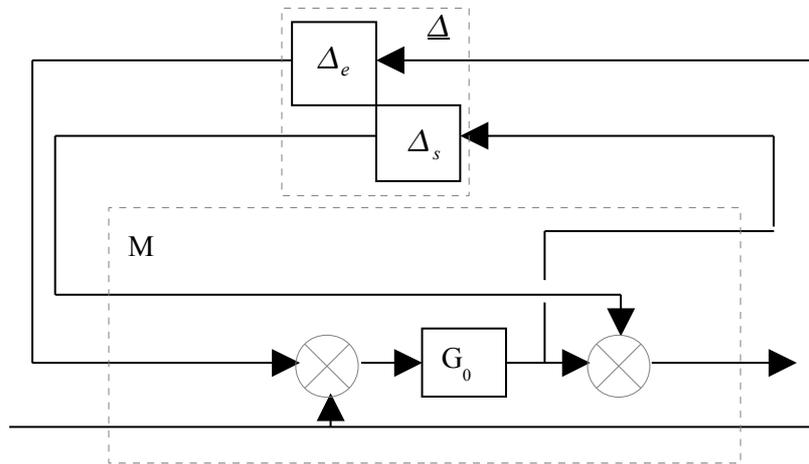


Figure 8-3 : Forme M- Δ du système incertain

Théorème:

Soit P un système incertain décrit par la figure 8-4, et tel que:

- (i) Δ est une matrice d'incertitude structurée (bloc-diagonale) et $\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1, \forall \omega$;
- (ii) $F_u(P_0, 0)$ et $F_u(P_0, \Delta)$ ont le même nombre de pôles dans le 1/2 plan droit;

si K est un régulateur qui stabilise $F_u(P_0, 0)$,

alors K stabilise $F_u(P_0, \Delta)$ si et seulement si :

$$\mu_\Delta[F_l(P_0, K)] \leq 1; \forall \omega$$

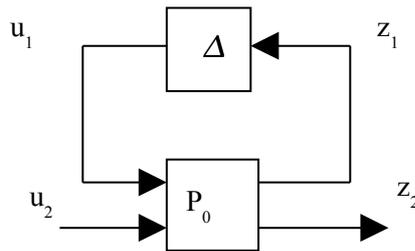


Figure 8- 4 : Système incertain sous forme M- Δ .

Preuve:

La figure 8-5 représente le système incertain en boucle fermée avec le régulateur K .

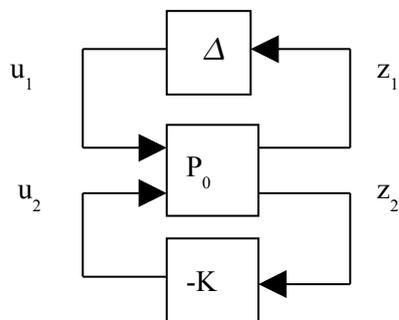


Figure 8- 5: Système incertain bouclé.

Si K stabilise le système nominal P_0 , c'est que $F_l(P_0, K)$ est stable. Alors, par définition de μ , la boucle fermée incertaine $F_u[F_l(P_0, K), \Delta]$ est stable pour toute incertitude Δ considérée, si et seulement si la relation 8-8 est vérifiée.

3 Le problème de performance robuste

Soit un système représenté selon la figure 8-2 avec des incertitudes en entrée:

$$G(p) = G_0(p)[I + \Delta_e(p)] \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] \leq \delta_e(\omega), \forall \omega .$$

On désire trouver un régulateur K tel que l'objectif de sensibilité soit respecté par tous les modèles possibles.

3.1 Performance nominale

Le modèle nominal correspond au cas où $\Delta = 0$. La spécification de régulation nominale peut

s'écrire comme à la relation 8-9 et à la figure 8-6.

On peut représenter le problème sous la forme d'un problème de stabilité. La relation 8-9:

$$\bar{\sigma}[W_p(j\omega)S_{0,e}(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \quad 8-9$$

est vérifiée si la boucle fermée incertaine de la figure 8-6 est stable pour toute matrice Δ_p vérifiant:

$$\|\Delta_p\|_\infty < 1 \quad 8-10$$

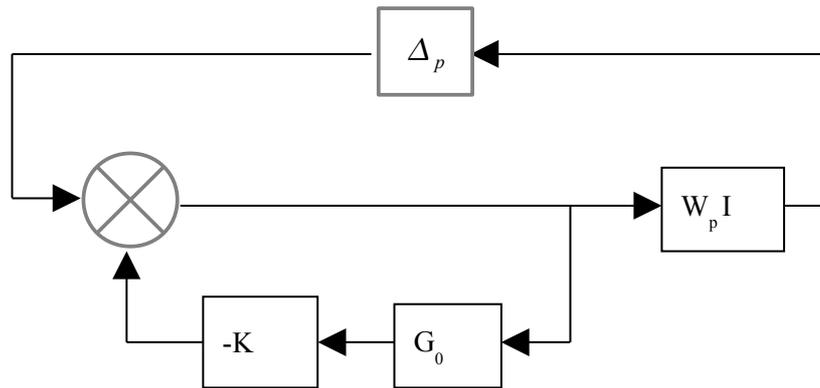


Figure 8- 6 : Boucle fermée représentant les contraintes 8-9 et 8-10.

La matrice de transfert Δ_p est une matrice d'incertitude fictive.

3.2 Performance robuste

Le problème de performance robuste consiste à remplacer dans la relation 8-9 et la figure 8-6 le modèle nominal G_0 par le système incertain G :

$$\bar{\sigma}[W_p(j\omega)S_e(j\omega)] \leq 1, \forall \omega \quad 8-11$$

$$S_e(j\omega) = [I + K(j\omega)G(j\omega)]^{-1} \quad 8-12$$

$$G(p) = G_0(p)[I + \Delta_e(p)] \quad 8-13$$

$$\bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] < \delta_e(\omega), \forall \omega > 0 \quad 8-14$$

On peut construire une fraction rationnelle $W_e(p)$ vérifiant:

$$|W_e(j\omega)| \geq \delta_e(\omega), \forall \omega \quad 8-15$$

$$\bar{\sigma}[\Delta_e(j\omega)] \leq \bar{\sigma}[\Delta_e W_e(j\omega)]; \forall \omega; \forall \Delta_e t.q. \|\Delta_e\|_\infty < 1$$

et on peut donc réécrire la relation 8-13 sous la forme:

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)[I + \Delta_e W_e(j\omega)]; \|\Delta_e\|_\infty < 1 \tag{8-16}$$

La boucle fermée incertaine est représentée à la figure 8-7:

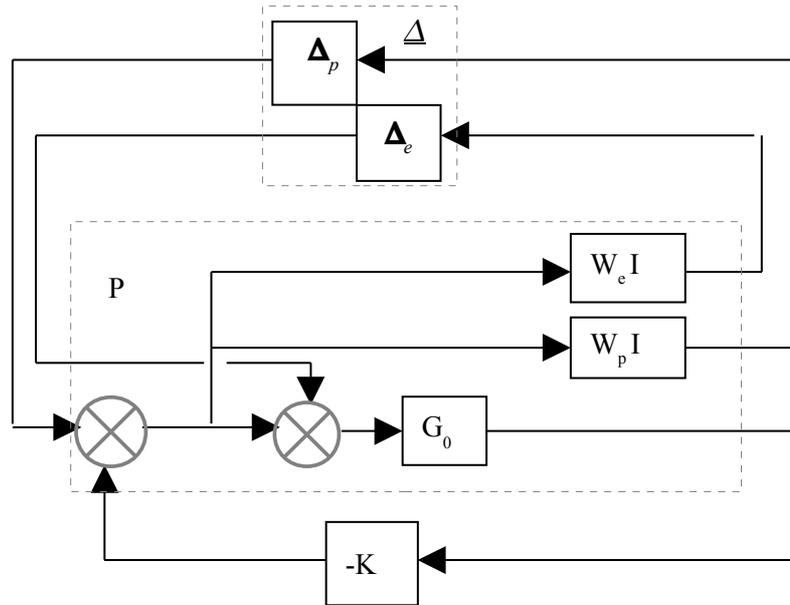


Figure 8- 7 : Schéma fonctionnel de spécification de performance robuste.

La structure de la matrice d'incertitude est:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_e \end{bmatrix} \tag{8-17}$$

avec:

$$\begin{aligned} \|\Delta_e\|_\infty &< 1 \\ \|\Delta_p\|_\infty &< 1 \end{aligned} \tag{8-18}$$

et la spécification de performance robuste s'écrit:

$$\mu_\Delta[F_l(P, K)] \leq 1, \forall \omega \tag{8-19}$$

ou encore

$$\|F_l(P, K)\|_{\mu, \Delta} \leq 1$$

8- 20

4 Calcul de μ , D-K itérations

Soit D une matrice diagonale, inversible, une matrice de mise à l'échelle (scaling), alors les schémas de la figure 8-8 sont équivalents:

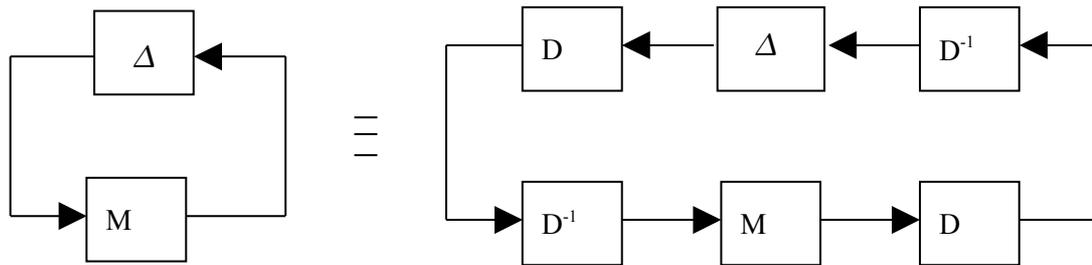


Figure 8- 8 : Schémas équivalents.

Comme D est diagonale:

$$\|\Delta\|_{\infty} = \|D \Delta D^{-1}\|_{\infty}$$

8- 21

la relation 8-6 permet d'écrire:

$$\mu_{\Delta}(M) \leq \min_D [\bar{\sigma}(DM D^{-1})] = \mu_{\Delta}^{\#}(M)$$

8- 22

qui définit la **borne supérieure de μ** .

On peut ainsi évaluer, fréquence par fréquence (sur un ensemble discret de fréquences) une borne supérieure de μ en cherchant, par algorithme d'optimisation, la matrice D de mise à l'échelle qui minimise $\bar{\sigma}(DM D^{-1})$.

La solution d'un problème de μ -synthèse de type:

$$\mu_{\Delta}^{\#}[F_l(P, K)] \leq 1, \forall \omega_k$$

8- 23

se résout par double itération:

1. $D = I$;

2. on cherche K tel que:

$$\|DF_l(P, K)D^{-1}\|_{\infty} \leq \gamma \quad 8-24$$

3. Pour K fixé on cherche D :

$$D = \underset{Diag}{Argmin} [\bar{\sigma}[DF_l(P, K)D^{-1}]] \quad 8-25$$

4. On réitère en 2 avec la dernière matrice D .

Il n'existe aucune preuve qu'un tel algorithme de D - K itérations converge vers un minimum global, mais souvent ça marche.