

Commentaires sur l'article R 7 422 des Techniques de l'Ingénieur¹

Benoît Bergeon⁺ & Gérard Montseny^{*}

⁺ IUT Geii, Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération, 33405 Talence cedex

^{*} LAAS du CNRS,
7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse cedex 4

Dans l'article [1] « Commande Crone : principes et exemples d'application », sont exposées les trois « générations » de la théorie de la « commande robuste d'ordre non entier » ainsi qu'une application présentée comme majeure de cette théorie: la « suspension Crone ». Nous nous proposons d'une part de relever certains points bibliographiques et techniques contestables contenus dans [1], d'autre part de remettre en cause les résultats avancés dans ce même article à propos de ladite suspension, notamment au plan des simulations numériques. Cette réfutation s'appuie pour sa partie théorique sur certains résultats d'analyse qui s'avèrent en contradiction avec ceux avancés dans [1].

Après quelques remarques situées dans le contexte général de la théorie de la commande robuste, la deuxième partie de cet article traite donc des diverses générations de commande Crone, la troisième étant consacrée à l'étude et à la simulation numérique de la suspension du même nom.

I. Remarques générales.

Il est indispensable de revenir tout d'abord sur l'introduction générale de l'article [1], afin d'en corriger certaines affirmations non fondées.

Contrairement à la première affirmation, robustesse n'est pas synonyme d'insensibilité (ni même de « quasi-insensibilité » qui ne repose sur aucune définition autre qu'intuitive). En automatique, une telle notion relève d'un absolu qui se traduit, de façon plus précise, par: «invariance par rapport aux incertitudes»: c'est un idéal en général trop contraignant, qui ne peut être envisagé que dans certains cas très particuliers² et ne saurait prétendre à l'universalité annoncée dans [1]. Qui plus est, minimiser la sensibilité en soi (dans l'espoir de donner un sens à « quasi-insensibilité ») constitue un méta-problème qui la plupart du temps s'avère lui même... d'une sensibilité extrême. Hormis dans certaines situations exceptionnelles (tel le rejet exact de perturbation) où cette notion demeure envisageable, l'insensibilité est en fait un concept mal adapté à la réalité complexe de l'automatique qui, comme toute science de l'ingénieur, cherche des compromis plutôt que des absolus.

¹ Commande CRONE : principes et exemples d'application ; par A. Oustaloup, X. Moreau et B. Mathieu.

² Le terme d'insensibilité est en fait sous-jacent à certaines approches de commandes dites "désensibilisantes", dont l'objectif est de réduire (voire minimiser), par la commande, l'influence d'un écart de modèle sur le comportement du système commandé. Dans ce dernier cas, la description d'ensemble de modèles possibles (et donc d'incertitude) n'est pas nécessaire.

C'est pour obtenir de tels compromis que les différentes techniques de synthèse moderne de commande robuste (QFT, optimisation H_2 ou H_∞ , μ -synthèse, stabilisation quadratique)³ utilisent le terme de « robustesse », qui exprime une notion plus naturelle et surtout beaucoup plus souple et conforme aux exigences de l'ingénieur, celle de « garantie » : *étant donné un ensemble de modèles possibles d'un système mal connu, une commande sera dite robuste lorsqu'elle garantit au système commandé un niveau de performance explicitement spécifié.* On ne cherche en général pas à obtenir une quelconque invariance: si la performance obtenue pour certaines régions dans le domaine d'incertitude est largement meilleure que le niveau minimal garanti, cela ne saurait constituer un handicap (au contraire!). Au demeurant, le choix des critères de performance (permettant l'obtention d'une telle « garantie ») ainsi que des méthodes de résolution associées est très vaste: il est le cœur même de la théorie de la commande robuste.

Les affirmations concernant *l'approche H_∞* , même resituées à l'époque de la rédaction de l'article (96 ou 97), sont tellement réductrices qu'elles sont dénuées de sens. Ce qui caractérise H_∞ n'est finalement que l'utilisation d'un critère particulier (la norme H_∞) dans une procédure d'optimisation qui varie d'un problème à l'autre, d'un auteur à l'autre. En particulier, l'extension de la notion de valeur singulière à la notion de valeur singulière structurée [3] a permis le développement de la μ -synthèse et la prise en compte de performance robuste à travers le théorème de la boucle principale [4]. Quant à l'affirmation que cette approche ne prendrait pas en compte *les véritables domaines d'incertitudes*, elle traduit une incompréhension de la différence entre incertitude complexe et incertitude réelle (real uncertainty) ainsi qu'une ignorance des développements de la μ -analyse réelle depuis 1982 [3], [5], [6], ... Une lecture même sommaire de ces articles de base de la commande robuste suffit à démontrer l'inconsistance du paragraphe concernant *l'intégration de la restructuration dans la reparamétrisation du procédé.*

Il était important, tout particulièrement dans la littérature dédiée aux ingénieurs, de rétablir la réalité quant aux affirmations abusives contenues dans l'introduction générale de [1], dont la teneur jette en outre un discrédit inacceptable sur les approches modernes de la commande robuste évoquées ci-avant: basées sur des théories à la fois rigoureuses et praticables, elles ont en même temps une portée générale qui a fait leur succès, notamment dans certains secteurs critiques comme l'industrie aéronautique et spatiale.

II. La commande Crone.

La première partie de l'article [1], intitulée *Analyse des variations de marge de phase*, est élémentaire et sert simplement à introduire le principe de commande Crone dite de 1^{ère} génération, en faisant admettre d'emblée comme admissible son postulat fondamental :

« La marge de gain est considérée suffisamment grande pour que la marge de phase soit significative de la distance au point critique du lieu de Nyquist ou de Black en boucle ouverte ».

Cela signifie implicitement que l'on ne s'intéresse qu'aux systèmes linéaires mono-variables stables, présentant un comportement asymptotique de phase. De plus, le gain devra pouvoir être ajusté pour fixer la fréquence au gain unité de boucle ouverte (crossover frequency) à l'intérieur de cette plage de fréquences. L'essentiel de l'effet de désensibilisation vient de ces différentes hypothèses, non explicitées dans l'article. C'est une variante de la «

³ Le lecteur trouvera en [2] un panel de techniques de commande robuste.

désensibilisation par grand gain ». En particulier une telle hypothèse n'est pas compatible avec le principe de *reparamétrisation par restructuration*, et interdit la prise en compte de retard, qu'il s'agisse de retard pur dans le procédé ou de retard dû à l'échantillonneur-bloqueur utilisé en commande numérique.

Le paragraphe sur la complexification du régulateur est un rappel de principes élémentaires d'automatique concernant le régulateur proportionnel et intégral bien connu.

En ce qui concerne la 2^{ème} génération de commande Crone, il convient d'abord de remarquer qu'elle ne concerne que les procédés permettant *un glissement du gabarit sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé (cette condition étant vérifiée lorsque la reparamétrisation conduit uniquement à des variations de gain autour de ω_u)*. C'est cet aspect qui avait été mis en avant dans l'article [7], essentiellement pour envisager l'application de stratégies de ce type en commande numérique (donc présentant un retard d'échantillonnage), question bien évidemment incontournable dans toute approche actuelle de l'automatique. Aucune référence aux résultats contenus dans cet article (pourtant antérieur à toute publication à comité de lecture sur ce sujet) n'est mentionnée dans [1].

Quant à la référence à un « *abaque de Oustaloup* » concernant la transformation du lieu de Black de boucle ouverte à retour unitaire en lieu d'iso-module de sensibilité (en boucle fermée), une référence antérieure d'un tel abaque existe [8] sous le nom bien connu « d'abaque de Lohcin », anagramme inverse de Nichols, traduisant la symétrie de la fonction de sensibilité par rapport à la sensibilité complémentaire.

Le paragraphe sur les performances dynamiques temporelles de la commande Crone ne fait appel qu'à la seule notion de pôle pour une transmittance « d'ordre non entier », donc *non rationnelle et surtout non uniforme*. Or dans le cas multiforme, l'étude de la réponse impulsionnelle ne peut *en aucun cas* se réduire à la prise en compte des seuls pôles: en particulier intervient *une coupure (nécessaire pour restituer l'uniformité de la fonction)*; cela se traduit par un *terme intégral (sur la coupure) en sus des classiques résidus*. Ce terme, qui n'existe pas dans le cas d'une fonction rationnelle, est souvent dominant dans le cas non rationnel: ainsi par exemple, le transfert $\frac{1}{p}^\alpha$ ne présente *aucun pôle*, mais possède bien une réponse impulsionnelle non nulle! Il est également très facile de construire des exemples simples de transferts (non rationnels) à pôles « stables » voire *absents*, mais à réponse impulsionnelle instable à cause du terme dû à la coupure: tel est le cas par exemple de $\frac{1}{p}^\alpha, 1 < \alpha < 2$, qui présente un point de branchement en 0 (qui n'est pas un pôle!).

Le lien d'équivalence entre pôles et réponse impulsionnelle, classique en analyse des fonctions rationnelles, est une propriété spécifique aux fonctions dites méromorphes. Elle est *fausse* dans le contexte des fonctions *multiformes* comme les transferts à base de puissances non entières de la variable complexe. En outre (et surtout), les notions de stabilité sont plus subtiles que dans le cas rationnel, car non nécessairement exponentielles: ainsi, une réponse impulsionnelle h peut être stable au sens où $h(t) \rightarrow 0$, mais instable au sens où la réponse indicielle correspondante diverge: tel est le cas du transfert $\frac{1}{p}^\alpha, 0 < \alpha < 1$. Davantage de détails sur les fonctions analytiques pourront être trouvés par exemple dans [11].

Tout ceci montre combien l'analyse effectuée dans [1] est insuffisante: les transferts considérés présentent potentiellement les pathologies sus-citées.

Enfin, pour ce qui concerne les procédures de calcul des régulateurs de 2^{ème} ou 3^{ème} génération, il s'agit d'inversion de modèles correspondant à des gabarits prédéfinis. Au delà des précautions à prendre concernant l'inversibilité de ces modèles, une telle procédure ne saurait être qualifiée *a priori* de robuste, tant le résultat peut être sensible aux paramètres du modèle, de façon généralement difficile à appréhender. Le cas typique (et bien connu) est celui de système comportant des modes souples peu amortis ; or c'est précisément le cas où le problème de robustesse se présente dans sa plus grande acuité.

III. La suspension Crone.

La suspension Crone est présentée dans [1] comme le démonstrateur du principe de robustesse du même nom. Le transfert incertain à commander est en fait $H(p) = \frac{1}{M p^2}$, expression de la loi fondamentale de la dynamique dans laquelle le paramètre réel M renferme à lui seul toute l'incertitude. Notons au préalable qu'il s'agit là d'un problème élémentaire dont des solutions classiques très simples (déterminables analytiquement) sont en outre robustes: en ce sens, un tel exemple ne saurait constituer un démonstrateur pour quelque méthode que ce soit.

Notons par ailleurs que dans l'expression (79), une pulsation aurait la dimension de l'inverse de la racine carrée d'une masse. En réalité le coefficient C_0 de (77) est le coefficient de raideur statique (c'est-à-dire à fréquence nulle) de la suspension, et donc la pulsation ω_0 doit être définie par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_0}{M}} ;$$

une conséquence directe de cette erreur concerne donc la dimension physique affichée du coefficient C_0 , présenté comme sans dimension, alors que sa valeur s'exprime: 5170 N/m, à comparer⁴ avec le cas de la suspension traditionnelle: $k=17055$ N/m. On comparera également avec la valeur de C_0 donnée, dans les mêmes conditions (à savoir une réalisation au moyen de 5 cellules ressort-amortisseur) dans [9] en 1996, puis dans [12] en 1998: dans les deux cas, $C_0 = 215$ N/m.

Version « théorique » de la suspension Crone

Plutôt que la représentation par fonction de transfert impropre (relations (80) et (81)), il est plus commode, dans une vision « automatique », d'utiliser une représentation par retour d'état (position-vitesse) conforme à la représentation de Kalman, le retour de vitesse étant un gain dynamique dans le cas de suspension Crone, au lieu d'un simple retour statique dans les suspensions classiques.

⁴ Une suspension offrant une raideur statique de 5170 N/m subit un enfoncement de 10 cm (débattement maximal d'une suspension d'automobile) pour une charge additionnelle d'environ 50 daN.

L'équation (81) :

$$C_N(p) = C_0 \frac{\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{p}{\omega'_i}\right)}{\prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)} = C_0 \frac{1 + \sum_{i=1}^N b_i p^i}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i p^i};$$

devient alors :

$$C_N(p) = C_0 + p \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b'_i p^i}{\sum_{i=0} a_i p^i} = C_0 + p F(p);$$

expression dans laquelle $b'_{i-1} = C_0 (b_i - a_i)$, $\forall i \in [1, N - 1]$ et $b'_{N-1} = C_0 b_N$.

Cette représentation permet dès lors de réaliser aisément⁵ la simulation d'un choc de roue sur un trottoir de 0.1 m de haut. Ce choc est représenté par une perturbation en impulsion de vitesse verticale, de 1 m/s pendant 0.1 s. Cette impulsion est intégrée pour représenter la perturbation de position. Le schéma fonctionnel de simulation est donné à la figure 1.

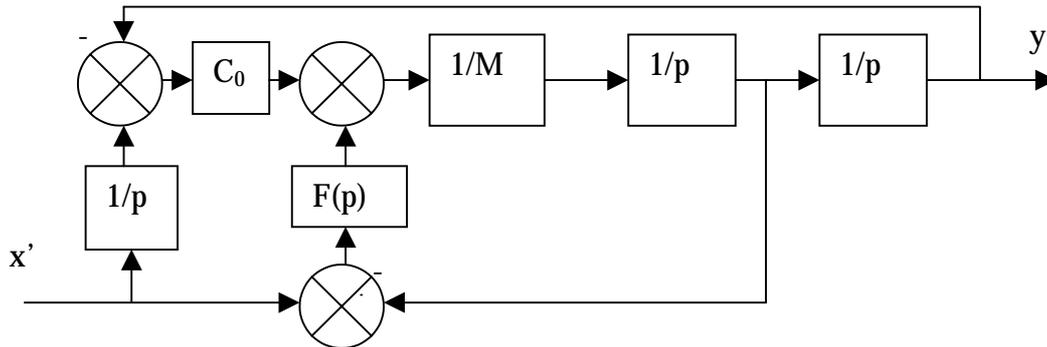


Figure 1 : schéma de simulation de suspension

La figure 2 ci-dessous représente les lieux de Black de boucle ouverte de suspension traditionnelle, pour les valeurs numériques données en [1], § 5.5, et pour 4 valeurs de masse : $M=150$ kg, 300 kg, 600 kg et 900 kg. Elle est conforme à la figure 13 (a) de [1].

⁵ Par exemple sous Simulink©.

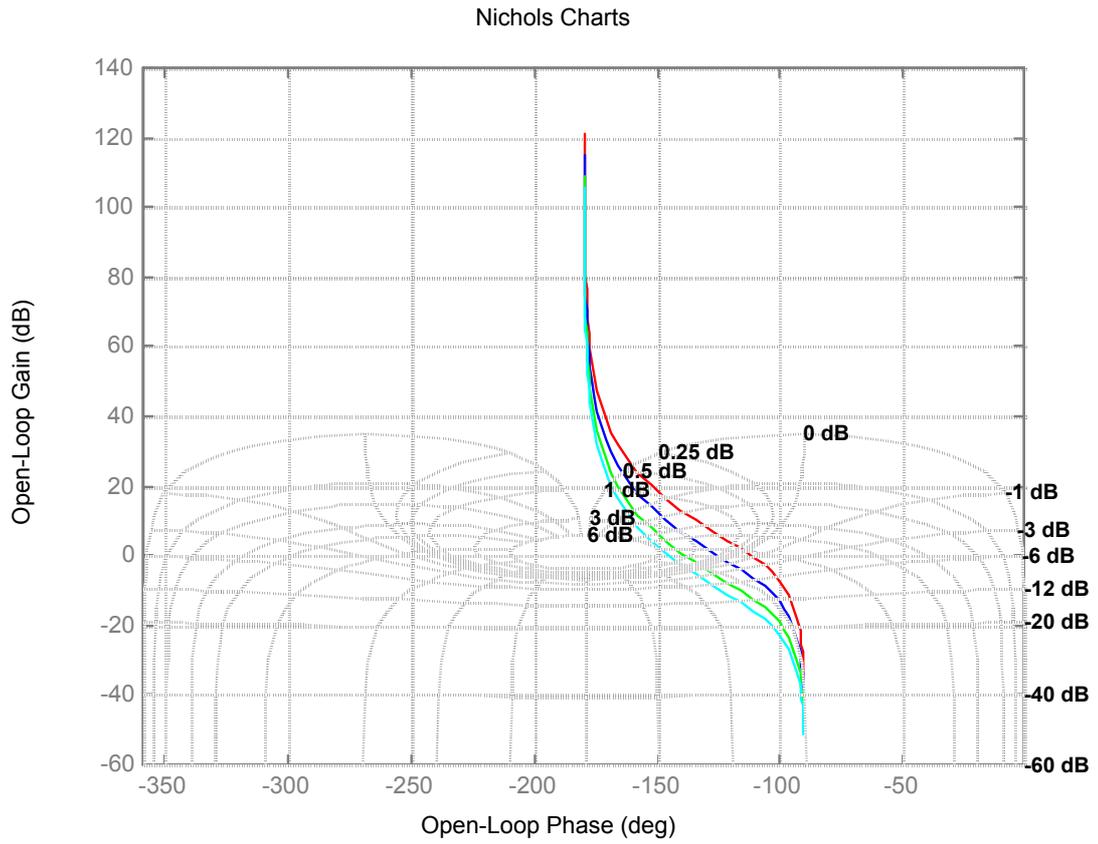


Figure 2 : lieux de Black de suspension standard pour les 4 valeurs de masse.

La figure 3 reproduit les résultats de simulation de choc, sur la suspension traditionnelle. L'allure générale des courbes est identique à celle de la figure 15 (a) de [1].

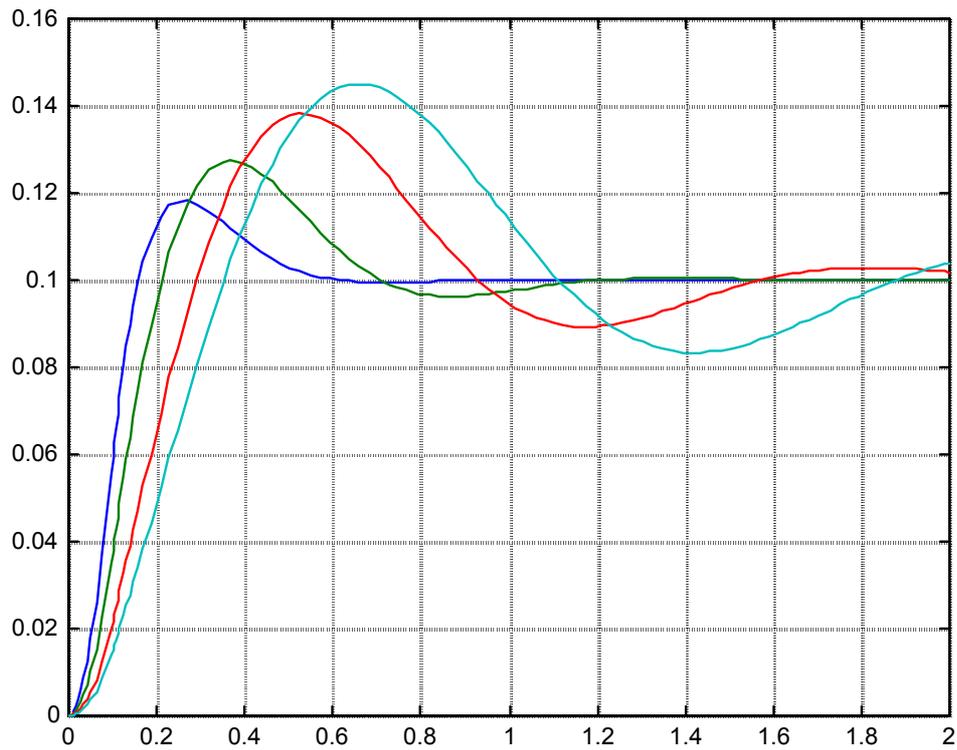


Figure 3 : réponses de suspension standard au choc de trottoir, pour 4 valeurs de masse.

Les figures 4 et 5 ci-dessous représentent dans les mêmes conditions, les lieux de Black et les réponses à un choc de suspension Crone, dont les valeurs numériques sont données par les relations (83) de [1]. L'insensibilité du dépassement par rapport à la masse est vérifiée. Cette propriété est interprétée en termes d'invariance sous changement d'unité en Annexe 1. Dans le paragraphe suivant, on compare ces résultats avec ceux obtenus par une suspension traditionnelle (c'est-à-dire d'ordre entier) de paramètres comparables.

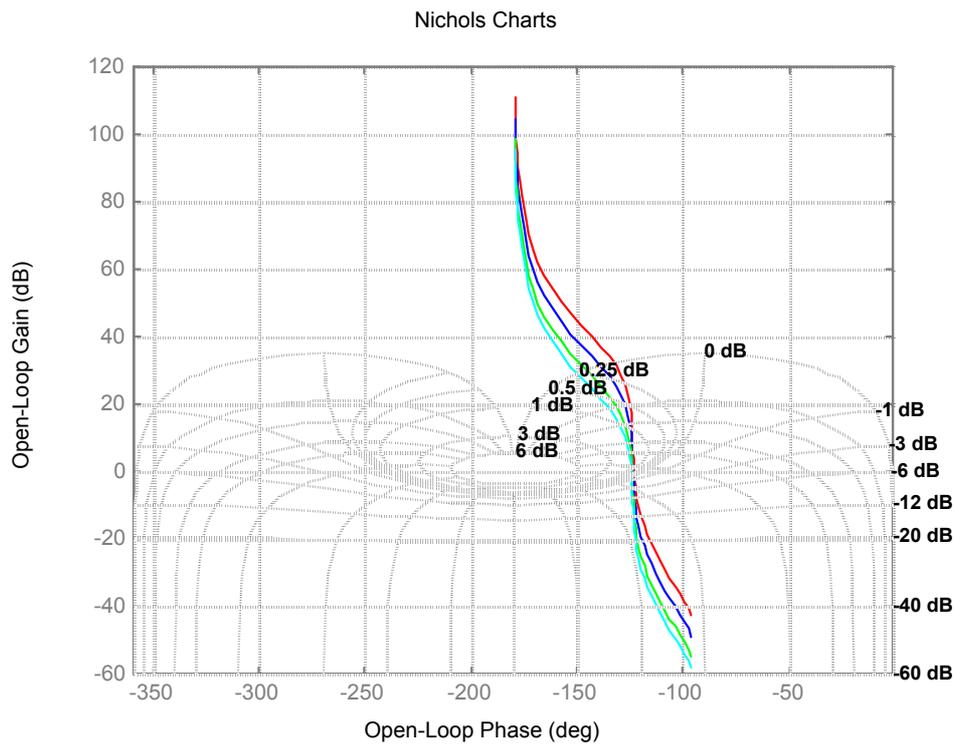


Figure 4 : lieux de Black de suspension Crone pour les 4 valeurs de masse.

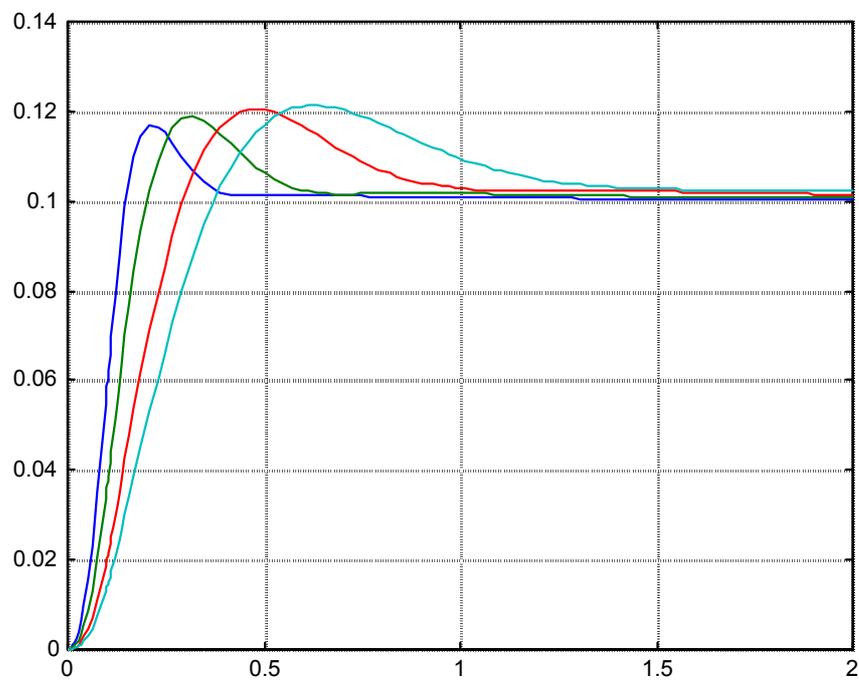


Figure 5 : réponses de suspension Crone au choc de trottoir, pour 4 valeurs de masse.

Sur la solution Crone... d'ordre entier

La transmittance théorique de la suspension Crone est donnée par l'expression ci-après (voir (80) dans [1]) dans laquelle m est un nombre réel compris entre 0 et 1:

$$C(p) = C_0 \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right)^m}{\left(1 + \frac{p}{\omega_h}\right)^{m-1}}.$$

Cette transmittance **reste parfaitement admissible dans le cas particulier** $m = 1$, qui définit, en somme, une « suspension Crone d'ordre entier »:

$$C_{entier}(p) = C_0 \left(1 + \frac{p}{\omega_b}\right),$$

de la forme $C_0 + kp$, soit une suspension *traditionnelle* vérifiant également la propriété de quasi invariance par rapport à M (voir Annexe 1). Les figures 6 et 7 ci-dessous représentent, dans les mêmes conditions que précédemment (mêmes paramètres C_0, ω_b , qu'en figures 4,5, avec $N=1$)⁶, les lieux de Black et les réponses à un choc obtenues en simulation numérique, résultats que l'on comparera avec les figures 2,3,4,5.

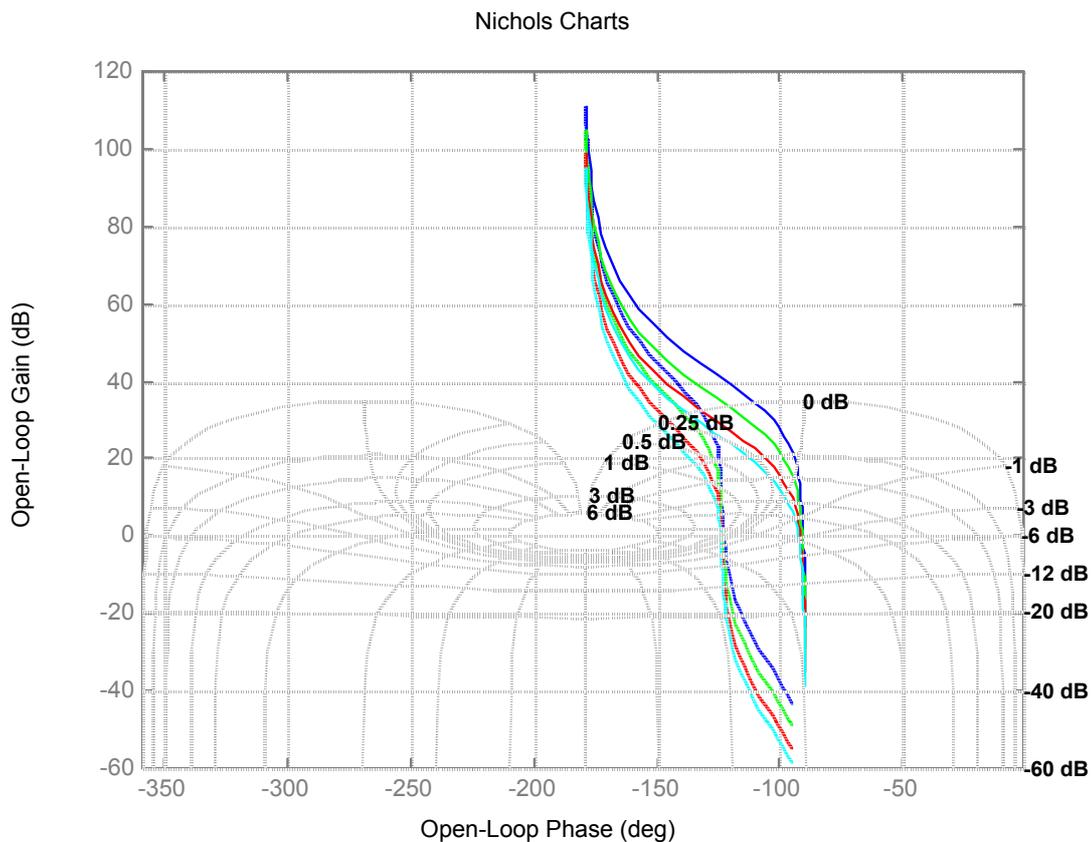


Figure 6 : lieux de Black de suspensions Crone d'ordre 1 (-) et d'ordre 0,611 (--).

⁶ Soit $C_0=5170$ N/m, $b_0' = 10340$ Ns/m.

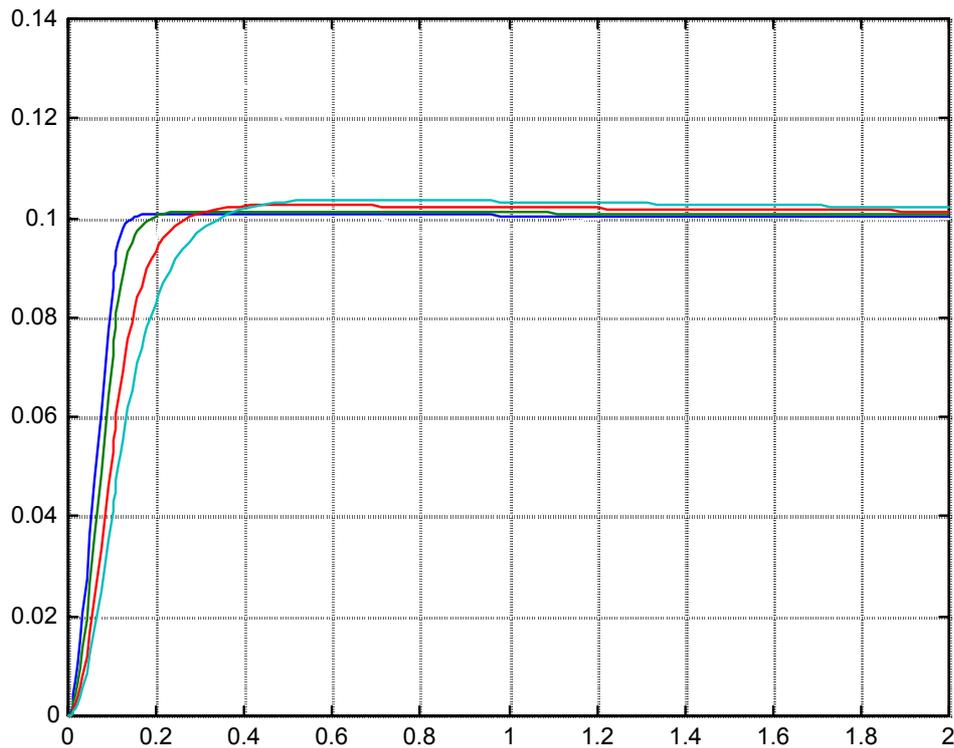


Figure 7 : réponses de suspension Crone d'ordre 1 au choc de trottoir, pour 4 valeurs de masse.

Cette solution simple, bien qu'il s'agisse indéniablement d'un cas particulier remarquable que rien n'interdit a priori⁷, n'a pas été considérée dans [1]. Pourtant, une telle solution est rationnelle, donc en relation directe avec d'autres solutions standard (H_2 , H_∞, \dots) auxquelles elle pourrait être judicieusement comparée.

De plus (et surtout), la réponse indicelle correspondante est *apériodique* : contrairement au cas $m < 1$, il n'y a *aucune* résonance dans le domaine fréquentiel⁸. Or la *nullité pour tout M* du facteur de résonance traduit, selon les critères avancés par les auteurs mêmes de l'approche Crone, une robustesse optimale⁹ : l'ordre *entier* s'avère ainsi l'idéal indépassable de l'approche « *non entière* » de la robustesse.

Pour ces raisons, le choix a priori d'une solution irrationnelle « d'ordre *non entier* » est injustifié, tant au plan de l'analyse théorique que des aspects physiques d'une suspension : un ordre non entier *dégrade le facteur d'amortissement*. Sur cet exemple élémentaire présenté comme « démonstrateur », l'approche Crone apparaît d'emblée à la fois plus complexe et

⁷ Sinon un parti pris sans justification; en effet au plan de l'analyse mathématique (voir Annexe 1), le cas $m=1$ appartient en propre au cadre fixé par l'approche Crone, tout comme les systèmes linéaires constituent des cas particuliers remarquables inclus dans la théorie non linéaire générale.

⁸ Au plan mécanique, une telle propriété semble a priori préférable pour une suspension automobile, tant au plan confort (moins d'oscillations) que tenue de route (les forces de contact pneu-sol sont alors optimales).

⁹ Extrait de [1] : « ... le facteur de résonance est, non seulement plus faible, mais aussi insensible aux variations de la masse, traduisant ainsi [...] une meilleure robustesse ... ».

moins performante que les solutions traditionnelles les plus simples obtenues *dans les mêmes conditions*¹⁰.

On montre dans la suite que la version « hydropneumatique » se heurte en outre à un obstacle majeur qui, indépendamment des défauts précités, rend l'approche Crone incompatible avec cette technologie. En même temps, l'hydropneumatique semble seule envisageable compte tenu des contraintes imposées par ladite approche : on aboutit ainsi à une erreur de principe.

Version hydropneumatique de la suspension Crone

Concernant la mise en œuvre sur un prototype expérimental, la technologie hydropneumatique (correcteur hydraulique, ressorts pneumatiques) apparaît comme incontournable. En effet, à cause de la faible raideur statique ($C_0 = 5170 \text{ N/m}$), un correcteur d'assiette est d'une part indispensable faute de quoi la suspension se mettrait en talonnement pour une charge excédant de plus 50 daN le poids à vide ; d'autre part, 5 éléments élastiques sont nécessaires, ce qui ne peut être envisagé de façon réaliste qu'avec des ressorts pneumatiques (dénommés « sphères »), d'encombrement réduit. La figure 18 de [1] montre un de ces 5 éléments, à la base du système censé reproduire le comportement théorique décrit par les relations (83).

Les relations (85) et (94) permettent alors de calculer les raideurs de chaque sphère, pour la plus faible valeur de masse suspendue, $M_1 = 150 \text{ kg}$.

$$k(1,1) = C_0 \left(1 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\eta^i} \right) ;$$

$$k(1,i) = \eta^{i-1} k(1,1); i = 2, 3, 4, 5.$$

On peut ainsi déduire des relations (83) et (90) la valeur du coefficient de frottement visqueux de la 1^{ère} sphère :

$$b(1,1) = \frac{k(1,1)}{\omega'_1};$$

puis des 4 autres sphères par la relation (85) :

$$b(1,i) = \frac{1}{\alpha^{i-1}} b(1,1).$$

Si les coefficients de frottement visqueux sont bien indépendants de la pression du fluide hydraulique¹¹, il n'en va pas de même pour la raideur des ressorts pneumatiques. En effet, toute variation de masse suspendue s'accompagnant d'une variation équivalente de poids, elle entraîne également une variation de pression du gaz contenu dans les sphères : c'est précisément la force résultant de cette pression qui équilibre le poids de la masse suspendue. Or il est bien connu que la raideur aux petits mouvements d'un ressort pneumatique est

¹⁰ Fixées ici par les paramètres C_0 et ω_b , qui diffèrent fortement des paramètres analogues choisis en figure 3.

¹¹ Ceci est une conséquence de la quasi-incompressibilité des liquides qui présentent de ce fait une viscosité quasi-indépendante de la pression dans les conditions normales d'utilisation.

proportionnelle au carré de la pression du gaz utilisé comme corps élastique¹². Dans le cas présent, le gaz est diatomique (azote) et les conditions d'utilisation (pression, température) permettent d'utiliser l'hypothèse des gaz parfaits; la raideur s'exprime alors en fonction du poids selon l'expression (voir démonstration en Annexe 2) :

$$k_i = \frac{7}{5} \frac{(M g)^2}{P_{0i} V_0},$$

où P_0 désigne la pression de gonflage de la sphère, correspondant à son volume à charge nulle V_0 , et g désigne le coefficient de gravité.

Une telle variation en fonction de M ne peut être négligée et il est donc indispensable de faire intervenir l'effet du changement de poids correspondant aux différents cas de masse dans les calcul des raideurs. Les 4 valeurs de masse considérées : $M_1 = 150$ kg, $M_2 = 300$ kg, $M_3 = 600$ kg et $M_4 = 900$ kg conduisent donc à 4 valeurs de raideur pour chacune des 4 sphères :

$$k(j,i) = k(1,i) \left(\frac{M_j}{M_1} \right)^2 ; j = 2, 3, 4, i = 1, \dots, 5.$$

Pour chaque valeur de la masse suspendue, l'ensemble des paramètres doivent ainsi être recalculés, selon ce qui précède et l'expression (90).

Pour cette raison, la réalisation hydropneumatique proposée dans [1] ne peut pas être représentée par une transmittance indépendante de la masse suspendue: il ne s'agit pas d'une suspension linéaire. Le modèle linéarisé que l'on souhaite utiliser pour une étude aux petits mouvements doit ainsi être adapté à chaque valeur de masse suspendue. La relation (76), incorrecte, doit s'écrire en réalité:

$$\beta(p) = \frac{C(M, p)}{M p^2}.$$

Cette quantité dépendant du terme incertain M , il devient clair, en premier lieu, que l'interprétation de robustesse par *glissement du gabarit vertical dans le plan de Black* ne décrit pas la réalité. La figure 8 décrit les lieux de Black des modèles linéarisés de suspension Crone autour des 4 points de fonctionnement différents correspondant aux 4 valeurs de la masse suspendue. La marge de phase varie d'environ 60° à 25° .

¹² La variation de raideur proportionnelle au carré de la pression est mentionnée également par la relation (31), annexe 2 de [17].

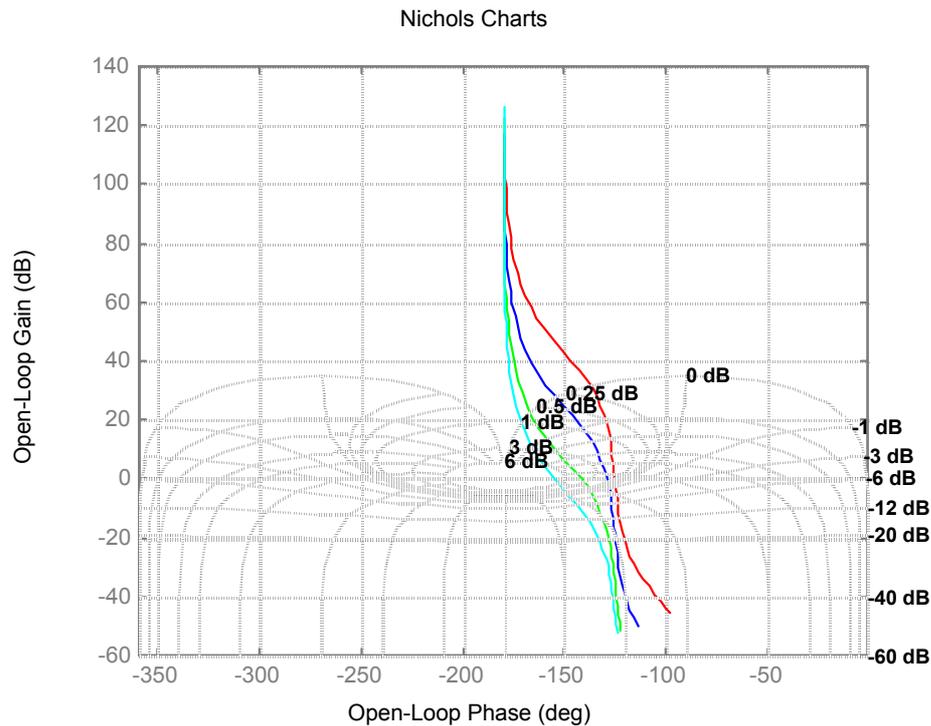


Figure 8 : lieux de Black de suspension Crone hydro-pneumatique pour les 4 valeurs de masse.

La figure 9 montre alors les réponses simulées de cette suspension au choc de trottoir. Le dépassement dépend de façon notable de la masse suspendue, cependant que la fréquence de résonance varie peu en fonction de M , conséquence de la raideur variable en fonction du poids Mg . En somme, on obtient un résultat opposé au résultat espéré: le facteur d'amortissement est fortement dégradé (et donc aussi le comportement routier du véhicule !) lorsque M augmente, la fréquence propre restant quant à elle quasi constante, soit l'exact contraire de la propriété avancée pour la suspension Crone au titre de la robustesse définie par l'approche du même nom.

Une expérimentation à base d'hydro-pneumatique ne peut en aucun cas être illustrative d'une théorie basée sur une transmittance *indépendante* de la masse : à ce titre, le « démonstrateur » présenté à l'appui de la théorie Crone repose sur une erreur de principe, dont la conséquence est une contradiction.

On comparera avec les résultats de simulation présentés en figures 10, obtenus dans les mêmes conditions de raideur statique par une suspension hydro-pneumatique traditionnelle constituée d'une seule sphère (au lieu de 5 dans la solution Crone), de paramètres : $k = C_0 = 5170$ N/m pour $M=150$ kg, et $b = b(1,1) = 10340$ Ns/m. On peut constater que le comportement dynamique est nettement *moins dégradé par l'augmentation de la masse suspendue*, la fréquence propre restant *quasi constante* (et donc également le confort du

véhicule). Cette « robustesse » constitue précisément l'avantage spécifique qui a fait le succès de la suspension hydropneumatique, mise au point durant les années 50 dans ce but même^{13,14}.

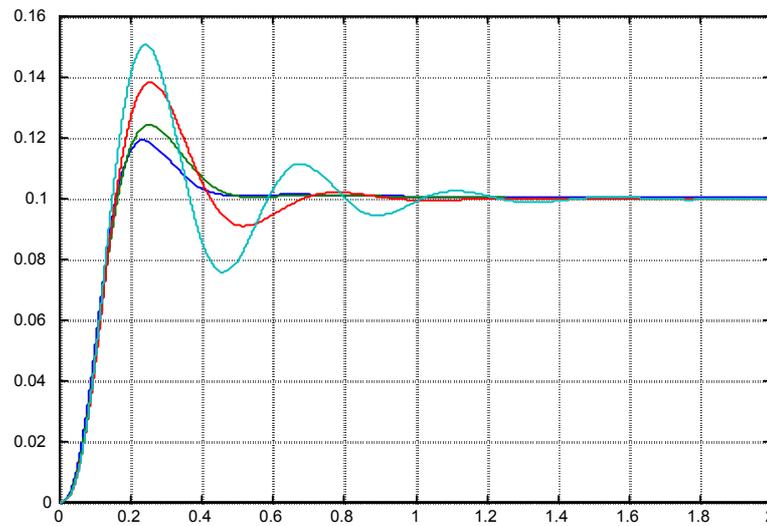


Figure 9 : réponses de suspension Crone hydropneumatique (5 sphères) au choc de trottoir.

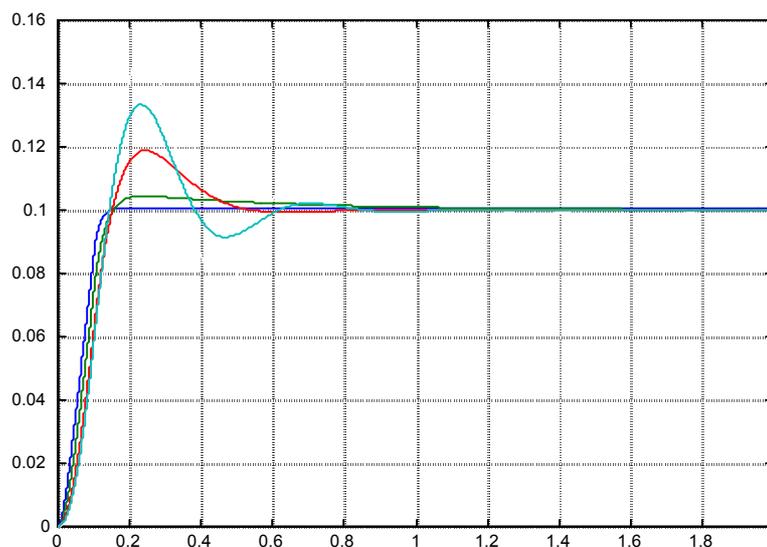


Figure 10 : réponses de suspension hydropneumatique traditionnelle au choc de trottoir.

¹³ La suspension hydropneumatique, par Th. Halconruy, Automobile-technologie, Encyclopaedia Universalis, Corpus 3, 1990, p 555: « ... la raideur de l'élément élastique varie en fonction du cas de chargement, ce qui autorise l'emploi de flexibilités favorables au confort sans dégrader le comportement du véhicule. »

¹⁴ Dans [14], pp 120-123: « On utilise un matelas de gaz comprimé dans une enveloppe, dont le volume varie avec les déplacements relatifs des roues par rapport à la carrosserie. Il est possible d'obtenir ainsi une suspension dont la raideur varie en raison directe de la masse suspendue. En pratique, la fréquence des oscillations naturelles du véhicule se maintient entre 0,6 et 0,9 cycles par seconde, valeurs excellentes pour le confort. »

Des compléments techniques concernant l'analyse critique de la « suspension Crone » notamment hydropneumatique, pourront être trouvées dans [10], [16], [18]. Par ailleurs, des solutions *non linéaires* simples, réalistes et *strictement invariantes* par rapport à la masse suspendue sont proposées dans [13].

Conclusion

L'approche Crone de la suspension automobile conduit à des solutions de mise en œuvre complexe présentant dans tous les cas un comportement dynamique dégradé en regard des solutions traditionnelles les plus simples *dimensionnées de façon comparable*. Dans le cas hydropneumatique, les résultats obtenus en simulation sont même en contradiction totale avec les conclusions de [1], en particulier avec l'extrait suivant:

« *Contrairement à une suspension traditionnelle [...], la suspension Crone permet d'obtenir la robustesse [...] du facteur d'amortissement* ».

Par les omissions, imprécisions et inexactitudes contenues dans son exposé théorique, présentée comme universelle et illustrée par un démonstrateur erroné relatif à un problème élémentaire, l'approche Crone s'avère non étayée, sinon sans fondement. Contrairement aux affirmations abusives avancées dans [1], une telle approche ne peut, en son état actuel, être comparée à aucune des techniques modernes ayant depuis longtemps fait leurs preuves sur des problèmes autrement plus complexes.

ANNEXE 1 : analyse de la solution Crone en termes d'invariance

L'insensibilité observée reflète une propriété d'invariance par rapport à M (objet même de l'approche Crone, par le biais du terme « insensibilité ») qui apparaît clairement lorsqu'on effectue le changement de variable (fréquence normalisée adimensionnelle) $\tilde{p} := \frac{p}{\omega_u}$, dans le transfert en boucle fermée (33)

dans [1], qui s'exprime alors, à partir de la réponse en boucle ouverte $\beta(p) = \left(\frac{\omega_u}{p}\right)^n$, $n \in]1, 2[$:

$$T(p) = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)} = \frac{1}{1 + \tilde{p}^n} ;$$

cette expression exprime en effet l'invariance de la réponse fréquentielle à un changement d'unité près, ce qui entraîne l'invariance de la réponse échelon au changement de variable correspondant près (temps normalisé adimensionnel): $\tilde{t} := \omega_u t$.

Dans le cas de la suspension Crone, la transposition directe de cette propriété correspond à une transmittance « idéale » de suspension de la forme¹⁵ (voir [9]):

$$C_{idéal}(p) = k p^m, m \in]0, 1[,$$

¹⁵ On notera que la transmittance Crone idéale présente une raideur statique nulle, ne pouvant opposer aucune force constante au poids du véhicule: au plan théorique, cette particularité entraîne l'instabilité interne du système (voir [19]).

qui conduit à la transmittance en boucle ouverte $\beta(p) = \frac{k}{M} \frac{1}{p^{2-n}}$, soit, en boucle fermée et avec $n = 2 - m \in]1, 2[$:

$$T_{\text{idéal}}(p) = \frac{1}{1 + \frac{M}{k} p^n} = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{M}{k} \right)^{\frac{1}{n}} p \right]^n} = \frac{1}{1 + \tilde{p}^n},$$

réponse par conséquent invariante sous le changement de variable $\tilde{p} := \left(\frac{M}{k} \right)^{\frac{1}{n}} p$. Or la transmittance effectivement utilisée dans [1], donnée par l'expression (80), est de la forme:

$$C(p) = C_0 \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_b} \right)^m}{\left(1 + \frac{p}{\omega_h} \right)^{m-1}}.$$

On vérifie aisément que pour $k = \frac{C_0}{\omega_b^{1/m}}$ et $\omega_b \ll \omega \ll \omega_h$, la réponse $C(j\omega)$ est quasiment identique à $C_{\text{idéal}}(j\omega)$ (voir figure 2 dans [1]), de telle sorte que la réponse en boucle ouverte vérifie (à une erreur négligeable près): $\beta(p) = \left(\frac{\omega_u}{p} \right)^n$, $n \in]0, 1[$ (voir (54) dans [1]). Dans cette bande « utile », la réponse fréquentielle en boucle fermée $T(p)$ est par conséquent quasiment invariante sous le changement de variable ainsi défini dès lors que M varie dans un domaine limité et compatible avec cette approximation. Du point de vue temporel, cette quasi invariance à un changement d'unité près concerne la réponse indicielle; elle est visible en figure 5.

Remarque Cette propriété d'invariance est elle-même une conséquence directe de la propriété d'homogénéité, spécifique aux fonctions puissance : $(\lambda x)^\alpha = \mu x^\alpha$; de ce fait, elle est accessible en pratique dans le seul cas de **systèmes monovariabiles de la forme** $H(p) = K p^\alpha$. On notera en outre que l'analyse effectuée ci-avant, basée sur les résultats présentés dans [1], demeure valable dans le cas particulier $m = 1$ (suspension Crone « d'ordre entier »).

ANNEXE 2: Raideur dynamique d'un ressort pneumatique

On considère le ressort pneumatique décrit en figure 11. Le gaz utilisé est l'Azote et on se place dans les hypothèses simplificatrices suivantes, suffisantes en première approximation:

- Hypothèse des *gaz parfaits*¹ (loi de Boyle-Mariotte):

$$PV = nRT, \quad R = 8.31 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}, \quad (1)$$

- *Equilibre thermodynamique* du gaz,
- Régime *adiabatique* (isentropique) pour les *fluctuations rapides* (en dessous de la seconde) de x ,
- Régime *isotherme* pour la détermination du *point moyen de fonctionnement*, fixé par le poids Mg .

L'énergie interne d'un gaz parfait diatomique est donnée par [15]:

$$U = \frac{5}{2}nRT, \quad (2)$$

et la pression P au point de fonctionnement s'exprime:

$$P = \frac{Mg}{S}. \quad (3)$$

Théorème 1 *Au point de fonctionnement défini par Mg , la raideur aux petits mouvements du ressort pneumatique en régime adiabatique s'exprime:*

$$k_{adiab.} := \frac{dF}{dx} = \frac{7}{5} \frac{(Mg)^2}{nRT}. \quad (4)$$

Preuve. L'énergie communiquée au gaz lors d'une variation de volume dV est: $dE = -P dV$. En régime adiabatique (rapide), $dE = dU$; d'après (1) et (2):

$$-P dV = dU = \frac{5}{2}nR dT = \frac{5}{2}d(PV) = \frac{5}{2}(PdV + VdP),$$

d'où l'on déduit:

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{7}{5} \frac{P}{V}.$$

Or $dP = \frac{dF}{S}$, et $dV = -S dx$, d'où l'on tire:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{dF}{S^2 dx} = \frac{7}{5} \frac{Mg}{SV},$$

par conséquent:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{7}{5} \frac{(Mg)^2}{PV} = \frac{7}{5} \frac{(Mg)^2}{nRT}.$$

■

¹On vérifie aisément que cette hypothèse est légitime aux pressions et températures considérées dans le cas de la suspension hydro-pneumatique [15].

La température du point moyen de fonctionnement étant égale à la température ambiante (régime isotherme), on déduit en particulier de la loi de Boyle-Mariotte que la raideur s'exprime en fonction de la pression de gonflage P_0 (au volume maximal V_0) par:

$$k_{\text{adiab.}} = \frac{7}{5} \frac{(Mg)^2}{P_0 V_0}.$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que la raideur reste inchangée dans le cas où le ressort agit par l'intermédiaire d'un bras de levier.

Remarques Le volume V_0 étant fixé, la raideur du ressort pneumatique est essentiellement déterminé par la pression de gonflage $P_0 < P = \frac{Mg}{S}$ (au delà de cette valeur limite, le piston demeure en butée et l'effet ressort n'est plus réalisé). Par ailleurs, on montre aisément à partir de $PV = \text{cte}$ que la raideur en régime isotherme (mouvements lents) est: $k_{\text{isoth.}} = \frac{(Mg)^2}{nRT} = \frac{(Mg)^2}{P_0 V_0}$; on en déduit une estimation du coefficient raideur aux petits mouvements en régime quelconque: $\frac{(Mg)^2}{P_0 V_0} \leq k \leq \frac{7}{5} \frac{(Mg)^2}{P_0 V_0}$. Dans le cas d'une suspension automobile, les fluctuations significatives sont suffisamment rapides pour que l'approximation adiabatique puisse être retenue.

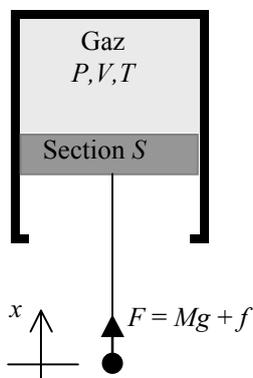


Figure 11 : ressort pneumatique: la force F est équilibrée par l'action de la pression P sur le piston de section S .

Bibliographie

- [1] OUSTALOUP A., MOREAU X. et MATHIEU X. – *Commande CRONE : principes et exemples d'application*. Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, R 7 422. 1997.
- [2] BERGEON B. - *Commande robuste des systèmes multivariables*, APII-JESA, vol. 35, n° 1-2, 2001.
- [3] DOYLE J. C. – *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*, IEE Proceedings, part D, vol. 129, n° 6, 1982, pp 242-250.
- [4] PACKARD A., DOYLE J. C. – *The complex structured singular value*, Automatica vol. 29, n° 1, 1993, pp 71-109.
- [5] JONES R. – *Structured singular value analysis for real parameter variations*, Proc. Of the AIAA GNC Conference, USA, 1987, pp 1424-1432.
- [6] DAILEY R. – *A new algorithm for the real structured singular value*, Proc. Of the ACC, san Diego 1990, pp 3036-3040.
- [7] BERGEON B., IRVING E. – *Commande robuste à modèle fréquentiel de référence*, APII vol 24, 1990.
- [8] GIBSON J. E. – *Non linear Automatic Control*, MacGraw Hill, 1963.
- [9] OUSTALOUP A., MOREAU X., NOUILLANT M. – *The Crone Suspension*, Control Engineering Practice, vol. 4, n° 8, pp 1101-1108, 1996.
- [10] BERGEON B. – *Etude et simulations de suspensions hydro-pneumatiques*, soumis, 2003.
- [11] LAVRENTIEV M., CHABAT B. – *Méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe*, MIR 1977.
- [12] OUSTALOUP A., SABATIER J., MOREAU X. - *From fractal robustness to the Crone approach*, Fractional differential systems: models, methods and applications, European Series on Applied and Industrial Mathematics. ESAIM: Proceedings - Vol.5, dec. 1998, 1-204 –
URL: www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.5/proc-Vol5.15/proc-Vol5.15.htm
- [13] MONTSENY G., BIDAN P., *Suspension automobile et invariance dynamique: analyse de quelques solutions*, Comptes rendus du Séminaire Toulousain Représentation Diffusive et applications, N° 2, LAAS, Toulouse, déc 2001 - URL: www.laas.fr/st-rda/Ps2001/montseny2.ps
- [14] DESBOIS M., TOUACHE F. et J. TOURANCHEAU J. - *L'Automobile, technologie professionnelle générale, tome2: les organes de transmission et d'utilisation*, Editions Foucher, Paris 1972.
- [15] KARAPETIANTZ M., *Thermodynamique chimique*, MIR, 1978.
- [16] MONTSENY G., SALUT G., *A propos de la « Suspension Crone »*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA 2002, juillet 2002, Nantes. URL : www.laas.fr/gt-opd/Pdf02/p361.pdf
- [17] LANUSSE P., MELCHIOR P., MOREAU X., OUSTALOUP A., SABATIER J., *Sur les remarques formulées sur la « Suspension Crone »*. URL : www.lap.u-bordeaux.fr/rieussec/
- [18] MONTSENY G. - *Sur un principe de suspension semi-active d'ordre non entier*, Workshop de l'Association française pour les Sciences et Technologies de l'Information (ASTI) : « Représentation diffusive et applications », LAAS, Toulouse, 24 Octobre 2002. URL: www.laas.fr/gt-opd/ASTI_RD_old.htm