Christian RICORDEAU

Les dimensions des nombres

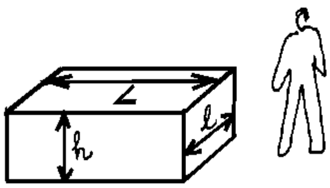
Où l'on verra comment,
dans un phénomène naturel naît une nouvelle dimension,
et pourquoi, avec elle, naît le chaos

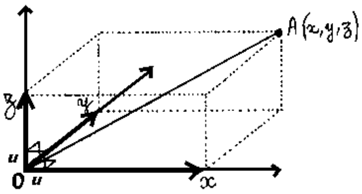
Ce texte reprend le chapitre 4 du livre « l'adieu au big-bang ».
Il est aussi disponible en format html, décomposé en 14 parties accessibles depuis le site Quatuor à l'adresse : http://www.quatuor.org/Math.htm

L'idée essentielle qui sera développée est que les nombres ne sont pas toujours à une seule dimension, mais qu'un nombre, tel que « 2 », peut aussi bien être la mesure d'une dimension de longueur que la mesure d'une surface ou d'un volume.
Cela ne signifie pas seulement que l'on peut mettre une unité « m », « m^2 » ou « m^3 » derrière lui, mais, surtout, qu'il ne va pas se calculer de la même façon selon le nombre des dimensions qu'il porte : 2 x 2 x 2 ne donnera pas le même résultat selon que les « 2 » en question auront 1, 2, 3 ou 4 dimensions.

1 - Qu'est-ce qu'une dimension ?

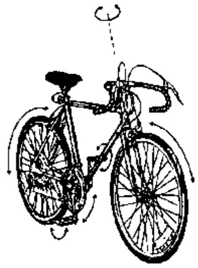
Dans l'antiquité, lorsqu'on parlait d'une dimension, on pensait soit à la hauteur, soit à la longueur, soit à la largeur d'une chose.





Au XVII^e siècle, Descartes en donne une définition plus générale. Pour lui, une dimension est une coordonnée que l'on mesure dans un repère d'axes. Dans cette façon de voir, la hauteur, la longueur et la largeur ne correspondent plus qu'à un cas particulier de coordonnées, celui où les trois axes sont orthogonaux entre eux et sont mesurés avec une même unité de longueur.
Usuellement, on dit que ce sont les coordonnées de l'espace euclidien.
Cette définition se montra spécialement utile pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, et elle a été exploitée au mieux par la mécanique de Newton, par exemple pour décrire le mouvement de la terre dans son orbite autour du soleil.

Au milieu du XIX^e siècle, le mathématicien Riemann donna une interprétation encore plus générale de la notion de dimension. Puisqu'un phénomène évolue sous l'influence de divers paramètres, Riemann suggéra que l'on attribue une coordonnée distincte à chacun de ces paramètres. De nos jours, on appelle ces paramètres des « degrés de liberté ». L'importante nouveauté de cette conception est que rien ne nous empêche de donner à chaque point plus que trois coordonnées.
Dans cet esprit, on cite l'exemple que Ian Stewart donne des dimensions du mouvement d'une bicyclette dans son livre « Dieu Joue-t-il aux dés ? » :



« Une bicyclette a (selon une estimation réductrice) cinq parties mobiles principales : le guidon, la roue avant, l'assemblage essieu-chaîne-roue arrière, et deux pédales. Chacune de ces parties nécessite pour être décrite une coordonnée de position et une coordonnée de vitesse : un ingénieur dirait qu'elle a « dix degrés de liberté ». Pour faire de la bicyclette, vous devez sentir le mouvement d'un point dans un espace à 10 dimensions ! C'est peut-être pour cela que c'est si difficile à apprendre. »
[Ian Stewart - Dieu Joue-t-il aux dés ? - Flammarion 1992]

Ainsi donc, une dimension fut tout d'abord considérée comme un aspect très concret des objets.
Puis cette dimension devint la coordonnée d'un point se déplaçant dans un espace réel à trois dimensions.
Puis cette coordonnée devint un degré de liberté dans un espace à « n » dimensions, « n » pouvant être, alors, aussi grand que l'on veut.

Ces dernières années, cette définition des dimensions comme « coordonnées d'un point » ne fut pas remise en question, mais elle a commencé à poser problème.
Elle pose problème depuis que Benoit Mandelbrot a montré la pertinence qu'il y a, bien souvent, à utiliser des dimensions d'espace fractionnaires. Une dimension fractionnaire (on dit « fractale »), c'est, par exemple, une dimension 1,3897. Parler d'un point dans un espace à 6 ou 10 dimensions, on peut le concevoir comme une simple extension de ce que l'on conçoit dans un espace à 3 dimensions : c'est plus compliqué, mais c'est toujours un peu la même chose. Mais les coordonnées d'un point dans un espace à 1,3897 dimensions, qu'est-ce que cela peut bien signifier ? À quoi cela peut-il ressembler ? Cela ne peut plus être seulement « un peu plus compliqué » qu'un espace de dimension 1 ou 2, on sent bien que cela doit être « autre chose », de tout différent. Pour le moins, c'est bizarre.
Par ailleurs, il a bien fallu que les scientifiques finissent par reconnaître qu'ils laissaient de côté de nombreux phénomènes naturels fréquents mais qu'ils ne parvenaient pas à calculer. Par exemple, quelque chose d'aussi simple et banal que celui-ci : lancez un bouchon dans un fleuve, et demandez-vous où il sera dans une heure : toujours à la même place, prisonnier d'un tourbillon ? Ou très en aval ? Ou très en amont, et peut-être sur l'autre rive, emporté par une série de contre-courants ? Aucune équation ne peut vous aider à prévoir la réponse.
Des équations peuvent vous permettre de calculer avec une précision diabolique l'évolution des coordonnées d'une sonde lancée dans l'espace entre les planètes, mais elles vous laisseront désemparés si vous voulez prédire avec la moindre précision l'évolution des coordonnées d'une feuille qui tombe d'un arbre, juste devant votre nez, ballottée dans un très léger courant d'air.
Dans le jargon scientifique d'aujourd'hui, on appelle ces phénomènes insolubles en équations, le « chaos déterministe ». Déterministe, parce que des effets objectifs et précisément mesurables et repérables déterminent la suite des évènements. Chaos, parce qu'on ne sait pas du tout ce qui va se passer, malgré la connaissance que nous avons de toutes les données qui déterminent ces évènements.

Et du chaos déterministe, on finit par s'apercevoir que cela fourmille dans la nature. Les mouvements de l'eau ou de l'air, par exemple, sont dans bien des situations chaotiques. Mais pour avoir le chaos déterministe, vous avez juste besoin de prendre 3 corps et de chercher leurs influences réciproques. La terre qui tourne autour du soleil, c'est parfaitement décrit par une équation. Mais la terre, plus la lune, plus le soleil, et leurs attractions réciproques, c'est déjà fondamentalement imprévisible. On y arrive en bricolant les équations par des approximations et des corrections pas très limpides d'un point de vue mathématique, mais on y arrive parce que les planètes ne tournent pas vite, et que l'on ne cherche pas à savoir ce qui se passera dans des milliards d'années. À la question : « le système solaire est-il stable ? », personne n'a encore apporté de réponse certaine.

L'explication usuelle est de dire que l'imprévisibilité de tels phénomènes résulte d'une « sensibilité extrême aux conditions initiales ». Vous lancez le bouchon dans le fleuve une fraction de millimètre plus à gauche ou à droite, et son voyage dans le fleuve en sera tout différent, simplement parce qu'un très petit écart au départ sera amplifié au cours de son trajet, de plus en plus amplifié au fur et à mesure que le temps passe, et, finalement, parce que cela le dirigera, soit vers un tourbillon faisant du sur-place, soit vers un courant régulier bien installé qui le mènera rapidement vers l'aval. Or, pour calculer un mouvement, il faut bien arrondir les résultats d'un calcul avant de passer au suivant, puisque cela ne tombe jamais « juste ». Quelle que soit la précision que l'on s'accorde, il reste toujours un infime écart d'arrondi dans le résultat, et cet infime écart s'amplifie lui aussi au cours des calculs successifs, et il finit par être suffisamment important pour fausser complètement le résultat de l'évolution que l'on cherchait à prévoir.

Nous allons essayer de proposer un nouvel angle d'attaque de ce type de problème, et suggérer que l'impuissance à décrire par une équation l'évolution des coordonnées d'un point dans un phénomène chaotique ne proviendrait pas d'une réelle imprévisibilité du phénomène. Elle résulterait, plus simplement, de l'inadaptation de notre manière de représenter ces phénomènes, c'est-à-dire de les dimensionner.

Le problème ne serait pas sans solution, il serait seulement mal posé.

Et nous ne le posons pas correctement, précisément parce que nous le posons en termes de coordonnées de dimensions, c'est-à-dire en termes de trajets de points dont les coordonnées évoluent dans l'espace et dans le temps.

Nous essaierons de démontrer qu'une définition entièrement nouvelle des dimensions est requise, plus générale encore que celle de coordonnées dans un espace à « n » dimensions.

Dans cette définition, une coordonnée ne sera plus à son tour qu'une espèce spéciale de dimensions, et considérer la trajectoire de points sera seulement une manière parmi d'autres de décrire l'évolution d'un processus. Une manière parfois utile, mais parfois complètement inappropriée.

Avec cette définition, les dimensions fractionnaires de Mandelbrot perdront leur aspect bizarre, et elles apparaîtront même plus naturelles et plus normales que les dimensions entières que l'on utilise pour décrire l'espace euclidien.

La conception actuelle définit une dimension comme la valeur que l'on donne à une coordonnée.

Pour résumer la définition nouvelle que l'on va proposer ici, on dira qu'une dimension est la valeur que l'on donne à une déformation.

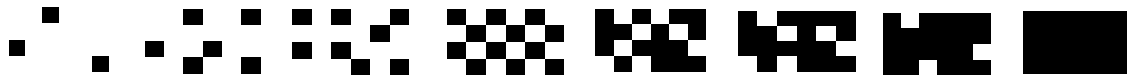
De façon générale, nous parlerons d'ailleurs de « dimensions de déformations ».

Mais, qu'est-ce donc qu'une dimension de déformations ?

Pour d'abord introduire le lien essentiel entre dimension et déformation, nous commencerons par montrer que l'on peut très bien mesurer certaines déformations sans jamais utiliser la moindre coordonnée.

2 - Mesure de la déformation d'un contraste

Prenez une page blanche, et faites-y des taches noires. Vous obtenez alors un certain contraste entre le blanc et le noir. Plus la taille des taches ou plus leur nombre est grand, et plus ce contraste est grand. Tout du moins, cela est valable au départ, tant qu'il y a moins de taches qu'il n'y a de surface laissée blanche.
On peut mesurer ce contraste, par exemple en disant qu'il est égal au rapport entre la surface tachée et la surface laissée blanche.
Au début le contraste est nul, puisque la page est toute blanche. Puis il augmente. Il devient 0,1 puis 0,3 puis 0,5, puis 0,7, etc. Quand la moitié de la surface est tachée, il est exactement égal à 1.
Si l'on continue alors à tacher, le contraste cette fois va diminuer, puisque la surface devient de plus en plus « toute noire ». On peut continuer à le mesurer de la même façon, mais en calculant cette fois le rapport entre la surface encore laissée blanche et la surface déjà noire. De 1, le contraste reviendra donc à 0 lorsque la feuille sera devenue toute noire.



0 0,14 0,33 0,5 1 0,5 0,33 0,14 0

On a bien mesuré une grandeur : soit 0, soit 0,1, soit 0,387, soit 0,74, etc. On peut donc dire qu'il y a dans le contraste mesuré quelque chose qui s'apparente à la notion de dimension. Cependant, nous n'avons eu à définir aucune coordonnée sur la feuille : cela n'est donc pas une dimension de coordonnées.
Si l'on dit que le contraste est la déformation que subit la blancheur ou la noirceur de la feuille, alors on a défini la valeur du contraste que l'on a calculé comme étant une dimension de déformations.
On saisit tout de suite une différence fondamentale entre dimension de déformation et dimension de coordonnées :

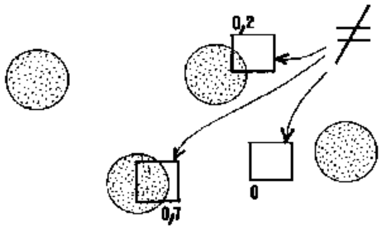
- un point peut aller, a priori, jusqu'à l'infini, et, par conséquent, ses coordonnées pourront varier de $-\infty$ à $+\infty$ en passant par 0 ;
- par contre, un phénomène ne peut se déformer au-delà d'un maximum sans s'inverser ou sans se rompre. Si l'on poursuit, malgré tout, la déformation au-delà de ce maximum, on n'augmente plus la valeur de cette déformation, mais on la ramène vers 0 : on la ramène progressivement, s'il s'agit d'un phénomène similaire au noircissement puis au blanchiment d'une feuille blanche, on la ramène brutalement, si le maximum correspond à une rupture qui fait cesser la déformation.

Cela revient à dire qu'une dimension de coordonnées se déplace comme sur une droite qui peut aller jusqu'à l'infini dans l'espace Euclidien, tandis qu'une dimension de déformations tourne comme en rond sur un cercle.

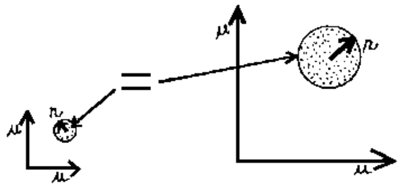
On peut saisir aussi, avec cet exemple, la complémentarité qu'il y a entre les deux systèmes de dimensions, celui par coordonnées et celui par déformations. On peut concevoir, par exemple, que le contraste de 0,3 que l'on a donné à un espace ne se limite pas à des taches sur une feuille, mais qu'il s'étend sur tout un plan 2 D aux dimensions infinies, ou même qu'il s'agit de bulles colorées qui occupent un volume 3 D fini ou infini. Dans les deux cas, quel que soit le déplacement fait dans cet espace, le contraste entre le fond de l'espace et les taches ou les bulles que l'on y trouve reste dans une proportion identique.
Le phénomène de contraste peut donc s'étendre à des espaces de coordonnées infinies, alors que lui-même ne prend que des valeurs qui n'oscillent qu'entre 0 et 1.

3 - « En théorie », une dimension de contraste peut être auto-similaire

L'exemple de la feuille tachée présente une faiblesse : on ne mesure pas toujours la même dimension de contraste, même si on mesure toujours la même surface, et même si la proportion des taches y est partout identique.



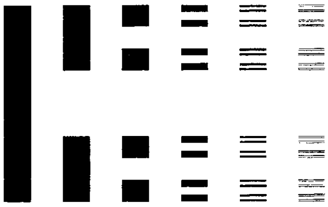
En effet, le résultat va dépendre de la portion de surface sur laquelle on effectue la mesure. Calcule-t-on sur toute la surface ou seulement sur un bout ? Si l'on n'en prend qu'une portion et que l'on tombe dans l'intervalle entre deux taches, on trouvera un contraste 0, alors que si l'on tombe « à cheval » sur une tache, on trouvera un contraste variant aléatoirement entre 0 et 1: cela sera peut-être 0,3 dans une mesure et 0,7 dans une autre.
Si le contraste est homogène sur la feuille, c'est-à-dire si les taches sont également réparties, cela ne change rien : plus on prend une grande surface, et plus on trouve un résultat constant, mais plus on prend une petite surface, et plus le résultat varie de façon importante et aléatoire.
Il n'existe aucun « truc » pour corriger le résultat en fonction de l'échelle de mesure et pour obtenir, ainsi, toujours le même résultat.
Il n'en va pas de même avec les dimensions de coordonnées : on peut regarder les choses de loin ou de près, elles mesurent toujours la même dimension, car il suffit d'adapter l'échelle de mesure à l'échelle de lecture.



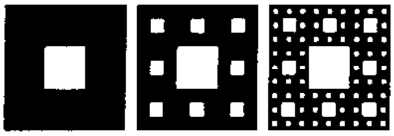
Pour qu'il en soit de même avec les dimensions de déformations, il faut qu'elles possèdent une caractéristique particulière : il faut qu'elles soient auto-similaires, c'est-à-dire similaires à elles-mêmes à toutes les échelles.
Pour reprendre l'exemple des taches, il faudrait que la taille et l'organisation des taches soient coordonnées de telle sorte que les taches qui semblent continues, vues de loin, apparaissent, quand on les regarde de plus près, constituées de taches plus petites qui, elles-mêmes, lorsqu'on se rapproche encore plus, apparaissent constituées de taches encore plus petites, etc... depuis l'infiniment grand jusqu'à l'infiniment petit. Bien entendu, à chaque « niveau de tache », la proportion de blanc et de noir doit être la même pour que la mesure de la « déformation de la blancheur » soit constante.
Pratiquement, cela n'est pas possible, car on ne peut pas diviser une tache à l'infini, mais théoriquement, c'est possible. Et d'ailleurs, cela existe.

- une « poussière de Cantor » répond à cette définition : c'est une ligne dont on enlève le 1/3 central, et sur chaque 1/3 restant, on enlève le 1/3 central, et cela à l'infini.
- un « tapis de Sierpinski » également : c'est un carré dont on a enlevé le carré central, puis sur chacun des carrés en lesquels on peut décomposer ce qui reste, on enlève le carré central, etc.
- une « éponge de Menger » est la même chose qu'un tapis de Sierpinski, mais avec des cubes au lieu de carrés.

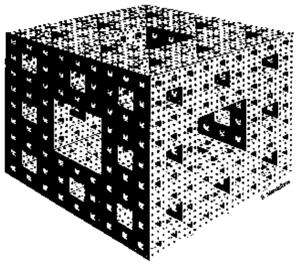
une « poussière de Cantor »



un « tapis de Sierpinski »



une « éponge de Menger »



[les dessins sont repris de l'ouvrage de B. Mandelbrot : les objets fractals - Editions Flammarion]

On a donc un peu avancé dans le définition d'une dimension de déformations :

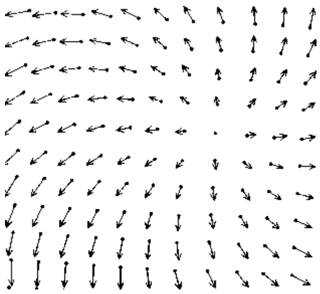
- d'abord, on a vu comment une déformation pouvait avoir une valeur, indépendamment de toute notion de coordonnées.
- puis, on a trouvé une différence essentielle entre dimensions de déformations et dimensions de coordonnées : les premières oscillent entre 0 et 1, les secondes vont de - ∞ à + ∞.
- enfin, on a vu qu'une dimension de déformation n'avait pas toujours le caractère autosimilaire à toutes les échelles d'un système de coordonnées, mais qu'elle pouvait, dans certains cas, obtenir cette particularité.

Après cette première approche, nous sommes préparés pour envisager une deuxième sorte de dimensions de déformations, celle qui correspond à la réalisation de trajets.

4 - Le piège de la représentation vectorielle des forces

L'essence des dimensions de déformations est donc de prendre des valeurs circulaires, des valeurs qui tournent en rond sans quitter la boucle 0/1. Pour rappeler cette propriété, nous parlerons parfois de dimensions de déformations « courbes », cela par opposition aux dimensions « droites » que sont les coordonnées qui se mesurent sur des axes droits.
Nous avons vu comment des dimensions courbes permettent de décrire l'évolution d'un contraste. Nous allons voir maintenant comment elles permettent aussi de mesurer des trajets. Le point important à comprendre à ce propos est qu'il ne faut pas confondre la « courbe » que décrit un mobile, c'est-à-dire son trajet, et les valeurs « courbes » de la déformation qui fait bouger le mobile et qui provoque donc ce trajet.

En effet, ce que l'on va chercher à décrire, ce n'est pas la forme du parcours lui-même, qui ne sera qu'une résultante de la dimension de déformations, mais c'est l'organisation des forces qui s'appliquent en un point et qui, précisément, le forcent à se déplacer.

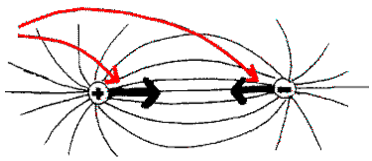


Fondamentalement, c'est à décrire l'effet d'un champ de forces, par exemple un champ électromagnétique, que cette dimension sera utile.
Habituellement, un tel champ est représenté par un ensemble de vecteurs qui, en tout point, décrivent la direction et la vitesse d'un écoulement. Ce que l'on sait bien exprimer en termes de coordonnées (exemple ci-contre).

[image tirée d'un article de G. Hooft : les théories de jauge et les particules élémentaires - Pour la Science]

L'originalité de la démarche que nous proposons consiste à ne pas cumuler en chaque point de l'espace, l'ensemble des sollicitations qui s'exercent sur lui, à ne pas les résumer en un seul vecteur. Nous proposons, au contraire, de laisser ouvert, « non résolu », le cumul de ces sollicitations.
Dans le cas général, il reste donc en chaque point du champ de forces une infinité de vecteurs, et chacun indique, dans une direction spécifique, l'intensité de la sollicitation qui s'exerce en ce point et selon cette direction.
Par exemple, dans le cas de deux charges électriques de signes contraires, le champ de forces se représente par une série de courbes reliant les deux charges. Dans un système de coordonnées, l'effet de ce champ est résumé par 2 vecteurs dirigés depuis chaque charge vers l'autre : elles s'attirent d'un centre à l'autre, et ces 2 vecteurs décrivent l'intensité et la direction de cette attraction.

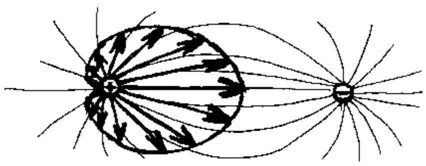
usuellement, l'attraction entre les 2 charges électriques est résumée par 2 vecteurs



Dans notre système de représentation, nous n'allons plus « résumer » l'effet des champs électriques, mais, au contraire, nous allons le maintenir étalé dans toutes les directions de l'espace. Chaque ligne de champ correspond à un effet spécifique, à une sollicitation particulière vers l'autre charge, et nous représentons donc, pour chaque ligne, la direction de cette sollicitation : tangente à la courbe, et son intensité : plus elle pointe vers le centre de l'autre charge, plus elle est grande.

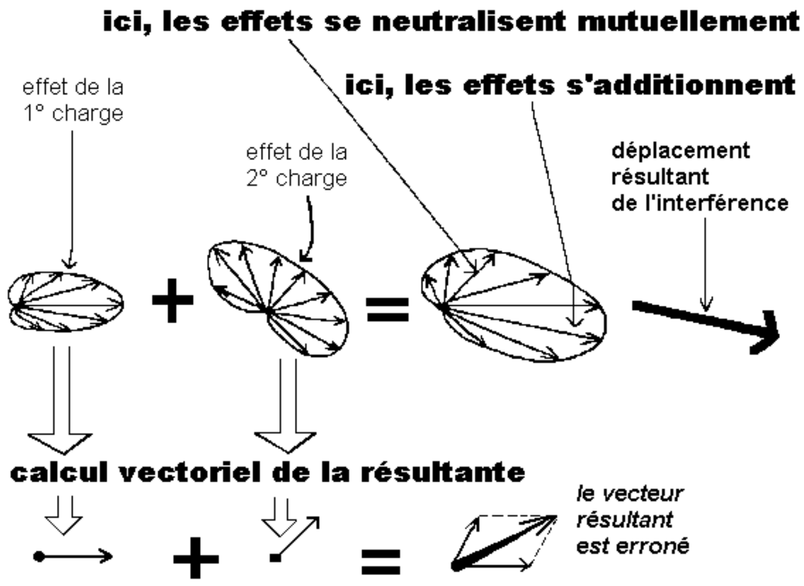
notre proposition

pour représenter la même attraction électrique



En passant, on note que si les 2 charges sont faibles, ou si toutes les 2 sont fortes, les dessins auront la même allure et ils se déduiront simplement l'un de l'autre par homothétie. Bref, ils seront auto-similaires.
L'allure de ce graphique ressemble à un cœur. Il est truffé de vecteurs dont l'intensité varie entre un minimum et un maximum. C'est là le premier aspect « courbe » de la grandeur, puisqu'elle tourne en rond sur un cercle allant de 0/1 à 1/0.

Si l'on calculait la résultante de tous ces vecteurs, elle serait un vecteur unique qui dirait la direction et la vitesse de la courbe que décrit la charge en se déplaçant. C'est là le second aspect « courbe » de cette dimension, celui que nous allons négliger.
Au premier abord, cela peut sembler compliquer les choses que de s'abstenir de réduire l'ensemble des sollicitations en un point à un vecteur unique.
Envisageons cependant le cas d'une charge qui n'est pas soumise qu'à une seule autre charge, mais qui est soumise à deux charges distinctes. Chaque charge donne alors lieu à une dimension de déformations courbe, et toutes les deux sont centrées sur le même point. Entre ces deux dimensions, peuvent se créer des effets d'accord ou d'opposition entre leurs formes respectives, et ces effets peuvent se cumuler dans certaines directions et s'annuler dans d'autres directions. Un simple vecteur ne pourra pas garder trace de tels accords ou désaccords de phases, et seul un étalement complet des sollicitations dans toutes les directions permet de ne pas gommer la complexité des interférences dont l'intensité varie selon les directions de l'espace. Or, précisément, la compréhension de l'évolution d'un phénomène réside souvent dans l'allure des interférences entre les multiples paramètres qui le régissent.



Ainsi, en gardant en présence l'ensemble des sollicitations qui s'appliquent à chaque point de l'espace, nous conservons une représentation du phénomène qui se comporte de façon similaire au phénomène lui-même. Cela ne le complique donc pas, puisque cela permet de mieux le comprendre.
À l'inverse, la simplification apparente du calcul vectoriel conduit parfois à des résultats complètement erronés, et ce risque existe chaque fois qu'un phénomène est conditionné par l'interférence de plusieurs causes et que cette interférence varie selon les directions.
Et puis, finalement, nous verrons que la représentation d'un nombre infini d'intensités, variant dans un nombre infini de directions . . . ce n'est pas si compliqué que cela. Cela peut même se représenter de façon aussi simple que par un seul vecteur.
Mais avant de pouvoir envisager cet aspect de la représentation simultanée de données en nombre infini, nous devons faire un détour mathématique du côté des nombres, car si nous avons dit que c'est la représentation par coordonnées qui handicape notre compréhension de certains phénomènes, nous devons maintenant montrer que c'est notre conception des nombres et de leur calcul qui handicape notre compréhension des dimensions.

5 - Compter autrement

Compter autrement ? Qu'est-ce à dire ? Que 2 et 2 ne feront plus 4 ?
Ils continueront à faire 4, mais 2 + 0,1, par exemple, ne fera plus systématiquement 2,1. Car c'est la relation des nombres entiers à leurs décimales que nous allons devoir reconsidérer, ce qui nous permettra, par la suite, d'aborder de façon plus pertinente les dimensions fractionnaires de Mandelbrot qui sont, précisément, des dimensions à valeurs décimales.
Mais, avant d'aborder ces dimensions, nous devons comprendre pourquoi il vaut mieux considérer, par exemple, que 0,5 n'a rien à voir avec le trajet qui mène de 0 à 1. Pourquoi, la plupart du temps, 0,5 n'est surtout pas entre 0 et 1.
Bizarrement, la façon la plus simple de comprendre comment voyager de 0 à 1 sans passer par 0,5 est de passer, d'abord, par l'infini.
Nous y allons.

6 - Les infinis aberrants de Cantor

Interrogez un physicien des particules sur l'infiniment petit, il vous dira que s'y produisent des choses impossibles et impensables à notre échelle. Tel qu'un photon de lumière qui prouve être à la fois un corpuscule très précisément localisé et une onde aux dimensions multiples et à la position très incertaine dans l'espace.
Interrogez un mathématicien sur l'infiniment grand, il vous dira la même chose : à l'infini, les nombres acquièrent des propriétés impossibles et impensables juste avant l'infini.
Par exemple, comptez les nombres entiers pairs : 2, 4, 6, 8, etc. Quel que soit le moment où vous vous arrêtez de compter, vous pouvez facilement calculer que leur nombre est toujours égal à la moitié du nombre total des entiers passés en revue, puisque pour chaque nombre pair, vous devez ajouter un nombre impair pour obtenir le nombre total des entiers. Et vous voyez clairement que cela restera vrai, même si vous comptez très loin vers l'infini : un nombre impair, un nombre pair, un nombre impair, etc. C'est une alternance impeccable et ultra simple que vous pouvez continuer à l'infini.
Eh bien, lorsque vous y êtes, précisément, à l'infini, et que vous comptez alors le nombre infini des nombres entiers que vous avez passés en revue et le nombre des nombres pairs que vous avez pointés une fois pour deux entiers, vous trouvez que ces deux nombres ne sont pas le double et la moitié l'un de l'autre, mais qu'ils sont parfaitement et strictement égaux l'un à l'autre.

Il s'y passe donc d'étranges choses à l'infini, pour qu'une propriété vraie . . . jusqu'à l'infini, ne soit brusquement plus du tout vraie lorsqu'on y arrive.
Bien entendu, les mathématiciens sont des gens raisonnables. S'ils sont contraints d'admettre ce fait insensé, c'est qu'il a été prouvé. C'est la conclusion logique d'une démonstration, et un mathématicien ne peut pas se soustraire à une conclusion logique.
C'est Cantor, le père de la théorie des ensembles, qui a fait cette démonstration.
Nous résumons maintenant sa méthode.

Elle commence par une astuce pour comparer tous les ensembles sans avoir besoin de compter tous leurs éléments, ce qui permet donc de comparer même des ensembles infinis que l'on ne peut pas compter.
L'astuce consiste à apparier terme à terme deux ensembles, c'est-à-dire à associer tout élément de l'un à un élément de l'autre, et l'on regarde s'il reste quelque chose dans l'un quand l'autre est épuisé.
Bien entendu, pour les ensembles infinis, on ne fait pas réellement l'appariement pour tous les éléments : on trouve une méthode de principe, et l'on se demande si, en appliquant cette méthode jusqu'à l'arrivée de l'un à l'infini, il resterait alors quelque chose dans l'autre.
Ainsi, pour comparer le nombre infini des nombres entiers et le nombre infini des nombres irrationnels, la méthode est la suivante :

1) on commence par supposer que l'on dresse une liste exhaustive de tous les nombres irrationnels, et l'on en fait une colonne verticale ;
[Rappelons que les nombres irrationnels sont des nombres qui possèdent un nombre infini de chiffres décimaux et que, dans cette suite infinie, aucune périodicité ne peut être trouvée permettant d'imaginer les chiffres qui viendront à partir de l'analyse des chiffres qui sont déjà venus. « π », par exemple, est un nombre irrationnel]
2) puis, on apparie chaque nombre irrationnel à un nombre entier, en commençant par 1. En somme, après avoir fait une colonne avec les nombres irrationnels, on compte combien cette colonne contient de lignes, en partant de 1 et en allant jusqu'à l'infini ;
3) une fois ces deux colonnes de nombres entiers et de nombres irrationnels mises côte à côte, on se pose alors la question suivante : le nombre d'entiers étant infini, y a-t-il encore plus de nombres irrationnels qu'il y a de nombres entiers ? C'est-à-dire, la colonne des nombres irrationnels continue-t-elle après l'arrivée à l'infini de la colonne des entiers ?

La réponse est oui.
Il suffit, pour trouver un nombre irrationnel qui ne soit pas apparié à un entier, de prendre, par exemple, le 1^er^ nombre irrationnel de la liste et d'en changer le premier chiffre, de modifier son 2^e^ chiffre pour qu'il soit différent du 2^e^ chiffre du 2^e^ nombre irrationnel de la liste, de modifier son 3^e^ chiffre pour qu'il soit différent du 3^e^ chiffre du 3^e^ nombre irrationnel de la liste, etc.
Quand nous aurons atteint, à l'infini, le dernier nombre irrationnel apparié avec un entier, nous aurons formé un nouveau nombre irrationnel qui sera différent de tous ceux appariés, puisque différent de chacun d'eux par au moins un chiffre.
La colonne des irrationnels contient donc au moins un chiffre non apparié avec un entier, et l'on peut continuer, aussi longtemps que l'on veut, à générer de la même façon un nouveau nombre irrationnel qui sera différent de tous les précédents et qui ne sera donc pas apparié, lui non plus, avec un entier. Les irrationnels sont donc plus nombreux que le nombre infini des nombres entiers.

La comparaison des nombres entiers et des nombres irrationnels n'a sans doute pas beaucoup de conséquence pratique en elle-même. Mais, avec la même démarche, Cantor a démontré des choses « plus graves » si l'on cherche à utiliser les nombres pour représenter les phénomènes physiques, et en particulier pour définir les propriétés des espaces.
Ainsi, on peut démontrer qu'il y a plus de points sur un segment de droite minuscule qu'il y a de nombres dans l'ensemble infini des nombres entiers.
« Pire », on peut démontrer que tout segment de droite, quelle que soit sa taille, minuscule ou gigantesque, contient le même nombre de points, et qu'il y a autant de points sur une droite 1 D que sur un plan 2 D, et même que dans tout un volume 3 D.
Bref, toutes les propriétés « de bon sens » sur le rapport entre les dimensions d'espace qui sont susceptibles de se prolonger de façon continue et régulière jusqu'à l'infini, seraient soudainement caduques à partir de l'infini.
Des propriétés, normalement incompatibles entre elles, le deviendraient soudainement, à l'infini.

7 - Reprenons à partir de zéro

On ne démontrera pas que Cantor fait une erreur de raisonnement logique quand il s'approche de l'infini, ou lorsqu'il prétend l'atteindre.
On essaiera de démontrer que c'est au départ même, qu'il prend un mauvais chemin.

Cantor nous demande de commencer par ranger en ligne tous les nombres irrationnels. Or, tous les nombres irrationnels ne peuvent tout simplement pas se mettre tous en même temps sur une même ligne.
Depuis Cantor, précisément, les mathématiciens ont un concept qui s'appelle la « droite réelle », sur laquelle ils rangent tous les nombres réels par ordre de taille *[nota : on rappelle que les réels comprennent les nombres rationnels et les nombres irrationnels]*. On essaiera de montrer, au-delà même des nombres réels irrationnels, que la droite réelle est un monstre impossible. Qu'il n'y a aucune ligne droite sur laquelle on puisse ranger tous les nombres réels à la fois.
Pour le démontrer, il faut revenir à la source, c'est-à-dire à la façon dont les nombres sont produits selon la théorie des ensembles.
Commençons par les nombres entiers.

Dans la théorie des ensembles, la méthode la plus usuelle pour produire les nombres entiers est de commencer par faire un constat : on dit qu'aucune chose ne peut être le contraire d'elle-même. Par exemple, qu'aucune chose ne peut être à la fois positive et négative, à la fois ici et pas ici, etc.
Ce constat réalisé, on fait un paquet de toutes les choses qui sont contradictoires avec elles-mêmes : ce paquet ne contient rien. On l'appelle alors « l'ensemble vide ». Puis on dit que, l'ensemble vide, cela correspond au chiffre « zéro ».
Le chiffre zéro, cela sert à se souvenir que l'on a fait un paquet qui s'appelle l'ensemble vide. Cette étiquette n'est pas mise sur l'ensemble vide lui-même. L'étiquette de l'ensemble vide, c'est-à-dire son nom, c'est : « l'ensemble vide ». Zéro, c'est l'étiquette qui correspond à l'opération même de mise en paquet, de désignation de l'ensemble vide, de reconnaissance de son existence. C'est à cet acte que zéro sert d'étiquette, c'est-à-dire de nom.

Zéro, c'est donc le constat de ce que l'on a, quand on a rien.
On a donc un ensemble vide. « Un » ensemble vide ? Mais ce n'est pas rien cela ! C'est « une » chose. Mettons tout de suite une étiquette à ce constat que l'on vient de faire, qu'il y a « un » ensemble vide, et disons que ce constat sera le chiffre « 1 ».
On a donc fait le constat d'un ensemble vide et le constat d'un ensemble qui contient 1 chose (l'ensemble vide, précisément), cela fait donc 2 choses. Vite, une étiquette pour nous rappeler de ce nouveau constat : le chiffre « 2 ». Cela fait donc 3 choses maintenant : le chiffre « 3 », etc. bien sûr, et jusqu'à l'infini.

Quand on génère ainsi les nombres, à partir de la mise en ensemble des choses qui sont le contraire d'elles-mêmes, on remarque deux faits :

- d'une part, on ne trouve jamais dans les nombres que l'on produit ainsi, quelque chose qui ressemble de près ou de loin à un nombre décimal, fractionnaire, ou irrationnel. On tombe toujours pile sur des entiers, jamais entre deux ;
- d'autre part, on s'aperçoit que l'on ne peut pas faire le constat du vide d'éléments dans un ensemble sans constater en même temps qu'il existe « 1 » tel ensemble qui ne contient rien, donc, qu'il y a du rien et du 1, donc, 2 choses, donc, du rien du 1 et du 2, donc, 3 choses, etc.

Faire ainsi 0, 1, 2, 3, 4, etc. à l'infini, ce n'est donc pas avancer progressivement comme sur une droite, par petits sauts répétés se produisant les uns après les autres et faisant à chaque fois sur cette droite une encoche séparée de la précédente et de la suivante, c'est au contraire faire défiler d'un seul coup tous les nombres jusqu'à l'infini, alors même qu'on en est encore à faire le 0.
Tous les nombres entiers sont donc contenus dans le zéro, ramassés dans le zéro, même l'infini.
Bien sûr, après coup, c'est-à-dire après les avoir générés, rien ne nous empêche de ranger tous les nombres entiers positifs sur une droite qui part de 0 et qui va jusqu'à l'infini. Mais c'est alors un rangement, un étalement. Cela n'a rien à voir avec la dynamique de création des nombres entiers.
Cela n'a rien à voir avec le fait qu'ils existent, que l'on peut les produire.

Maintenant que nous avons les nombres entiers, passons aux nombres décimaux, tels que 0,1 ou 0,23489421.
Tous les nombres entiers étant ramassés sur 0, il n'y a pas de distance entre le 0 et le 1, donc pas de trajet possible entre le 0 et 1. Aucun trajet que l'on pourrait graduer en mettant l'étiquette d'un nombre décimal à tous les intervalles rencontrés.
Si l'on veut graduer quelque chose sans pouvoir circuler sur ce quelque chose en faisant des marques le long de ce trajet, le seul moyen que l'on ait consiste à simplement déformer cette chose et à garder souvenir de l'intensité de cette déformation.
C'est ainsi que l'on va générer les nombres décimaux : en graduant l'intensité d'une déformation, de telle sorte que l'absence complète de déformation sera notée 0, et que la déformation maximale possible sera notée 1.

On dira que cette procédure n'est pas dans la théorie des ensembles.
Mais on avait bien prévenu que l'on allait proposer un changement dans la conception que l'on se fait des nombres.
D'ailleurs, ce que l'on va faire maintenant, ce n'est pas vraiment proposer une nouvelle façon de compter, mais c'est seulement se rendre conscient de ce que l'on fait réellement quand on prend un nombre décimal.
De la même façon que Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, nous faisons bien quelque chose quand nous « prenons » un nombre décimal. Si tous les nombres entiers sont ramassés dans le 0 et n'ont par conséquent aucun écart entre eux, alors nous sommes bien obligés d'admettre que ce que nous faisons sans y penser quand nous prenons un nombre décimal, cela ne peut pas être un trajet, cela ne peut être qu'une déformation.
Comment nous y prenons-nous ?
Prenons un nombre décimal quelconque, par exemple 0,340238911352. On constate, rien qu'en l'écrivant, plusieurs faits incontournables :

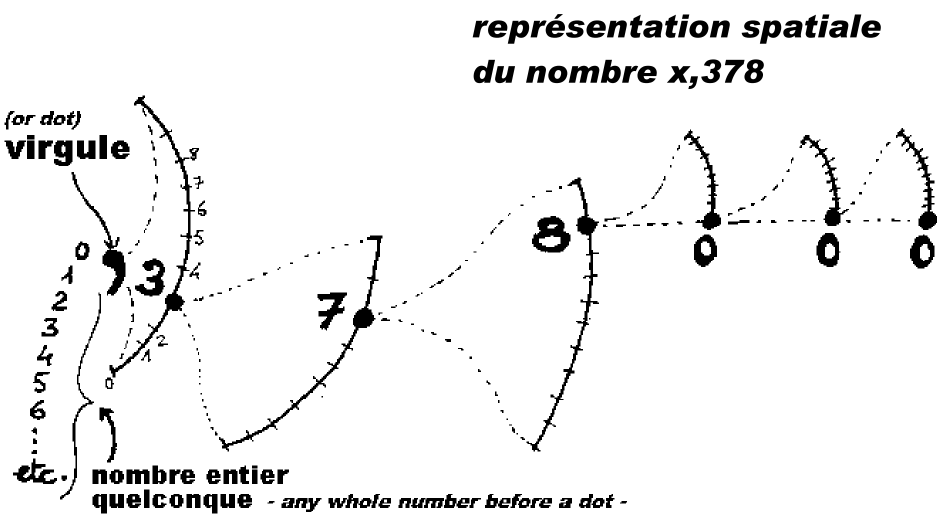
1) D'abord, on met une virgule. C'est-à-dire que l'on met une étiquette d'un type spécial, qui sert à nous souvenir que ce qu'il y a à gauche et à droite de ce signe ne doivent pas être mélangés ;
2) Ensuite, derrière la virgule, on met plusieurs chiffres qui sont autant d'étiquettes à des choses dont on veut se souvenir. Dans ce cas, on a employé 12 chiffres après la virgule. Si l'on a employé 12 chiffres, c'est qu'on en avait besoin. Si l'on avait pu en utiliser moins, on l'aurait fait. On sait, par contre, qu'on peut en rajouter autant que l'on veut après ces 12 premiers. Cela ne changera pas le nombre, à la seule condition que l'on ne rajoute que des chiffres 0 ;
3) L'ordre des chiffres a, par ailleurs, son importance : le nombre 0,129 n'est pas du tout le même que le nombre 0,912. Il y a donc quelque chose aussi dont on veut se souvenir qui est contenu dans l'ordre avec lequel on range les chiffres derrière la virgule ;

4) Dernier point important : on n'emploie que 10 étiquettes différentes qui suffisent à créer et désigner tous les nombres décimaux : les étiquettes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Ce dont on veut garder la trace à chaque chiffre après la virgule est donc quelque chose qui ne peut prendre que 10 valeurs régulièrement graduées. On peut noter, en passant, que l'on aurait pu s'y prendre autrement : au lieu d'employer les 10 premiers nombres entiers, on aurait pu utiliser des lettres de l'alphabet, ou même n'importe quel petit dessin. Le fait qu'on emploie les 10 premiers nombres entiers pour nommer les chiffres décimaux n'a rien à voir avec le fait que ce sont des nombres. C'est seulement qu'on se souvient plus facilement de l'ordre dans lequel ils sont rangés, que de l'ordre dans lequel sont rangés par exemple 1 étoile, 1 trèfle à quatre feuilles, et 1 as de pique.
   On n'est pas obligés, non plus, d'employer 10 graduations. Ce nombre n'est valable que pour les nombres que l'on appelle « de base 10 ». On peut aussi employer des nombres « de base 16 » ou plus. En fait, plus le nombre d'étiquettes est grand, moins on a besoin d'en mettre derrière la virgule, car la gamme de graduations couverte par chaque étiquette est d'autant plus fine. L'informatique utilise couramment cette propriété en prenant toutes les lettres de l'alphabet, et même tous les autres signes du clavier, à la place de nombres. Cela permet à chaque nombre, formé à partir de choix successifs dans cette multitude de signes, d'être composé de moins « d'étiquettes après la virgule » que s'ils étaient formés à partir de choix successifs entre les 10 premiers nombres entiers, et leur permet, ainsi, de tenir moins de place dans la mémoire de l'ordinateur. Ainsi, par exemple, un nombre peut être conservé sous la forme : 4#DF.

Maintenant que nous avons énuméré tous les types de traces dont nous cherchons à nous souvenir quand nous nommons un nombre décimal, décrivons pas à pas comment nous procédons pour produire un tel nombre.
On prend d'abord un nombre entier, de 0 à l'infini positif ou de 0 à l'infini négatif, et on le laisse intact, sans déformation.
Puis, à sa suite, on place une virgule, laquelle signale qu'à partir de là on va commencer à faire quelque chose d'une autre nature que le nombre entier déjà pris en compte. Quelque chose que l'on n'a pas pu ramener dans ce nombre, que l'on n'a pas pu désigner en même temps que lui.
Après la virgule, ce que l'on va faire c'est énumérer l'une après l'autre des intensités de déformation. Déformation de quoi ? De tout ce que vous voudrez, car on ne va pas enregistrer la matérialité de ces déformations, seulement noter leur intensité.
On fait donc, d'abord, une première déformation dont l'intensité sera repérée par une 1^e^ étiquette mise après la virgule. Dans notre système de base 10, on a 10 valeurs d'intensité à notre disposition.
Et de deux choses l'une : ou bien le nombre que l'on cherche à indiquer correspond précisément à l'une de ces 10 valeurs possibles de déformation, ou bien il n'y correspond pas. Il ne peut pas être « entre » deux valeurs, puisque les valeurs que nous envisageons ne correspondent pas à des coordonnées sur une courbe se traçant dans l'espace, mais à des intensités de déformation : comme il n'y a pas d'espace entre deux valeurs, il ne peut y avoir de notion de « entre » ces deux valeurs qui ne sont écartées d'aucune distance l'une de l'autre.
Si notre nombre n'est pas exactement obtenu après cette première déformation, on va garder comme souvenir l'étiquette qui correspond à l'intensité de la dernière déformation trouvée avant que l'on s'aperçoive que l'on a raté le nombre. Ce n'est pas « la plus proche » du nombre cherché puisque, à nouveau, il n'y a pas de distance quelconque à ce nombre : c'est « la dernière » avant le constat de son ratage.
Donc, une première déformation, sautant par crans d'intensité rigides de 0 à 9, n'a pas suffi pour obtenir le nombre. Alors, on recommence avec une 2^e^ déformation, dont on garde le souvenir de la même façon en désignant l'intensité mesurée quand on a raté le nombre. Etc, jusqu'à ce que l'on obtienne le nombre exact que l'on cherche.

Quand on l'a obtenu, si l'on veut, on peut mettre autant de 0 qu'on le souhaite à la suite. Cela servira à rappeler que toutes les déformations que l'on fait maintenant sont d'intensité nulle.
Mais autant ne pas se fatiguer et s'abstenir de cette infinité de 0 possibles. En s'abstenant de mettre ces 0, on signale qu'on ne déforme pas davantage le nombre, et donc qu'il n'y a plus besoin de laisser de chiffres pour servir de trace à des déformations.
S'il s'agit d'un nombre irrationnel, on s'y prendra comme pour former n'importe quel nombre décimal. Simplement, on devra continuer indéfiniment à faire se succéder les déformations les unes derrière les autres, et l'on marquera chaque fois le ratage par de nouvelles étiquettes, lesquelles seront donc en nombre infini.

La question revient donc maintenant : tous ces nombres fractionnaires et irrationnels que l'on peut produire de cette façon, peut-on les mettre alignés tous ensemble sur une même droite, et, de préférence, sur une même droite que les nombres entiers ?
Cette fois, la réponse est non ! Catégoriquement non ! Car, si l'on veut garder toutes les informations qui nous ont été utiles pour obtenir un nombre décimal, on doit garder la trace de toutes ces déformations successives et de leur ordre de survenue.
Si l'on veut garder toutes ces informations sous forme « d'espace », c'est-à-dire de graphique, le moins que l'on puisse faire, c'est d'étaler cette succession de déformations les unes à côté des autres, sans en changer ni l'ordre, ni le nombre, ni la valeur de l'intensité que l'on a constatée à chaque ratage. Perdre une seule de ces informations, c'est perdre ce qui distingue un nombre d'un autre, c'est confondre abusivement deux nombres différents, c'est perdre le nombre que l'on voulait figurer dans un espace en le mélangeant à d'autres.
Si l'on dessine un schéma qui conserve toutes ces informations, on voit clairement qu'un nombre décimal requiert, pour être représenté, un espace à 2 dimensions au minimum : une surface donc, non pas une droite qui n'a qu'une seule dimension.



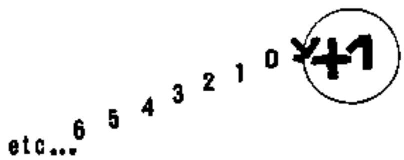
Si l'on dessine tous ensemble, sur une telle surface infinie, tous les nombres décimaux, la surface sera alors pavée de nœuds de bifurcations *[voir sa représentation en haut de la page 17]*, et l'on ne pourra pas ramener tous les nombres sur une même droite si l'on ne tranche pas au préalable une grande partie de ces nœuds qui bloquent le passage, vers elle, des nombres les plus éloignés.

On peut aussi comprendre l'impossibilité de se contenter d'une droite, de la façon suivante :
Un point sur une droite repère une position. Ce repérage ne peut donc garder qu'une seule information qui est son éloignement de l'origine 0 de la droite. Or, pour garder le souvenir des opérations qui servent à différencier un nombre décimal d'un autre, on a vu qu'il faut conserver plusieurs informations : combien de déformations, dans quel ordre, et, pour chaque déformation, quelle intensité. On ne peut donc pas utiliser un système à une seule information pour repérer un nombre décimal qui en requiert plusieurs. Ou alors, c'est que l'on accepte de perdre une partie considérable de ce qui sert à différencier un nombre d'un autre.
Si, par commodité, on accepte de perdre des informations sur les nombres afin de les placer sur une même droite, on doit s'abstenir d'utiliser ensuite ce mode de rangement qui les massacre pour faire des démonstrations sur leurs propriétés, or c'est pourtant ce que nous demande Cantor quand il commence par nous demander : « mettez dans une même colonne tous les nombres irrationnels ». Si l'on prolonge jusqu'à l'infini un raisonnement qui a commencé par massacrer les nombres en leur faisant perdre plus de la moitié de leurs propriétés, il ne faut pas s'étonner si l'on obtient des monstres en arrivant à l'infini. Ni, non plus, s'en inquiéter.
Même les nombres entiers ne peuvent être valablement représentés tous ensemble par une ligne droite, car il y a plus d'information dans la suite infinie des nombres entiers, qu'il n'y en a dans la suite infinie des points sur une droite. Cette information est que les nombres entiers sont à la fois tous confondus avec zéro et tous décalés de +1 les uns des autres. Les points d'une droite sont « seulement » différenciés par un décalage entre eux. Ils ne sont pas, « en plus », rassemblés en un même point.
L'information contenue dans l'ensemble des nombres entiers n'étant pas du même type que l'information contenue dans l'ensemble des points d'une droite, on ne peut, par conséquent, prétendre utiliser les propriétés de l'une, pour en déduire les propriétés de l'autre.

8 - Comment voyager d'un nombre à l'autre ?

On a pris garde de montrer que la génération des nombres entiers et décimaux n'avait rien à voir avec un trajet. Les entiers sont tous générés d'un seul coup, par la désignation du vide, tandis que les décimaux sont générés individuellement, par des séquences ordonnées de déformations graduées.
On peut cependant avoir besoin de traduire, au moyen de nombres, les déplacements que font les particules ou les objets dans l'espace, et il nous serait donc utile de trouver une équivalence entre un nombre et un trajet, sans que cette mise en trajet ne fasse perdre aux nombres leurs propriétés.

Dans cette optique, on peut dire que le trajet qui trahit le moins le mode de génération des nombres entiers est un trajet circulaire qui part de 0 et qui fait une boucle qui signifie « +1 » en le faisant revenir en même temps à 0.
Le départ à 0 et l'arrivée à +1 sont confondus, et tous les nombres entiers sont également confondus à ce 0/1.
Produire les nombres entiers, c'est comme tourner sur une boucle sans fin et rencontrer tous les nombres entiers, les uns après les autres, au point de départ et au point de retour perpétuel confondus de cette boucle.

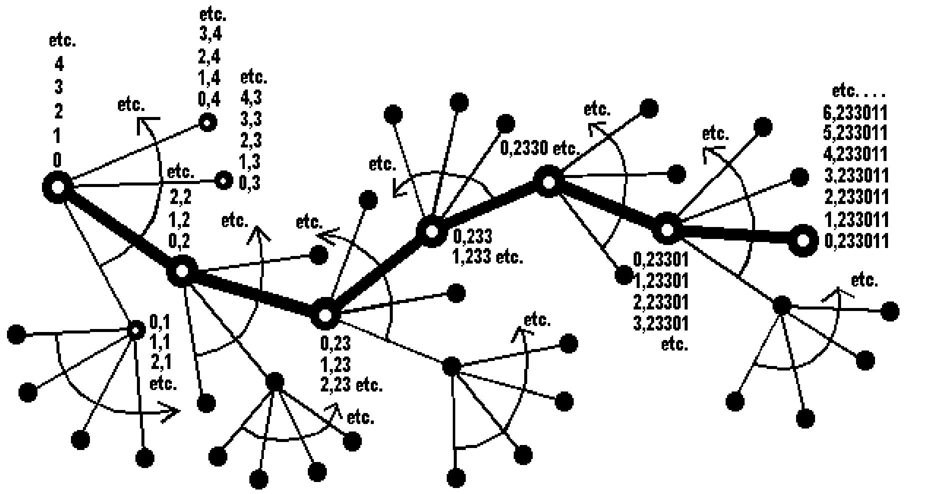


Apparemment, la seule perte que subissent les nombres entiers par cette mise en trajet correspond à la durée du trajet : il faudrait pouvoir dire que la durée de ce trajet est nulle, bien qu'il y ait un écart de temps non nul entre chaque nombre pour les différencier.

1) un premier constat à cette mise en trajet doit être fait tout de suite : quand on part de 0 vers 1, 2, etc. jusqu'à l'infini, on ne s'éloigne pas de 0. Ce qui revient à dire qu'on ne s'approche pas d'un point infiniment éloigné de 0 : on piétine sur place. Le seul rapport à l'infini que cela peut avoir, c'est que l'on peut y piétiner indéfiniment, mais toujours sans avancer du moindre pas ;
2) un deuxième constat est à faire : lors de ce piétinement, on ne peut espérer rencontrer à quelque moment que ce soit un nombre qui ressemble de près ou de loin à un nombre fractionnaire ou irrationnel, car la boucle qui va de 0 à 0 n'a pas « d'arrêt entre stations ». En désignant l'ensemble vide, on a vu que l'on désignait du même coup 0, 1, 2, 3, etc., mais on n'a rien pu désigner en faisant cela qui serait un intermédiaire possible entre 0, 1, 2, 3, etc. Le trajet qui représente ce processus de création des nombres entiers ne peut donc s'arrêter quelque part dans sa boucle entre deux entiers sans dénaturer le processus qu'il veut équivaloir.

Se déplacer d'un nombre décimal à l'autre, cela devra donc n'avoir rien à voir avec se déplacer d'un entier vers un autre entier. Il va falloir dessiner d'autres trajets.
Si l'on tient à démarrer le trajet vers les décimales à partir du nombre entier qu'elles suivent après la virgule, on ne peut que constater que tous les trajets vers les décimales doivent commencer au même point 0, puisque tous les entiers y sont rassemblés.
Si l'on veut maintenant dessiner, à partir de 0, une trajectoire qui conserve toutes les informations contenues dans un nombre décimal, on peut le faire en dessinant un réseau hiérarchique de bifurcations, tel que celui-ci :

pavage arborescent d'un plan,
par des trajets de nombres décimaux



À chaque carrefour, on fait partir 10 chemins, et, au bout de chacun de ces chemins, on fait un nouveau carrefour qui s'éclate en 10 chemins, etc. Chaque décimale correspond alors à un rang dans la série des carrefours que l'on a rencontrés à partir de 0 (1er, 2^{e}, 3^{e}, etc.), et l'intensité de la déformation indiquée par chaque valeur décimale correspond à l'un des 10 chemins possibles à partir de ce carrefour. On peut déclarer, par exemple, si l'on va de 0 vers l'infini décimal, que le chemin le plus à droite qui part de chaque carrefour correspondra à une déformation nulle, le plus à gauche à une déformation 9, et chaque chemin intermédiaire à une déformation intermédiaire entre 0 et 9.
On pourra alors désigner un nombre décimal par un carrefour d'arrivée, carrefour qui sera le dernier où la déformation ne sera pas nulle, et comme la structure des trajets est arborescente, il n'existe qu'un seul chemin qui pourra être pris pour aller de 0/1 à ce carrefour. Par conséquent, la désignation de ce carrefour suffira pour désigner tous les embranchements successifs qui y mènent, leur ordre et leur intensité correspondante, et donc à désigner l'ensemble de la valeur décimale.

Un tel schéma de circulation arborescent offre ainsi la possibilité de générer des trajets qui vont atteindre tous les nombres décimaux en respectant les caractéristiques qui les différencient les uns des autres, et sa lecture amène à faire plusieurs constats :

1) d'abord, on trouve le cumul, à chaque carrefour, d'une infinité de nombres : tous ceux qui sont générés de la même façon après la virgule, mais qui partent après un nombre entier différent. On y retrouve donc la propriété de piétinement qui est celle du trajet qui relie les uns aux autres les nombres entiers. On passe de 1,2102 à 2,2102, par exemple, en reproduisant au carrefour x,2102 la boucle circulaire et sans interruption qui va de 1 à 2 ;
2) ensuite, on constate que l'on ne peut pas utiliser un carrefour décimal pour désigner un nombre complet, c'est-à-dire avec sa partie entière et sa partie décimale. C'est la réciproque de ce que l'on avait vu avec le trajet des entiers : on n'y trouvait aucune décimale. Sur le trajet des décimales, cette fois, on ne trouve aucun entier ;
3) enfin, contrairement aux trajets des entiers, on trouve bien cette fois, chez les décimales, matière à voyager jusqu'à l'infini, puisque l'on peut prendre n'importe quel chemin à partir des entiers et s'enfoncer indéfiniment dans la « profondeur infinie » des nombres décimaux. Tout voyage réellement infini parcourt alors un nombre irrationnel, ou il parcourt un nombre fractionnaire dont les décimales alternent dans une périodicité qui se poursuit indéfiniment.

Si, maintenant, on cherche à mesurer les déplacements que l'on fait en suivant les nombres décimaux, et à rapporter cette mesure aux déplacements que l'on fait en suivant les nombres entiers, on est obligé de conclure que lorsqu'on avance vers l'infini, c'est-à-dire vers l'extrémité des trajets décimaux, on n'avance pas d'un pouce dans la direction des nombres entiers.
En d'autres termes, 3,99999, par exemple, ne peut absolument pas être considéré comme plus proche de 4 que ne l'est 3,2. Au contraire même, si l'on ne parle que de distance à parcourir, on passe plus vite de 3,2 à 4 (1 seule étape dans le parcours décimal) que de 3,99999 à 4 (5 étapes).
Cette anomalie vaut aussi pour les nombres décimaux entre eux : en termes de distance, 3,2 est plus près de 3,9 que de 3,2000001.
Mais, faut-il faire ce genre de constatations et partir dans les calculs en se donnant pour acquis par exemple, que 3,2 serait plus près de 4 que ne l'est 3,99999 ? Non, car ce serait se replonger dans le même type de situation aberrante que celle où Cantor nous avait plongé avec les infinis. La seule chose raisonnable que l'on puisse faire est d'admettre ce qui est maintenant évident, à savoir :

1) que les nombres entiers sont dans une dimension qui est incommensurable avec celle des nombres décimaux ;
2) et que, à l'intérieur même des nombres décimaux, la position dans la queue décimale est une grandeur qui est incommensurable avec la valeur du chiffre indiqué à cette position.

C'est une situation qui n'est pas nouvelle en mathématique. Le nombre « racine carrée de -1 », par exemple, n'est ni positif (son carré serait + 1), ni négatif (son carré serait alors aussi + 1). Les mathématiciens ont appris à traiter ce genre de nombre que l'on ne peut pas ranger sur une même ligne que les nombres réels positifs ou négatifs, et ils les ont appelés « les nombres imaginaires », ou encore, « les nombres complexes ».
Ce qu'il faut désormais admettre, c'est que les nombres décimaux ne peuvent pas non plus se ranger sur une même ligne que les nombres entiers, qu'ils ont avec les nombres entiers le même type de rapport que celui qui existe entre les nombres dits imaginaires et les nombres dits réels.
Dans le cas des nombres imaginaires et des nombres réels, on dit qu'ils sont « dans des dimensions différentes », et que les mettre en rapport ne revient pas à les aligner sur une droite, mais à former un plan que l'on nomme « le plan complexe ». Nous devons donc maintenant dire, mais de façon « encore plus complexe », que toute combinaison d'un nombre entier avec ses décimales revient à définir les coordonnées d'un point dans « un volume complexe » : il faut d'abord définir les valeurs décimales dans le plan des nombres décimaux, puis, quand le bon carrefour est trouvé « en profondeur et en largeur », il faut donner « l'altitude » qui correspond au nombre entier que l'on veut associer à cette décimale. Bref, il faut s'apprêter, pour multiplier 2 avec 0,1, à devoir prendre encore plus de précautions que lorsque l'on cherche à calculer la multiplication de 2 avec « racine carrée de -1 ».
En fait, les nombres réels sont aujourd'hui considérés comme formant partie des nombres complexes, seulement différents des autres nombres complexes par la simplicité particulière avec laquelle on peut les manipuler. De la même façon, nous devons maintenant considérer que les nombres décimaux de base 10 ne sont qu'une partie spéciale de l'ensemble des nombres décimaux : une partie spécialement pratique puisque nous pouvons sans gêne ajouter entre elles les décimales de plusieurs nombres comme s'il s'agissait de nombres entiers, et puisque nous pouvons multiplier un nombre fractionnaire avec un multiple de 10 pour transformer, sans plus de procès, un nombre décimal en un nombre entier.

Malheureusement, la nature n'est pas au courant de cette simplicité, et elle laisse ses phénomènes se développer de telle sorte que, si nous voulons les traduire en termes mathématiques, nous devons utiliser les nombres décimaux dans leurs aspects les plus complexes.
C'est cela que nous allons maintenant considérer.

9 - Les dimensions fractales de Mandelbrot à la rescousse

Après ce grand détour qui nous a appris à penser autrement les valeurs décimales, nous revenons maintenant aux déformations courbes.
Nous les avions laissées *[fin du chapitre 4]* en disant qu'en chaque point nous voulions représenter l'ensemble des sollicitations qui tendent à déplacer ce point dans l'espace. Et nous avions alors admis que ces sollicitations devaient être représentées par un nombre infini de vecteurs, chacun ayant une intensité spécifique, et chacun étant orienté dans une direction spécifique de l'espace.
Pour représenter, par un ensemble de vecteurs, les sollicitations variées qui forcent un corps à bouger, nous devons donc avoir à notre disposition 3 types distincts de données :

1) d'abord, nous devons indiquer que, dans ce cas, ce qui arrive au corps matériel est une déformation de sa position, c'est-à-dire un mouvement dans l'espace. Il aurait pu s'agir d'une autre sorte de déformation : cela aurait pu être une déformation tendant à le percer, ou à l'étirer, ou à faire gonfler son volume, ou à le compresser ;
2) ensuite, nous devons indiquer l'intensité de cette déformation ;
3) enfin, nous devons indiquer comment varie cette intensité selon les différentes directions de l'espace.

Or, il se trouve que notre analyse de la génération des nombres entiers et décimaux nous a montré qu'un nombre fractionnaire portait nécessairement 3 types différents d'informations :

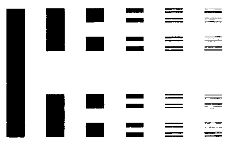
1) la première, concerne le nombre entier auquel il est lié ;
2) la seconde, concerne l'ordre séquentiel des déformations successives ;
3) la dernière, concerne la valeur de cette déformation pour chacune des séquences décimales.

Cela nous suggère donc un moyen simple pour mesurer une dimension de déformations courbe à laquelle un point est soumis : il suffit d'utiliser un nombre irrationnel. Sa partie entière dira le type de déformation dont il s'agit, et chaque chiffre de la suite décimale portera la valeur d'intensité pour l'une des directions de l'espace. Ces directions sont, certes, en nombre infini, mais le nombre des décimales d'un irrationnel l'est également.
Nous viennent alors à l'esprit les dimensions fractales de Mandelbrot, et nous nous posons la question : n'est-ce pas exactement cela qu'elles font ? Est-ce qu'elles ne décrivent pas précisément la façon dont un phénomène se déforme, et la façon dont cette déformation varie selon les directions de l'espace ?

Envisageons, d'abord, le chiffre entier qu'elles comportent avant la virgule.

« 0 » nous avions commencé à présenter les dimensions de déformations en donnant des exemples de déformations de contrastes. Ainsi, nous avions évoqué *[chapitre 3]* la « poussière de Cantor » : un segment dont on a enlevé le 1/3 central, puis enlevé le 1/3 central des 2 segments restants, puis etc., à l'infini.
Il se trouve que la dimension fractale d'une telle poussière de Cantor, où la déformation n'implique aucun déplacement, est Log 3/ Log 2, c'est-à-dire environ 0,63.
Sa partie entière est donc 0.

une « poussière de Cantor »

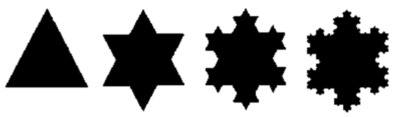


« 1 » Ainsi que nous le verrons dans les exemples prochains *[images ci-dessous]*, les valeurs fractales des trajets que Mandelbrot indique dans son ouvrage « les objets fractals » *[Flammarion - 3^e édition - 1989]* se trouvent toutes comprises entre 1 et 2.
C'est-à-dire que leur partie entière est toujours 1.

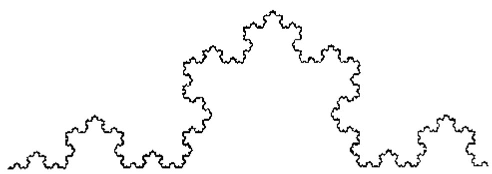
« 2 » Enfin, on constate que la valeur fractale d'une « courbe de Peano » est 2 *[Voir cette figure au chapitre 11]*. Or, le principe de cette courbe est de déformer le découpage d'une surface sur elle-même, de telle sorte que change régulièrement la distribution de ses parties blanches et de ses parties colorées, sans cependant que leur proportion réciproque ne soit modifiée. Pour obtenir ce résultat, à chaque stade de son tracé, la courbe réalise une division plus tortueuse entre les deux parties de la surface.
Alors on se dit que, peut-être, la valeur entière 2 dans une dimension fractale aurait à voir avec la déformation d'un corps sur lui-même.

Quant à la valeur décimale des dimensions fractales, nous savons que, la plupart du temps, elle correspond à un nombre irrationnel, résultant de la division de deux logarithmes. Ainsi, elle contient bien une suite infinie et ordonnée d'informations.

Il reste à envisager la représentation graphique de ces dimensions.
Mandelbrot donne l'exemple *[ouvrage cité ci-dessus, d'où sont extraits les graphiques]* de la dimension fractale Log 4/Log 3, c'est-à-dire environ 1,2618, pour la courbe en « flocon de neige » de Von Kock. Cette courbe ne peut pas être réellement dessinée, car elle correspond à un processus infini : on prend un triangle équilatéral, sur chaque côté du triangle, on construit un triangle équilatéral porté par son 1/3 central, sur chaque côté des derniers triangles réalisés, on construit . . . etc., à l'infini.



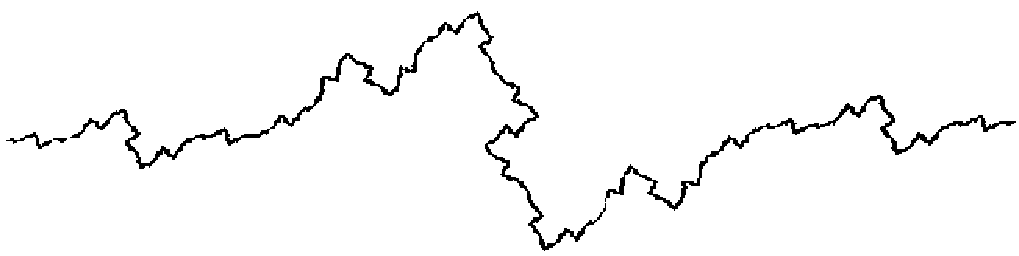
génération du « flocon de neige » de Von Kock
(à poursuivre à l'infini)



le « flocon de neige » de Von Kock
Dimension = Log 3^4 ~ 1,2318

Autre exemple : pour une valeur de dimension fractale Log 5/Log 4, c'est-à-dire environ 1,16, on obtient ce genre de courbe que l'on doit aussi poursuivre à l'infini, et dont ne sont représentées ici que quelques étapes.

Dimension = Log 4^5 ~ 1,16



On remarque tout de suite l'intérêt graphique de la correspondance entre une dimension fractale et de telles courbes : pour représenter la valeur d'une force « vectorielle », un seul vecteur suffisait, or, une courbe fractale n'est pas loin d'avoir la même simplicité qu'un vecteur, car il n'est pas besoin de représenter toute la courbe infinie. Puisque l'on retrouve à toutes les échelles la même courbe, et dans tous les détails les mêmes détails, on est dispensé de la représenter en entier. Une seule échelle suffit, et, tant qu'à faire, autant utiliser la plus grande. Ainsi, dans le cas de la dimension « environ 1,16 », le schéma AB suffit pour représenter virtuellement les courbes en nombre infini construites toutes sur le même modèle et à toutes les échelles de détail possibles.
Une question reste cependant posée : de même que l'on peut calculer graphiquement la combinaison de plusieurs forces vectorielles par la résultante de leurs vecteurs, peut-on espérer calculer graphiquement la combinaison de plusieurs déformations courbes par une quelconque construction faite sur leurs courbes fractales ?
On ne fera pas ici de suggestion à ce propos, et la question restera ouverte.

10 - Comment retrouver une valeur fixe à la dimension fractale d'un trajet

Si, maintenant, on regarde la courbe AB du dessin précédent, non plus comme une figure dessinée, mais comme le trajet d'un mobile qui va de A jusqu'à B, on se dit que ce type de trajet évoque assez bien ce qui se passe quand un corps est entraîné vers un autre par une déformation courbe : le graphique montre qu'il part de A, qu'il arrive à B, et que, pour réaliser ce trajet, il ne subit pas une attraction uniquement dirigée vers B, mais qu'il est attiré constamment et simultanément dans d'autres directions. En somme, s'il finit par arriver très exactement sur B et pas à côté, ce n'est que parce que les attractions selon les différentes directions de l'espace sont bien combinées entre elles, et qu'elles le sont à toutes les échelles du trajet.
Il y a cependant une objection majeure que fait Mandelbrot lui-même à l'utilisation des courbes fractales comme représentation valide d'un trajet suivi par un mobile. Cette objection a trait à la longueur du trajet.
En effet, si l'on calcule la longueur d'une courbe fractale, on s'aperçoit qu'elle est infinie. Pour la dessiner, chaque fois que l'on descend d'un cran dans l'échelle de détail de son parcours, on transforme un segment droit en une série de segments qui ondulent sur ce 1er segment, et, comme la droite est le plus court chemin entre deux points, chaque étape dans le « raffinement du détail » a donc pour effet de rallonger la courbe. Certaines suites infinies convergent vers une somme finie, mais, ici, ce n'est pas le cas, car le facteur de rallongement du parcours est constant et ne diminue pas avec l'échelle du détail.
Si la courbe est de longueur infinie, il ne semble donc pas possible de l'utiliser pour mesurer le trajet parfaitement fini réalisé par un mobile.
Pour éviter d'obtenir ce résultat de longueur infinie, on peut décider de ne pas dessiner la courbe dans tous ses infinis détails et s'arrêter à un moment donné dans la cascade de sa génération, mais alors, selon le degré de détail que l'on prend en compte, c'est-à-dire selon l'échelle de détails jusqu'à laquelle on descend, la longueur du trajet obtenu est chaque fois différente.

Le trajet fractal serait donc, soit de longueur infinie, soit de longueur finie mais variable avec l'échelle de sa mesure ? Une courbe fractale semble ainsi bien mal partie pour servir à représenter le trajet d'un mobile entraîné par une déformation courbe.

Cette fois encore, l'analyse que l'on a faite plus haut des nombres décimaux va nous servir à comprendre où réside l'anomalie.
On a dit qu'un nombre décimal porte 3 informations, qu'il est donc équivalent à un espace 3 D, c'est-à-dire à un volume, or, on ne veut avoir ici qu'une longueur de trajet, qui est une donnée 1 D.
Si, par exemple, nous avons un problème du genre : « le volume d'un corps parallélépipédique est de 1,26 m^3, quelle est sa longueur ? », nous savons que nous ne pouvons pas le résoudre. La valeur 1,26 a bien été obtenue en multipliant une longueur par une largeur et une hauteur, mais, en sens inverse, nous ne pouvons pas retrouver ces 3 données qui sont pourtant « contenues » dans la valeur du volume. Pour trouver la longueur, nous devons d'abord « dégonfler » le volume en donnant la hauteur, puis le « déplatir » en donnant sa largeur.
De la même façon, pour calculer la longueur d'un trajet fractal, il faut redonner avant calcul les 2 informations que la dimension fractale a « mélangées » avec la longueur du trajet : la dimension en ligne droite entre les deux points extrêmes du trajet, et l'échelle de détail à laquelle on effectue le trajet, choisie parmi le nombre infini des échelles possibles.
L'anomalie de la longueur infinie des courbes fractales réside simplement dans le fait que l'on veut utiliser « toute » la dimension fractale pour calculer la longueur d'un trajet, alors qu'une dimension fractale porte « trop » d'informations pour cela : il faut la « dégonfler », puis la « déplatir », pour trouver la longueur qu'elle contient.

Concernant cet aspect des dimensions fractales, nous divergeons donc de la présentation qu'en a fait Mandelbrot.
À la question : « quelle est la longueur de la côte de la Bretagne ? », Mandelbrot répond : elle est de longueur infinie, car nous pouvons toujours la suivre sur une échelle plus petite. Le trajet peut être fait en voiture, ou fait à pied, pour en mieux suivre les méandres, ou au pas d'une souris, ou peut contourner tous ses grains de sable, ou peut contourner tous les atomes qui en marquent la limite : à chaque cran de précision, la longueur du trajet se rapprochera de l'infini.
À la même question, nous répondons ici : la côte bretonne a toujours une longueur finie, mais elle a un nombre infini de longueurs, chacune correspondant à l'échelle de mesure que l'on choisit parmi le nombre infini des échelles de mesure possibles.
Dans un système de mesure par coordonnées, un trajet ne possède qu'une seule longueur, tandis que, dans un système de mesure par dimensions de déformations, un trajet possède un nombre infini de longueurs qui sont toutes résumées par un seul nombre. Par conséquent, une dimension fractale contient infiniment plus d'informations qu'une dimension de coordonnées, et elle demande seulement qu'on lui dise lequel on veut de ces trajets. Quand on a répondu à sa demande, elle nous en fournit la longueur.

<u>11 - Dimensions fractales et dimensions d'espace</u>

Nous en arrivons maintenant au point crucial, celui où nous devons penser les dimensions fractales de la façon la plus neuve.
Dans l'espace des coordonnées, la dimension 1 correspond aux courbes linéaires, 2 aux surfaces, et 3 aux volumes.
Habituellement, en partant du même principe, les dimensions fractales sont considérées comme des dimensions d'espace tronquées, « partielles » :

> <u>- une dimension entre 0 et 1</u> est supposée correspondre à la capacité d'un ensemble de points à remplir partiellement une ligne sans y parvenir complètement, faute d'avoir la valeur entière 1 qui seule le permet ;
> <u>- une dimension entre 1 et 2</u> est supposée correspondre à la capacité d'une ligne à remplir partiellement un plan sans y parvenir complètement, faute d'avoir la valeur entière 2 qui seule le permet ;
> <u>- une dimension entre 2 et 3</u> est supposée correspondre à la capacité d'une surface à remplir partiellement un volume sans y parvenir complètement, faute d'avoir la valeur entière 3 qui seule le permet.

Penser de cette manière, c'est penser avec les vieux réflexes. C'est brider les dimensions fractales que de les penser comme si elles étaient encore des dimensions de coordonnées. L'information portée par les dimensions fractales est plus riche, et cette richesse n'est révélée que si l'on abandonne complètement ce rapport aux dimensions de l'espace. Les dimensions fractales correspondent à un autre système de repérage, car elles sont des dimensions de déformations, non des dimensions de coordonnées. Bien entendu, chaque phénomène évolue dans l'espace, mais chaque phénomène qui y évolue peut-être considéré comme manifestant l'interaction d'un nombre quelconque de déformations, chacune d'elle étant mesurée par une dimension fractale.
Une dimension fractale comporte deux parties : un nombre entier, puis, après une virgule, un nombre décimal. Nous avons déjà proposé une signification pour chacune de ces deux parties. Nous allons y revenir maintenant de façon plus précise et plus complète, en commençant par le nombre entier.

Nous faisons l'hypothèse que le 1er chiffre d'une dimension fractale, son nombre entier, n'a rien à voir avec une notion de dimension d'espace, et nous en proposons l'explication suivante :

> <u>**« 0 »**</u> : Nous avons précédemment donné l'exemple d'une valeur de contraste mesurée à l'aide de taches sur une feuille *[chapitre 2]*. Il s'agissait alors d'un espace 2 D. À la place de taches 2 D, nous aurions pu, tout aussi bien, prendre des bulles noires 3 D tachant un volume blanc lui aussi 3 D. La valeur de contraste, mesurant par exemple la proportion entre le volume des bulles et le volume de l'espace total, aurait toujours été inférieur à 1. Une valeur fractale inférieure à 1, dont le 1er chiffre est pour cela 0, n'a, par conséquent, rien à voir avec une quelconque incapacité à remplir une courbe 1D. Le chiffre 0 indique seulement que le phénomène n'implique par lui-même le déplacement d'aucun point, qu'il se passe complètement du déplacement de points pour se manifester.
> Par contre, il implique l'apparition ou la disparition d'un nombre infini de points.

Pour cette raison, les dimensions possédant cette valeur entière 0 apparaissent spécialement adaptées à mesurer des mutations : ce qui était blanc devient coloré, ce qui était jeune devient vieux, ce qui était inerte devient vivant, ce qui était sain devient malade, etc. Il n'y a aucun déplacement qui puisse relater la transformation d'une personne jeune en une personne vieille, car, avant de devenir vieille, une vieille personne n'est nulle part parmi les vieilles personnes, puis, un jour, il ou elle apparaît soudainement parmi les vieux avec cette propriété, semblant venir de nulle part. Puis, un jour, il ou elle meurt et disparaît de parmi les vieux en même temps que disparaît sa propriété d'être vieux ou vieille.

« 1 » : Lorsque nous avons reproduit des exemples de courbes fractales (par exemple, la courbe en flocon de neige de Van Kock reproduite au chapitre 9), nous avons vu que, lorsqu'une déformation implique un déplacement dans l'espace, la valeur entière de la dimension fractale est alors 1.
Nous suggérons donc que ce type de dimension à partie entière 1 serait uniquement adapté à décrire le mouvement d'un corps.
Il n'est pas adapté pour décrire ou pour prévoir la mutation éventuelle des propriétés du corps pendant qu'il effectue ce mouvement, ce qui est du ressort des dimensions 0 que nous venons de voir. Il n'est pas adapté, non plus, pour décrire la déformation qu'il peut subir pendant ce mouvement, ce qui est du ressort de la dimension 2 que nous abordons maintenant.

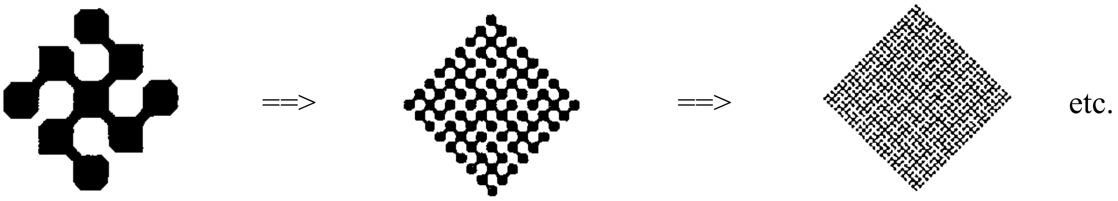
« 2 » : Nous avons déjà suggéré que la valeur entière 2 de la courbe de Peano *[représentée en page suivante]* avait à voir avec la déformation d'une surface sur elle-même. Nous suggérons maintenant, de façon plus générale, que la valeur entière 2 pour une dimension aurait à voir avec la déformation d'un corps sur lui-même. Par cela, il faut entendre le déplacement interne coordonné de tous ses points qui s'échangent les uns les autres, mais sans déplacement global du corps lui-même.
Dans la section « science » *[« L'essentiel de l'hypothèse » au chapitre 5, ou dans « les 16 étapes du cycle de formation de la matière », chapitre 2-13, au § « Pertinence de la référence à l'expérience de Couette-Taylor pour approcher l'évolution des atomes après leur formation »]*, nous supposons qu'une particule de matière est le résultat d'un mouvement excessivement complexe de déformations qui fonctionne en circuit fermé, ce qui est très exactement un cas de déformation interne. Tout ce qui met en jeu la stabilité des particules de matière et leur cohérence interne serait donc spécialement concerné par ce type de dimension. Laurent Nottale qui a cherché a combiner la mécanique quantique des particules élémentaires avec le calcul fractal, aboutit à la même conclusion. On cite un extrait de l'un de ses articles *[« L'espace-temps fractal » - Pour la Science - septembre 1995]* :
« La dimension deux est, précisément, celle des trajectoires fractales calculées à partir des relations d'incertitude d'Heisenberg. »

En résumé, notre hypothèse est donc que, si la dimension fractale est de la forme 0,x, c'est qu'il s'agit d'une valeur de contraste, si elle est de la forme 1,x, c'est qu'il s'agit de la valeur d'un trajet, et si elle est de la forme 2,x, c'est qu'il s'agit de la valeur d'une déformation interne.
Comme nous l'avons fait pour la valeur 0, nous soulignons que les valeurs 1 et 2 n'auraient rien à voir avec le nombre des dimensions de l'espace dans lequel se déroule le phénomène :
- ainsi, un trajet (dimension fractale 1,x) peut tout aussi bien rester attaché à une courbe, qu'évoluer sur une surface, ou se répandre dans l'espace entier ;
- et la déformation d'un corps sur lui-même (dimension fractale 2,x) peut tout aussi bien concerner un corps filiforme, qu'une surface ou un volume.

Si le nombre entier d'une dimension fractale ne donne pas d'information sur l'évolution de la déformation dans l'espace, c'est donc la valeur décimale qui s'en charge. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la valeur décimale indique comment varie l'intensité de la déformation selon chacune des directions de l'espace. Si, par exemple, la déformation est confinée à ne suivre qu'une ligne ou à ne rester que sur une surface, la valeur décimale sera telle qu'elle fournira une valeur nulle pour toutes les directions alors interdites.

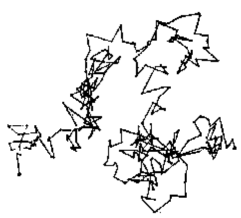
Autre point important : la partie entière n'aurait rien à voir, non plus, avec l'intensité de la déformation. Par exemple, une dimension de valeur 2,1 ne doit pas être considérée comme une dimension plus intense qu'une dimension de valeur 1,1.
Ce point est fondamental lorsqu'il s'agit de comparer les dimensions fractales les unes avec les autres : par exemple, une dimension 1,9999. . . etc., ne serait pas une dimension très proche de la dimension 2. Tout au contraire, elles sont plutôt à considérer comme très éloignées l'une de l'autre : l'une est un trajet extrêmement contourné, susceptible même de se dérouler dans un espace 3 D, tandis que l'autre peut ne concerner que la déformation sur elle-même d'une surface, ou encore la déformation sur elle-même d'une courbe linéaire 1 D. *[voir ci-dessous, l'exemple du mouvement brownien]*

Il y a encore une subtilité à saisir : on peut envisager une dimension de valeur 2, de deux façons complètement distinctes.
Soit on dit qu'il s'agit d'une dimension 2,0, c'est-à-dire de la déformation régulière sur elle-même d'une surface, telle que la réalise, par exemple, une « courbe de Peano ».



une « courbe » de Peano pave régulièrement une surface en réalisant à chaque étape une division plus tortueuse entre ses deux moitiés imbriquées. Sa dimension fractale est 2,0

Soit on dit que la valeur 2 est à prendre comme la limite à l'infini d'une dimension 1,99999... (et des 9 jusqu'à l'infini), c'est-à-dire qu'elle est considérée, alors, comme mesurant un trajet qui subit les détournements maximums qu'un trajet peut subir, détournements que l'on peut qualifier de systématiquement et complètement aléatoires.
Cela n'a rien à voir avec une surface : c'est précisément la valeur fractale que l'on reconnaît au mouvement que l'on appelle « brownien », c'est-à-dire celui des molécules d'un gaz qui s'agitent aléatoirement dans toutes les directions de l'espace et avec le maximum d'irrégularité dans leurs trajectoires. Ce faisant, les molécules parcourent bien un volume 3 D et non pas une surface 2 D.



un échantillon de mouvement brownien : sa dimension fractale est 2 mais elle aurait la signification 1,99999999 à l'infini

[les dessins de cette page sont repris de l'ouvrage de B. Mandelbrot : les objets fractals - Editions Flammarion]

On peut aussi envisager de mélanger les dimensions d'espace et les dimensions fractales.
Ainsi, une éponge de Menger *[voir cette figure au chapitre 3]* a une valeur fractale Log 20/Log 3, proche de 2,7268. La partie entière « 2 » ne correspondrait pas, dans ce cas, à l'information sur le type de déformation. Son type correspond à la dimension 0, car la génération de son volume est similaire à celle d'une poussière de Cantor. La valeur 2,7268 correspond à l'évolution de la surface séparant les volumes vidés et les volumes laissés pleins. Elle aurait donc à voir avec la conversion en termes de surface (d'où la valeur 2 D) d'un processus de génération qui est, lui, de dimension 0,x.

Pour finir, si les dimensions fractales sont plus générales que les dimensions d'espace, cela implique que des coordonnées dans l'espace ne doivent être alors que des dimensions fractales à valeurs spéciales. Calculons leur valeur :

- sur les axes de référence de l'espace euclidien, les coordonnées suivent un trajet droit. En tant que trajet, elles méritent donc la dimension fractale entière 1 ;
- comme ce trajet reste bien droit et qu'il ne subit aucune déformation dans aucune direction, elles méritent la valeur décimale 0.

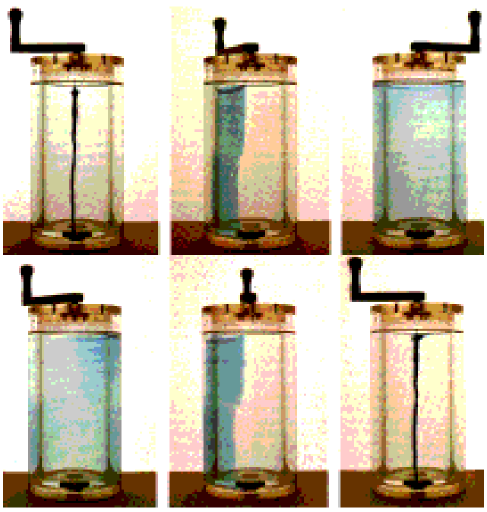
<u>En résumé, les dimensions fractales ne sont pas des dimensions d'espace, spéciales et tronquées, et, tout au contraire, ce sont les dimensions d'espace qui ne sont que des cas spéciaux et limités de dimensions fractales possédant la valeur très particulière de 1,0.</u>

12 - La continuité des déformations dans l'espace

Un trajet continu est un trajet qui ne fait pas de sauts brusques. Toute position « touche » la suivante, le mobile ne disparaît pas d'un endroit pour réapparaître dans un endroit éloigné à l'instant le plus suivant.
Par analogie avec un trajet continu, une déformation continue ne fait pas de cassure brusque entre deux états contigus l'un de l'autre. Cela peut casser, à un certain moment, mais alors c'est vraiment cassé et la déformation est finie.
Si deux corps ne sont pas reliés en continu dans l'espace, on dit qu'ils sont séparés. On dit qu'ils ne constituent plus ensemble un même corps qui se déforme dans l'espace, mais qu'ils constituent deux corps distincts. C'est ce point précis que nous allons maintenant remettre en cause.
[remarque : nous nous limiterons ici à évoquer la discontinuité dans l'espace « à l'échelle habituelle de visibilité », mais notre raisonnement vaut tout aussi bien pour le domaine des particules élémentaires où le même type de questionnement se pose de plus en plus sous la forme : « mais comment donc deux particules, qui sont trop éloignées l'une de l'autre pour avoir le temps d'échanger des données à la vitesse de la lumière, parviennent-elles cependant à réagir de manière coordonnée, de telle sorte que ce qui arrive à l'une se répercute instantanément sur l'autre ? ». Usuellement, on désigne de telles particules comme « corrélées »]

Commençons par l'exemple d'une déformation visiblement continue.
On prend un récipient dans lequel on fait tourner de l'eau. Puis, dans le tourbillon formé, on laisse tomber une goutte d'encre. On va parfaitement suivre des yeux la façon dont la goutte d'encre se déforme, c'est-à-dire dilue sa concentration et se met en mouvement, entraînée par l'eau.
L'aspect « continu » de cette déformation signifie, par exemple, que de l'eau colorée ne va pas soudainement apparaître dans un coin de volume d'eau claire. L'eau colorée n'apparaît que dans les endroits où le mouvement a pu entraîner de l'encre, ou dans les endroits où la dilution par diffusion dans le liquide aura pu en amener.

On fait maintenant une autre expérience.
[voir dans le recueil « l'ordre du chaos », l'article « la mémoire des atomes », par Richard Brewer et Erwin Hahn - Bibliothèque Pour la Science - diffusion Belin.
Les photographies de cette expérience sont tirées de cet article et se lisent dans l'ordre, de gauche à droite sur la première ligne puis sur la seconde ligne]



Dans un cylindre fixe, on place un autre cylindre tournant, et l'on remplit l'intervalle entre les deux par un liquide transparent et visqueux. On y laisse couler un filet vertical de colorant, puis on tourne le cylindre inférieur jusqu'à ce que le colorant soit mélangé au liquide. Jusques là, tout se passe « normalement », de façon continue. Exactement comme dans la 1e expérience, sauf que, cette fois-ci, la forte viscosité du liquide empêche que ne s'ajoute un effet de diffusion à l'effet du mélange par le mouvement.
Quand le colorant est mélangé, on commence à tourner le cylindre en sens inverse.
Petit à petit, alors, le colorant se « démélange » et, après un nombre de tours identique à celui de l'autre sens, le filet de colorant vertical est parfaitement reconstitué. C'est un peu stupéfiant. Ça l'est même davantage pour quelqu'un qui ne voit que la 2e partie de l'expérience : il a devant lui un liquide dans lequel un colorant est en cours de dilution, il le tourne, et au lieu que cela se mélange un peu plus comme cela doit normalement se faire quand on mélange, cela se démélange.
Certes, bien que stupéfiant, cela reste continu. Le colorant ne réapparaît pas démélangé brusquement n'importe où dans le liquide, il se « reconcentre » de façon continue.
Dans la théorie habituelle, on dit que cette expérience révèle « l'ordre caché du chaos », et les auteurs de l'article où cette expérience est relatée y voient une manifestation de « la mémoire des atomes ».
L'hypothèse que nous allons faire est qu'il n'y a, en fait, aucun réel « chaos » lorsque le colorant est dispersé, précisément parce que nous supposons que les molécules du colorant ne sont jamais réellement dispersées. Elles ne quittent jamais complètement leurs positions respectives et ne les retrouvent donc pas à la fin « comme par enchantement ». Une telle restauration parfaite de l'arrangement initial après une dispersion complète nous semble invraisemblable, et elle ne peut se produire que si l'arrangement ne se défait jamais réellement, ce qui veut dire que, dans la phase médiane diluée de l'expérience, les molécules de colorant que l'on voit séparées dans l'espace, chacune en des côtés opposés du cylindre, sont en réalité, c'est-à-dire dans la réalité du phénomène, toujours reliées en continu l'une à l'autre, exactement comme elles le sont au départ et à la fin de l'expérience.

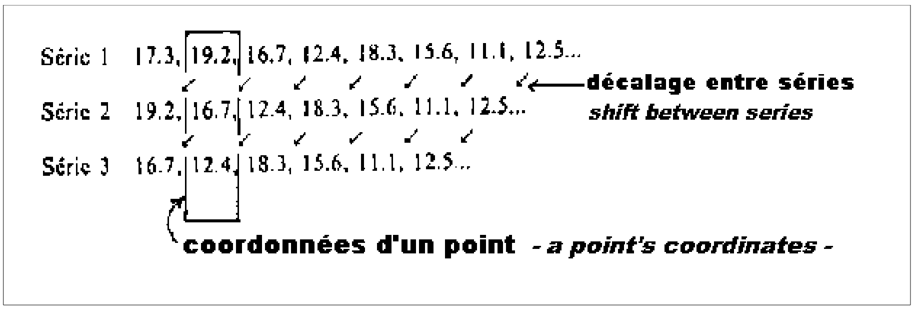
Les molécules ne peuvent pas avoir « en mémoire » leur position initiale (ce qui est l'idée de l'article cité), car elles n'ont pas d'organe de mémoire. Elles ne « retrouvent » pas leur position initiale à la fin de l'expérience, car elles ne quittent jamais complètement cette position, et y restent toujours, par un certain aspect du phénomène. Ce qu'est cet aspect du phénomène, on peut maintenant le dire : c'est une dimension. Les positions des molécules sont toujours continues dans une dimension du phénomène, et le problème pour nous est que les dimensions de l'espace ne rendent pas compte de cette dimension.
Elles n'en rendent pas compte, parce qu'elles ne le peuvent pas, ce que nous allons maintenant essayer de démontrer.
Pour cela, nous devons nous affronter, à notre tour, à l'éternel et agaçant problème du robinet qui goutte.

13- Ian Stewart fait goutter son robinet

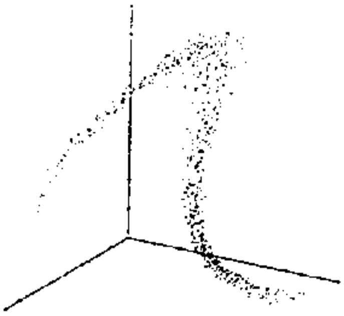
Nous allons d'abord résumer la narration que fait Ian Stewart *[Dieu joue-t-il aux Dés ? - chapitre « Sonder les profondeurs » - Éditions Flammarion NBS]* de l'apparition du chaos dans la cadence des gouttes qui tombent d'un robinet. Puis, nous proposerons une interprétation de « ce qui se passe », et de ce qui fait que le phénomène devient soudain chaotique.

On ouvre très doucement un robinet : une goutte se forme, petit à petit, elle se gonfle, puis elle se détache et fait « floc » en tombant sur l'évier. Si l'on écoute tomber les gouttes, les unes après les autres, on entend alors : « floc-floc-floc, etc. ».
On ouvre un tout petit peu plus le robinet, et les gouttes commencent à se grouper par deux : deux gouttes très rapprochées, puis un intervalle un peu plus long, puis, à nouveau, deux gouttes très rapprochées. On entend maintenant : « flicfloc-flicfloc-flicfloc, etc. ».
On ouvre encore davantage le robinet, le rythme des flicflocs s'accélère. Plus on ouvre, plus l'intervalle entre un flic et un floc se réduit, et plus l'intervalle entre un flicfloc et un autre flicfloc se réduit également.
On ouvre encore un peu plus, juste une fraction de soupçon de presque rien d'un peu plus, et alors soudain, sans raison apparente, le rythme des gouttes devient complètement irrégulier eet sans plus aucune périodicité. Bref, il est devenu complètement chaotique.

La chose a été mesurée expérimentalement. Ian Stewart le signale dans son même ouvrage mais cette fois au chapitre « Retour à Bashô ».
Robert Shaw et ses collaborateurs, à l'université de Californie à Santa Cruz, ont commencé par réaliser une mesure sur environ 5 000 intervalles successifs de temps entre gouttes dans la phase « chaotique » d'un robinet. Le rythme obtenu avait bien un aspect absolument aléatoire, et aucune régularité ne pouvait y être décelée.
Puis, cette équipe a procédé à ce que Ian Stewart appelle un « trucage », lequel a consisté à construire une figure 3 D à l'aide de la série purement linéaire (donc apparemment 1 D) des intervalles de temps mesurés.
Le trucage est le suivant : on utilise la valeur d'un intervalle de temps comme 1^e^ coordonnée d'un point dans l'espace, pour obtenir la 2^e^ coordonnée du même point, on prend la valeur de l'intervalle mesuré juste après et, pour obtenir la 3^e^ coordonnée, on prend la valeur de l'intervalle mesuré encore après. Puis, la valeur qui a servi de 2^e^ coordonnée est maintenant prise comme 1^e^ coordonnée d'un nouveau point, etc. Ce trucage, transformant une série 1 D en figure 3 D, est une méthode mise au point par Ruelle, Packard et Takens.



le « trucage » qui permet, par décalages successifs,
de transformer une sérié linéaire en une figure en trois dimensions



Étrangement, dans le cas des intervalles chaotiques entre gouttes, tous les points obtenus par ce type de bricolage d'une série apparemment aléatoire et irrégulière construisent dans l'espace une figure bien formée.
Ils se tiennent tous à l'intérieur de la surface de la figure que l'on reproduit ci-contre.

Étrangement est le mot, puisque l'on donne à cette figure, précisément, le nom « d'attracteur étrange ». Attracteur, car tous les points y sont attirés. Étrange, car ils ne forment pas une figure continue dans le temps. Si, par exemple, un point calculé tombe vers un bout de la figure, on ne peut absolument pas deviner si le suivant de la série sera juste à côté ou à l'autre bout de la figure. Il sera tout simplement n'importe où, mais toujours à l'intérieur de la surface que forme la figure.
Nous étions partis d'une série temporelle 1 D continue, puisque les intervalles de temps y sont rangés dans l'ordre exact où ils se sont produit l'un après l'autre, en continu dans le temps. La figure que l'on a formée a donc gagné plusieurs dimensions, mais, « en échange », elle a perdu toute continuité dans la dimension du temps.
Que s'est-il donc passé ?

Pour le deviner, nous allons maintenant réinterpréter la dynamique des gouttes en termes de déformations.
Une goutte qui se forme peut être comprise comme le résultat de la combinaison de 3 déformations indépendantes les unes des autres. Indépendantes quant à leur cause, et quant à leur type d'évolution:

- la 1^{e} cause de déformation est celle de la pression de l'eau. L'eau qui vient « de derrière » pousse l'eau qui est déjà dans le bec du robinet et la force à sortir.
- la 2^{e} cause de déformation de la goutte est la gravité : elle creuse la surface du liquide et la déforme.
- la 3^{e} cause de déformation est la force de capillarité qui crée à la surface de la goutte une tension qui retient l'eau au bec et qui l'empêche de tomber malgré, l'eau qui pousse « par-derrière » et malgré la gravité qui l'attire « par en dessous ».

Quand on commence par ouvrir très légèrement le robinet, l'enchaînement de ces trois déformations est simple à suivre :

- la pression pousse l'eau vers le bas du robinet ;
- la gravité creuse la surface ;
- la tension capillaire la retient dans le bec.

Quand le poids contenu dans la goutte est supérieur à ce que peut retenir cette tension, la goutte se détache alors, et tombe. Cela fait « floc ».
Et cela fait de la place pour une goutte suivante qui va bientôt commencer à se former. On est dans la phase « floc-floc-floc ».
Quand on ouvre juste un peu plus le robinet, on ne va pas laisser suffisamment de temps à une goutte pour se former toute seule tranquillement : la goutte suivante va commencer à se former avant que la précédente ne soit tombée. La suivante va donc précipiter la chute de la précédente et va se trouver, elle-même, entraînée dans cette chute.
C'est ce qui groupe maintenant les gouttes par deux. C'est pour cela qu'on entend maintenant : « flicfloc-flicfloc-flicfloc ».

Si l'on augmente encore la vitesse de l'eau qui arrive, donc la 1^e déformation, chaque couple de gouttes aura de moins en moins de temps pour se former. En conséquence, c'est chaque couple qui va se mettre à interférer avec le couple suivant, puis ce sera chaque « paire de couple » avec chaque « paire de couple », puis chaque « paire de paire de couple ». . . etc.
Ainsi le rythme s'accélère périodiquement.
Et puis, soudain, n'importe quoi : le chaos.

Les trois déformations que l'on a décrites sont ce que l'on a appelé des « déformations courbes » *[voir chapitre 4 - Le piège de la représentation vectorielle des forces]*, car leurs valeurs varient de façon périodique :

- ainsi, la pression de l'eau qui force la goutte à se gonfler passe par un maximum, que l'on peut quantifier comme « 1 », et qui équivaut à un redémarrage à 0, puisque la goutte libérée quitte alors le robinet ;
- même chose pour la gravité qui s'exerce sur le volume d'une goutte d'eau qui augmente jusqu'à un maximum, puis qui repart à 0 quand la goutte est tombée ;
- même chose enfin pour la tension capillaire qui varie périodiquement avec la forme périodiquement plus ou moins tendue de la goutte.

Par ailleurs, ces trois déformations courbes sont incommensurables entre elles : il n'y a pas de relation stricte entre ce qui modifie la pression de l'eau (notre main qui tourne le robinet), ce qui fait varier l'intensité de la capillarité (la forme de la goutte qui change continuellement), et ce qui fait varier le volume d'eau pris en charge de façon cohérente et continue par la gravité (la viscosité interne du liquide).
Malgré cette incommensurabilité, l'effet cumulé de ces trois causes de déformation est d'abord « continu » dans l'espace-temps : on voit bien chaque goutte naître, se gonfler, tomber. C'est sans surprise.
Quand on augmente la pression, on force les trois causes à interférer les unes avec les autres, car on ne laisse pas le temps à une goutte de tomber avant de provoquer la naissance d'une autre. Mais bien que ce soit déjà un peu compliqué, c'est toujours continu, c'est-à-dire que l'on peut toujours deviner ce qui va se passer, comment le rythme va accélérer.
Puis, quand l'interférence atteint un point particulier, soudainement cela n'est plus du tout continu dans l'espace-temps, parce qu'on ne pourra plus jamais déduire de ce qui s'est passé dans l'espace, à un instant, ce qui se passera dans l'espace, à l'instant juste suivant : le prochain intervalle entre gouttes sera-t-il plus court que le précédent ? sera-t-il plus long ? sera-t-il semblable ?
Nous ne pouvons plus répondre, car il n'y a plus aucune continuité repérable dans le rythme.

14- Naissance d'une dimension

On a commencé à parler de l'interférence entre les trois causes de déformation courbe qui produisent les gouttes.
L'hypothèse que l'on va faire, sur la cause de l'apparition du chaos, a trait à une caractéristique particulière que va prendre à un certain moment cette interférence.
Ian Stewart explique dans son livre « Dieu joue-t-il aux dés ? » *[Éditions Flammarion NBS]* que, lorsqu'apparaît le chaos, il y a toujours, en même temps, quelque chose qui devient autosimilaire dans le phénomène. On fait ici l'hypothèse que c'est la déformation résultante, celle produite par l'interférence entre les trois déformations courbes initiales, qui devient alors autosimilaire et qui provoque aussitôt l'apparition du chaos.
On explique maintenant pourquoi.

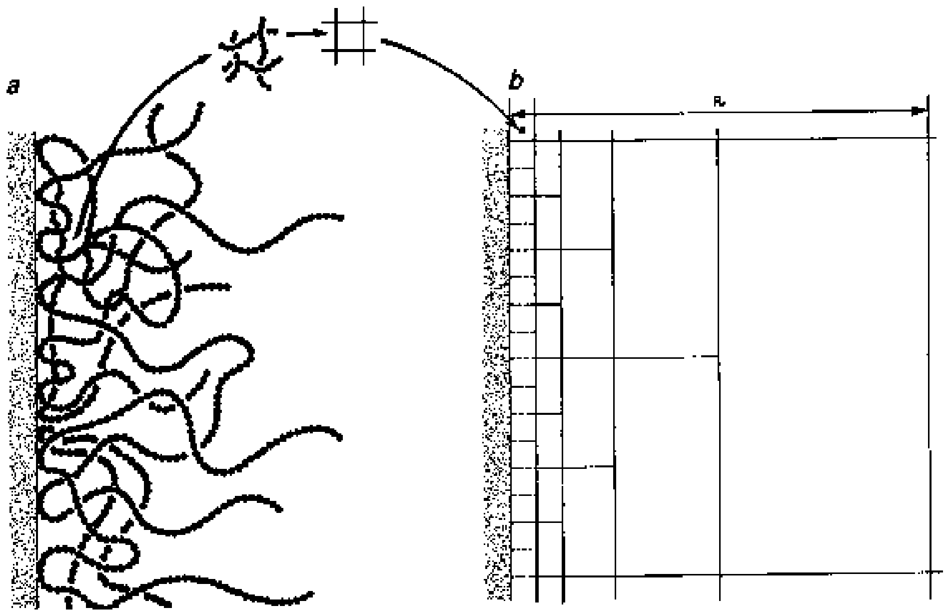
Si les trois causes engendrent entre elles une déformation combinée autosimilaire, cela veut dire que, désormais, à chaque échelle où l'on peut considérer l'eau en train de former une goutte, l'interférence entre les trois déformations courbes (pression, gravité et tension capillaire) forme une partie d'interférence en phase avec l'interférence globale.
Ce que cela change, c'est que si, maintenant, on augmente encore un peu la pression qu'exerce la 1^{e} déformation, ce supplément va être encaissé de façon coordonnée à toutes les échelles du liquide. Puisque le nombre d'échelles en lequel un phénomène peut se diviser tend vers l'infini, cela veut dire que ce supplément de déformation va être divisé presque à l'infini et qu'il sera émietté, saucissonné, entre toutes les échelles du liquide. Il perdra proportionnellement, et donc « infiniment », de son pouvoir déformant.
Or, diviser à l'infini, c'est réduire à zéro.
Et ce qui est valable pour la déformation par la pression, vaudra, de la même façon, pour les deux autres causes de déformation : soudainement, chacune des trois prendra donc une valeur nulle, ce qui peut se résumer en disant que le caractère autosimilaire acquis par l'interférence des trois déformations courbes devient une cause de stabilisation de la déformation, une cause qui s'oppose à tout surcroît de déformation en l'éparpillant sur une infinité d'échelles. L'autosimilarité agit donc comme une force qui contraint le phénomène de déformation à se réduire, elle « déforme la déformation » du phénomène et devient ce que l'on peut bien appeler une nouvelle cause de déformation, puisque, sans elle, le phénomène aurait pris une autre forme.

Nous venons de dire qu'une cause qui fait stopper une déformation mérite d'être appelée, elle-même « déformation ». Il n'y a pas de quoi en être choqué, car c'est strictement similaire au cas d'une force qui s'oppose, par exemple, à la progression d'un objet : on pousse l'objet en lui imprimant une force, et son déplacement occasionne un frottement qui stoppe ce déplacement. Le frottement qui arrête l'objet reçoit alors le même nom de « force » que la cause qui pousse l'objet. Ici, ce qui s'oppose au changement est appelé « déformation », de la même manière que la cause opposée qui tend à l'accroître.

L'autosimilarité est donc une cause de déformation. Mais, plus que cela, c'est une cause de déformation autonome, une cause distincte des trois premières, car celles-ci tendent à accroître la déformation, alors que la nouvelle tend à la limiter.
Bien qu'étant le résultat de leur interférence, elle n'a donc rien à voir avec « l'addition » de ces trois causes.

Précédemment, on avait donné un schéma *[dernier schéma du chapitre 4 - Le piège de la représentation vectorielle des forces]* indiquant comment le principe d'addition vectorielle des forces pouvait se trouver parfois mis en défaut par l'allure de l'interférence de ces forces. C'est probablement maintenant, où l'explication de ce qui arrive au phénomène est tout entière contenue dans la caractéristique de l'interférence, que cette représentation vectorielle traditionnelle est la plus handicapante : tout lui échappe, elle nous aveugle complètement sur ce qui se passe.

Ce n'est pas la première fois que l'on est amené à considérer que le caractère autosimilaire d'un phénomène agit comme une force. Pierre Gilles de Gennes en vient alors à conclure, dans un article « la matière ultradivisée » *[L'Ordre du Chaos - Bibliothèque Pour La Science - diffusion Belin - 1989]* en avait donné un autre exemple.
Il considérait des grains de peinture entourés chacun d'une auréole de polymère, situation dans laquelle les chaînes de polymères se mettent d'elles-mêmes en réseau autosimilaire à toutes les échelles. Et Pierre Gilles de Gennes conclu que cette autosimilarité des réseaux, lorsqu'elle cherche à se reproduire également dans l'interférence entre les auréoles de tous les grains, agit comme une force qui repousse les grains les uns des autres. L'autosimilarité des réseaux d'auréoles empêche les grains de coalescer, c'est-à-dire de s'agglomérer entre eux comme ils le feraient en l'absence des auréoles.



la structure autosimilaire d'une auréole diffuse de polymère autour d'un grain, selon P.G. de Gennes

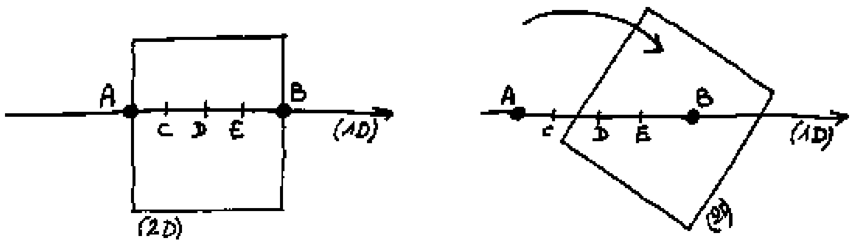
Pour en revenir au robinet qui goutte, nous avons donc, dans l'évolution de l'interférence entre les trois forces qui causent les déformations, un moment où cette interférence acquiert une propriété d'autosimilarité qui la transforme elle-même en force :

- en force distincte et autonome des trois premières forces, puisqu'elle n'agit pas de la même manière qu'elles ;
- et en cause nouvelle de déformation qui agit dans tout le volume et à toutes les échelles de façon similaire.

Nous avons donc là, très exactement, toutes les propriétés qu'il faut pour qu'une cause de déformation soit appelée « dimension » : elle déforme, pour son propre compte, dans toutes les directions, et de la même façon à toutes les échelles. C'est une dimension de déformation courbe autosimilaire, par conséquent, c'est une « dimension fractale ».

Nous avions donc commencé avec un robinet qui gouttait dans l'espace 3 D (3 dimensions d'espace), sous l'influence d'un phénomène 3 D (3 dimensions de déformation).
Puis, soudain, nous nous retrouvons avec un robinet qui, tout en continuant à goutter dans l'espace 3 D, subit maintenant l'influence d'un phénomène 4 D (4 dimensions de déformation).
La description la plus immédiate de ce qui se passe alors est de dire que les dimensions d'espace se trouvent « débordées » par le nombre des dimensions du phénomène : les dimensions d'espace ne peuvent plus contenir en continu toutes les dimensions du phénomène, car l'autosimilarité lui donne une dimension en trop pour cela.
Mais rien ne peut empêcher le phénomène d'avoir plus de dimensions que son réceptacle, car cela ne gêne pas le phénomène d'avoir plus de dimension que l'espace où il évolue. En conséquence, rien ne change pour le phénomène : il continue d'être parfaitement déterminé par l'interférence de ses dimensions fractales de déformations, lesquelles sont maintenant 4.
Il n'y a que pour nous que cela change quelque chose, car, dans l'espace 3 D, on ne peut voir se développer de façon continue que 3 dimensions de déformation à la fois. Nécessairement, la 4^{e} dimension de déformations ne correspond plus à des liens de proximité dans l'espace, elle ne correspond plus à une continuité visible dans l'espace.
Pour nous, c'est donc le chaos apparent. Visiblement, des parties du phénomène sont éparpillées sans lien de continuité entre elles, mais, dans la réalité des causes qui agissent dans le phénomène, elles sont liées et continues l'une l'autre dans toutes leurs 4 dimensions.

Pour donner un équivalent de ce que signifie « être relié en réalité, mais pas visiblement », on peut s'imaginer que l'on est un être 1 D, une droite par exemple, et que l'on cherche à apercevoir un carré (réalité 2 D) qui nous traverse.

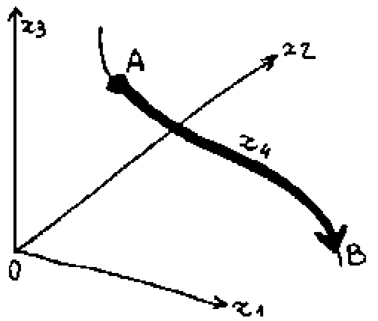


En tant que créature 1 D, tout ce que nous pouvons voir et saisir du carré, ce sont les points A et B où il nous traverse. Pour nous, ces 2 points sont parfaitement séparés, discontinus. Il y a une infinité de points C, D, E, F, etc. qui les séparent et les empêchent d'être liés. Nous sommes incapables de concevoir que ces 2 points soient, en réalité, reliés en continu par une figure carrée, car, pour nous, dans notre univers 1 D, un carré, cela n'existe pas, cela n'a pas de sens. Tout ce qui est continu pour nous entre A et B doit forcément passer par C, D, etc.
Si le carré se met à bouger, à glisser par exemple le long de notre droite-univers, nous serons incapables de saisir un rapport quelconque entre le fait que le carré quitte le point A et le fait qu'il quitte en même temps le point B. Cela sera pour nous deux déplacements dont les causes nous paraîtront indépendantes. Si, par-dessus le marché, le carré se met à tourner en même temps qu'il glisse, le rythme de déplacement de B va varier en conséquence d'une façon différente de celui de A. Le rapport entre ces deux rythmes nous paraîtra complètement aléatoire, en particulier quand le sens de déplacement d'un point changera au passage d'un des sommets du carré sur la droite.
On dira de ce rapport qu'il est chaotique, mais il ne l'est pas dans la réalité. Il ne nous apparaîtra ainsi que parce que la cause qui génère son évolution (le déplacement d'un carré qui pivote sur lui-même) a une dimension de trop pour être saisie en continu dans notre univers 1 D.

Quand l'autosimilarité transforme un phénomène 3 D + T (le temps) en phénomène 4 D + T, c'est exactement la même chose pour nous qui vivons dans un univers 3 D + T. Nous sommes incapables de voir, de saisir, ce qui relie en continu ce qui se produit dans une 4^{e} dimension.
À la question parfois posée : « où se cache l'ordre caché du chaos déterministe ? », nous sommes donc en mesure de proposer cette réponse : il ne se cache pas ! Il évolue seulement dans une 4^{e} dimension à laquelle nous sommes complètement aveugles, car nous ne pouvons voir en continu dans l'espace que 3 dimensions à la fois.
Mais prenons bien garde à considérer qu'il n'évolue pas dans une 4^{e} dimension d'espace qui n'existe pas, mais dans une 4^{e} dimension de déformations. Ce qui, pour nous, fait chaos, c'est que l'espace n'a que 3 dimensions, ce qui est insuffisant pour rendre compte de la continuité simultanée de 4 dimensions de déformations.

15- Pour voir ce qui se passe dans la 4^{e} dimension

Combien de dimensions peut-on représenter et lire en continu ? On a dit 3 pour l'espace, mais, si l'on ajoute la dimension du temps, cela fait 4. Pour obtenir ces 4 dimensions, on construit un repère de 3 dimensions de coordonnées, et, dans ce repère, on représente la position d'un mobile à divers moments. C'est un repère 3 D + T classique, et le fait que l'on y « retient » les unes à côté des autres les positions successives prises par le mobile dans son déplacement permet d'y figurer la 4^{e} dimension, celle du temps.



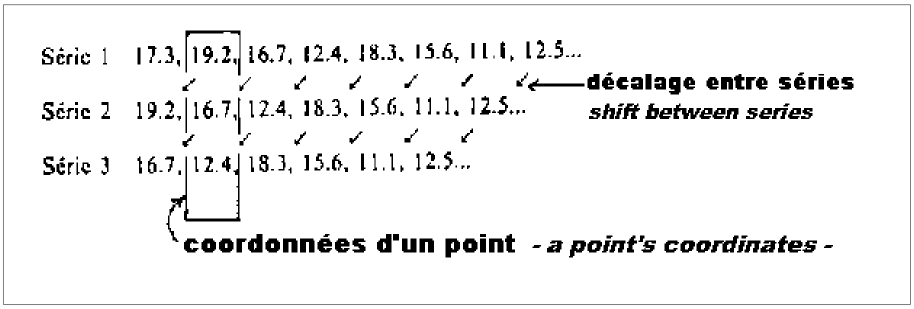
Évolution du mobile de A vers B dans 4 dimensions simultanées

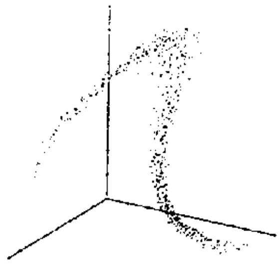
C'est le dessin de la portion de courbe continue AB qui représente la continuité de la 4e dimension, souvent utilisée pour représenter la dimension du temps

Dans cet usage habituel, la continuité entre les différents points d'un espace 3 D sert donc à représenter la continuité de ce qui se passe dans la dimension du temps, mais on peut l'utiliser pour représenter la continuité d'une autre dimension que celle du temps, en fait, de n'importe quel autre type de dimension de valeur 1.

On peut donc envisager d'utiliser un tel graphique, à 3 + 1 dimensions, pour représenter les 4 dimensions d'une déformation 4 D + T, à la condition, toutefois, de renoncer à représenter en même temps leur dimension de temps.
Dans le cas d'un phénomène qui prend une 4^{e} dimension d'autosimilarité, c'est ce qui se passe en continu dans cette dimension d'autosimilarité qui pourra être représenté au détriment de ce qui se passe en continu dans la dimension du temps.

Et l'on comprend maintenant que c'est très exactement cela qu'a obtenu l'équipe de Robert Shaw dans son graphique qui « truquait » la série 1 D des intervalles de temps du robinet qui goutte chaotiquement.

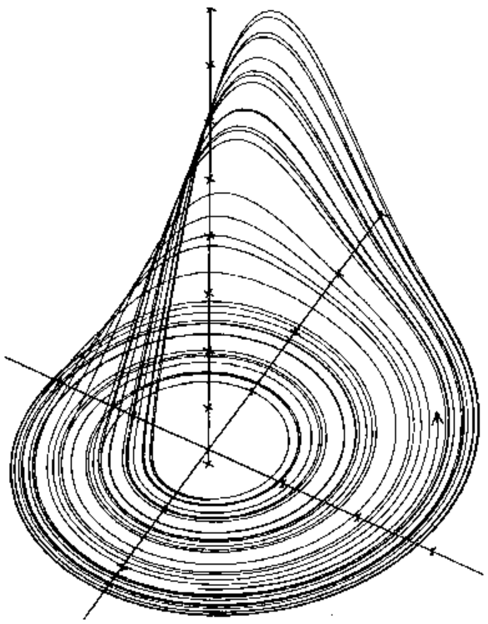




Chaque dimension du repère 3 D (abscisse, ordonnée et hauteur) porte la valeur de tous les intervalles mesurés, mais, comme ces valeurs sont décalées « d'un cran » entre chaque dimension, la continuité qui se crée sur la 4^{e} dimension du graphique correspond à ce qui est « transverse » à tous les intervalles de durée mesurés. Or, ce qui est transverse à la dimension du temps où ils se sont créés, et qui est transverse, aussi, à chacune des déformations qui les ont créés, c'est précisément l'interférence de ces déformations qui, dans cette phase du phénomène, se trouve être autosimilaire.
Ce qui apparaît sur le graphique, c'est donc l'allure de la déformation continue d'autosimilarité provoquée par l'interférence entre les 3 déformations initiales du phénomène, et, comme il n'y a de place sur ce graphique qu'à 4 dimensions continues, la dimension d'autosimilarité a pris la place de la dimension du temps, à laquelle on a explicitement renoncé en utilisant des coordonnées qui groupent des intervalles de temps différents. Dans ce type de coordonnées, chaque intervalle de temps est, en effet, confronté avec son suivant et avec celui qui suit son suivant, de telle sorte que l'on saute ainsi par-dessus la stricte continuité des évènements qui se succèdent, on brise la logique 1 D de l'écoulement du temps. Alors, nécessairement, sur ce graphique 4 D (4 déformations), un point et son suivant dans le temps n'ont plus aucune relation de continuité, et donc aucune relation de proximité.

On en vient maintenant à l'allure même d'un graphique qui représente une dimension d'autosimilarité.
Quand la 4^{e} dimension d'un repère de coordonnées 3 D + 1 D correspond au temps, elle est représentée par une courbe continue. Tous les points successifs de cette courbe se touchent, comme tous les instants successifs du déroulement du temps se touchent.
Quand la 4^{e} dimension correspond à la dimension d'autosimilarité, on doit s'attendre à ce qu'elle soit, cette fois, représentée par une figure autosimilaire, car, de la même façon qu'un trajet continu a, comme « image », une courbe continue, une dimension d'autosimilarité doit avoir, comme « image », une figure autosimilaire.
C'est bien précisément ce que l'on obtient.

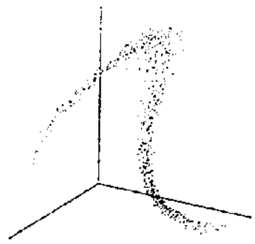
On ne peut pas l'observer dans le cas de l'attracteur dessiné par l'équipe Shaw, car l'image est trop « floue », mais on sait que la figure obtenue est en fait une coupe transversale partielle d'un attracteur qu'on appelle l'attracteur de Rössler.



L'attracteur de Rössler

[référence du dessin : James P. Crutchfield dans un article « le chaos » paru dans la revue « Pour la Science »]

Le graphique obtenu par l'équipe Shaw (donné au chapitre 13 et reproduit ci-dessous) est, en fait, une coupe transversale partielle de cet attracteur

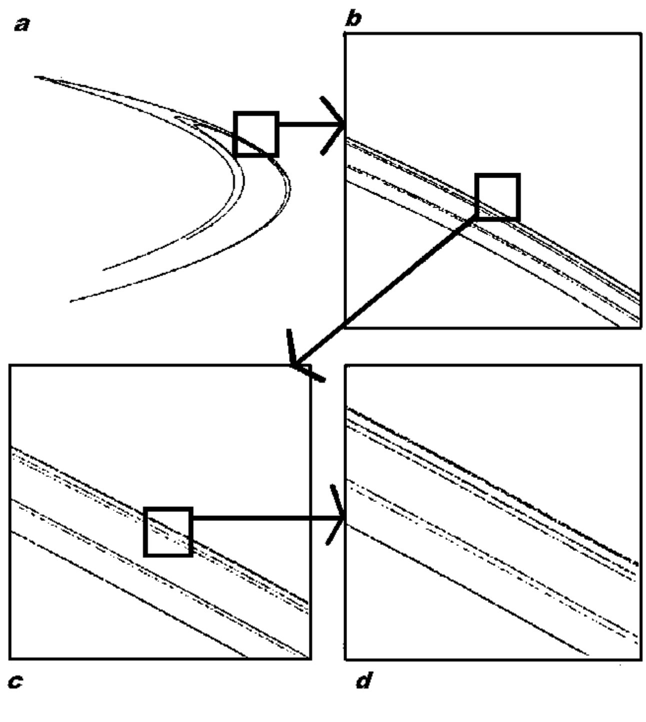


Or, l'attracteur de Rössler est un attracteur que les mathématiciens appellent « étrange », parce qu'il a la particularité de se répéter semblable à lui-même à toutes ses échelles, c'est-à-dire qu'à chaque fois qu'on l'observe à une échelle plus fine, on retrouve alors la même allure que celle que l'on observe à plus grande échelle.
Nous allons montrer cette particularité sur un autre « attracteur étrange », dénommé lui, l'attracteur de Michel Hénon, du nom de son inventeur.

l'autosimilitude à toutes ses échelles de l'attracteur de Hénon

[dessin de James P. Crutchfield]

Cette courbe est calculée mathématiquement, et, grâce à la simulation que permet le calcul, nous pouvons la regarder comme avec un microscope qui grossit jusqu'à 1000 fois.
*Ainsi, le dessin représente en **a** une vue d'ensemble de la courbe sur laquelle se situent les positions successives d'un même point de départ. En **b**, on a le petit carré de **a** grossi 10 fois. En **c**, on a le petit carré de **b** grossi 10 fois. Et en **d** on a cette fois le petit carré de **c** grossi 10 fois.*
*En **d**, on a donc un détail de **a** agrandi 1000 fois, qui ressemble à la courbe d'ensemble **a** dans sa partie centrale.*



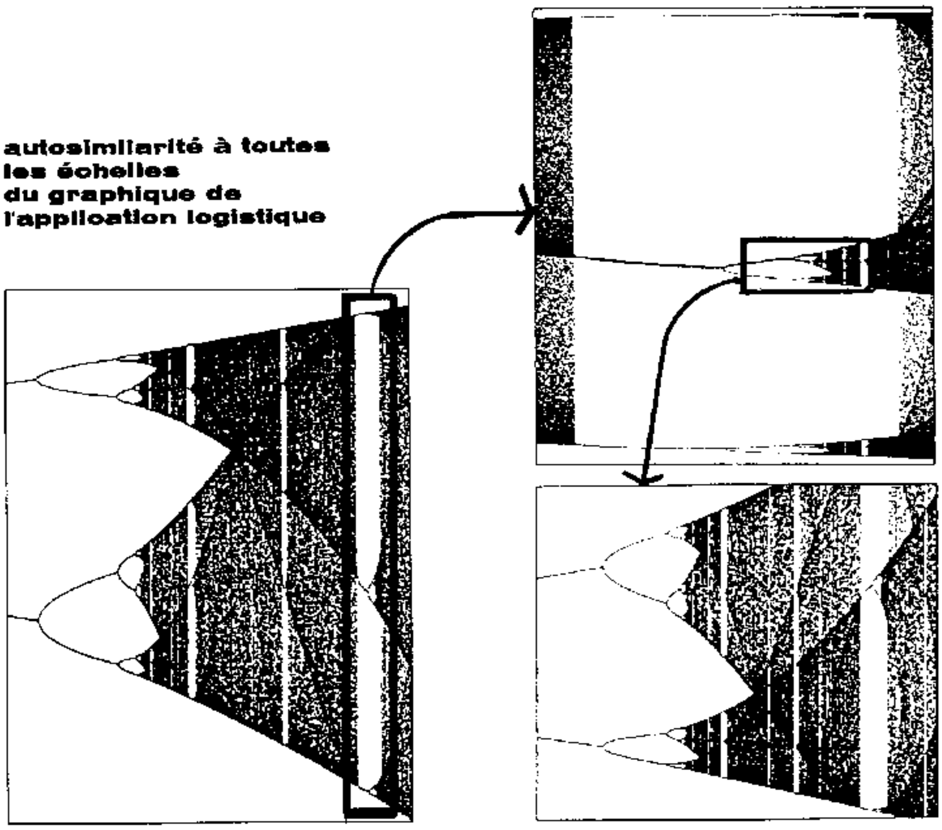
*En même temps, **d** représente une partie des bandes de **c** qui est tellement similaire dans leur nombre et dans leur rythme d'alternance à la totalité des bandes de **c** ou des bandes de **b** (2 lignes très rapprochées sur le bord extérieur, 1 petit écart, 2 lignes assez rapprochées, 1 très grand écart, 2 lignes assez rapprochées, 1 moyen écart, 2 lignes extrêmement rapprochées formant le bord intérieur), que l'on ne peut pas faire la différence entre « une vue à une échelle » et « une vue à une échelle 10 fois plus petite » ou « 100 fois plus petite », hormis pour ce qui concerne le rayon de courbure des figures.*
*On a peine à réaliser que les 4 doubles lignes de la figure « **d** » ne sont que les grossissements des 2 doubles lignes les plus extérieures de la figure **c**, et, cela compris, on s'attend à ce que si la précision des arrondis de calculs permettait de grossir encore 10 fois le dessin, on trouverait dans l'agrandissement des 2 doubles lignes les plus extérieures de **d**, la même organisation en 4 doubles lignes.*
Quelle que soit l'échelle, le détail du détail est absolument identique au détail du détail du détail, etc.

[nota : les simulations de l'attracteur de Hénon montrent que la même allure autosimilaire se retrouve dans la partie « en pointe » de la figure, avec d'ailleurs la même disposition des bandes que dans la partie centrale. Ces deux parties ne se différencient donc que par le rayon de courbure, qui est modéré dans la partie centrale et très brusque dans la pointe]

La forme est un aspect de cette figure.
Il est un autre aspect que l'on ne voit pas lorsque la figure est terminée, mais que l'on voit lorsqu'on la calcule et que l'on suit des yeux les positions successives d'un même point : le point ne se déplace pas d'une façon qui paraît régulière et logique, mais il circule selon un rythme irrégulier impossible à prévoir. Par exemple, à certains moments, il s'attarde longtemps dans un coin de la figure, puis, soudain, il file dans un coin très éloigné où il restera peut-être peu de temps, ou peut-être au contraire très longtemps avant de repartir ailleurs, et cela toujours comme au hasard.
On a expliqué plus haut à quoi ce déplacement chaotique du point est dû : la dimension de continuité dans le temps s'est effacée au profit de la dimension de continuité autosimilaire, car le dessin ne possède pas assez de dimensions pour représenter en même temps ces deux continuités.

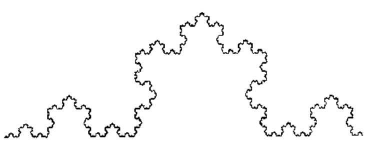
Maintenant tout semble clair : on a dit qu'une dimension d'autosimilarité avait dû naître brusquement et chasser la dimension du temps, car il n'y a pas de place, sur le graphique, pour les deux dimensions à la fois. On a bien trouvé, sur le graphique, que la continuité du temps est brisée et qu'elle est remplacée par une figure dotée d'un autre type de continuité, la continuité de l'autosimilarité à toutes les échelles. Pourtant, il reste encore un mystère.
Le mystère est que la figure autosimilaire que forme un attracteur étrange n'est pas une courbe, mais une surface.
Si l'attracteur de Hénon, par exemple, ressemble à une courbe, il n'en est pas une, car si chaque courbe y apparaît, en la grossissant, comme elle-même formée de multiples courbes décalées entre elles, cela veut dire que le blanc que l'on voit à une échelle donnée au voisinage d'une courbe, n'est pas réellement « vide » de courbe.
Il ne nous apparaît tel que parce que les courbes des échelles inférieures sont trop « fines » pour notre échelle de lecture et qu'on ne les voit pas. Les apparentes courbes des attracteurs étranges sont donc, en fait, des bandes semées de points sur toute leur surface et sans limite franche en largeur. Ces bandes contiennent elles-mêmes des bandes où la densité des points y est nettement plus forte que dans ses autres zones, et c'est cela qui donne l'impression, quand on force le contraste et que l'on élimine les zones à plus faible densité, qu'il s'agit de traits continus entre des plages blanches.

Il existe des attracteurs qui ne se présentent d'ailleurs pas du tout sous cette allure de bandes. Ainsi, le graphique de « l'application logistique », dont nous donnons dans le dessin ci-dessous plusieurs échelles d'agrandissement : les zones de points s'y regroupent seulement très vaguement, et l'on peut seulement appeler « ombrages » ces zones de plus forte densité qui n'ont aucunement l'allure de courbes.

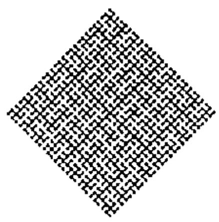


[source de l'image : James P. Crutchfield / Nancy Sterngold]

Les points des attracteurs étranges se répartissent donc sur des surfaces de densités variées, et non sur des courbes.
C'est le mystère qui reste à éclaircir, car cela ne va pas de soi.
On aurait pu s'attendre à ce que la continuité dans la dimension d'autosimilarité soit représentée par une courbe autosimilaire continue, de la même façon que la continuité d'un trajet dans le temps est représentée par une courbe continue.
Car des courbes continues autosimilaires cela existe : tous les trajets fractals que l'on a étudiés en sont des exemples. Un attracteur étrange pourrait donc s'apparenter, par exemple, à la courbe que dessine un flocon de Von Kock, plutôt que de s'apparenter à la « courbe-surface » de Peano.



un flocon de Von Kock



une courbe-surface de Peano

Qu'un point y fasse des sauts discontinus dans le temps est une chose, mais pourquoi saute-t-il d'un point à l'autre d'une surface, plutôt que d'un point à l'autre d'une courbe ?

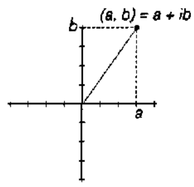
16- Dimensions en chaîne

Quand une courbe se dessine au cours du temps, ses points passent d'une position à l'autre de cette courbe. Avec un attracteur étrange, on ne voit plus des points parcourir une courbe, mais sauter d'un endroit à l'autre d'une surface ? Eh bien, il faut se rendre à l'évidence : un attracteur étrange ne représente pas l'évolution d'une courbe, mais celle d'une surface. Nous allons faire l'hypothèse que cette mutation de la figure, par augmentation du nombre de ses dimensions (surface 2D remplaçant une courbe 1D), aurait à voir avec la mutation de la dimension fractale représentée : une courbe représenterait une dimension fractale « 1 », tandis qu'une surface représenterait une dimension fractale « 2 ». Toutefois, on ne peut comprendre la signification de cette mutation si l'on ne considère que le fonctionnement d'un attracteur étrange, ce qui nous amène à proposer une hypothèse générale sur l'enchaînement de tous les types de dimensions. Pour présenter notre hypothèse, nous la résumons dans un tableau (page suivante).
Chaque ligne horizontale y correspond à une dimension fractale, comptée de 0 à 3. Nous les présentons d'abord de façon succincte, puis, tour à tour, nous analyserons chacune en détail.

- **<u>dans la 1^e ligne</u>**, se trouve la dimension fractale qui a pour partie entière 0, et dont nous avons dit *[chapitre 9]* qu'elle était spécialement adaptée pour mesurer des contrastes.
La 1^e case de cette ligne montre un fonctionnement analogue à celui que l'on a décrit pour le mode de génération des nombres entiers : instabilité du 0 dont la vibration dévide d'un coup tous les nombres jusqu'à l'infini *[chapitre 7 - Reprenons à partir de zéro]*.
Nous dirons donc que cette dimension fractale 0 est celle des nombres entiers.

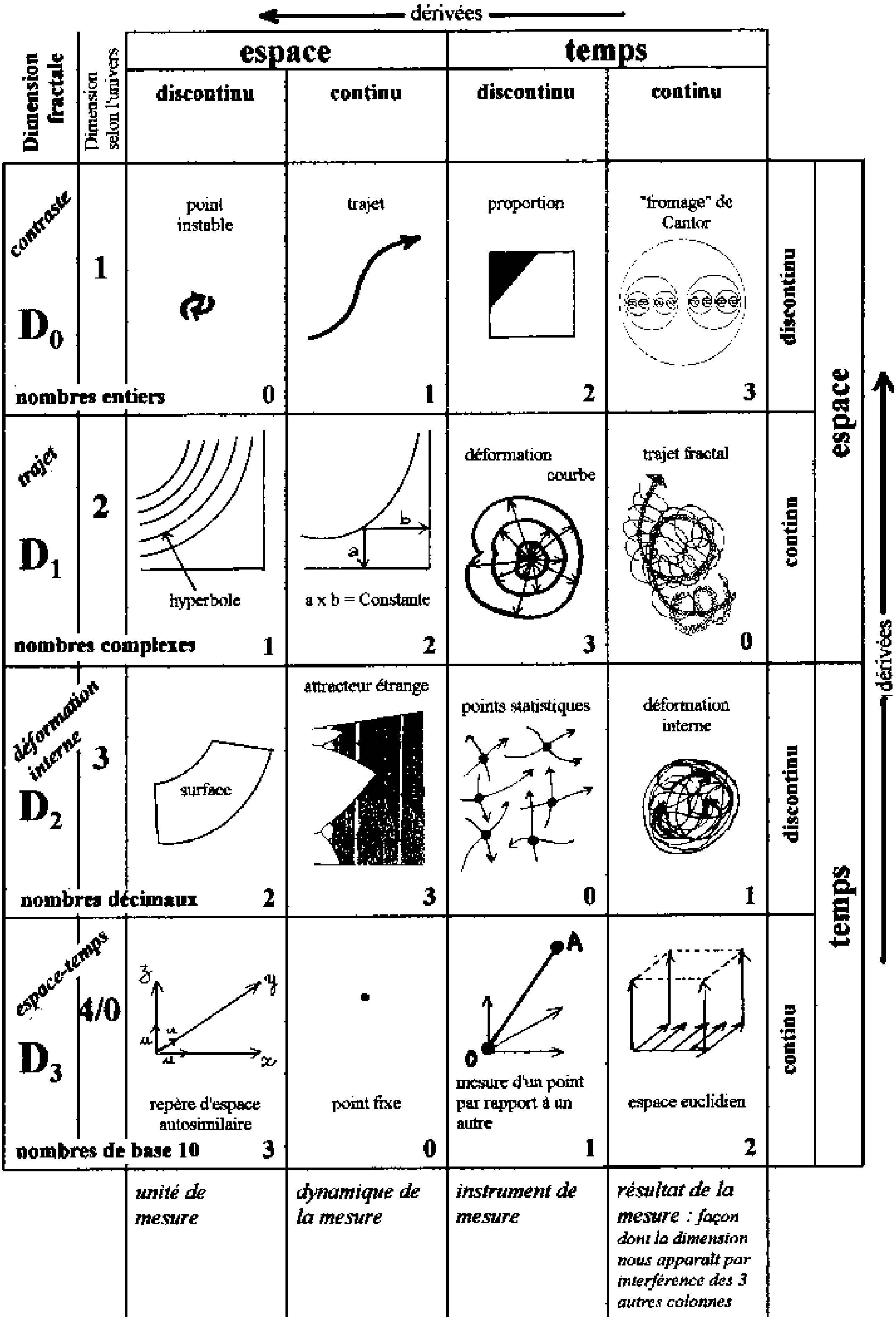
- **<u>dans la 2^e ligne</u>**, se trouve la dimension fractale qui a pour partie entière 1, et dont nous avons dit *[chapitre 9]* qu'elle était spécialement adaptée pour mesurer des trajets.
Cette dimension fonctionne par la mesure simultanée de deux grandeurs, comme cette caractéristique est aussi celle des nombres complexes, nous dirons donc que cette dimension fractale 1 est celle des nombres complexes.

les nombres complexes peuvent s'écrire
a + ib (ou i est la racine carrée de -1),
ou être représentées par un couple de nombre (a,b)



- **<u>dans la 3^e ligne</u>**, se trouve la dimension fractale qui a pour partie entière 2, et dont nous avons dit *[chapitre 9]* qu'elle était spécialement adaptée pour mesurer la déformation interne des corps.
Dans le chapitre 7 (Reprenons à partir de zéro), nous avons expliqué pourquoi les nombres décimaux réclament une dimension 2 pour être produits et conservés, nous dirons donc que cette dimension fractale 2 est celle des nombres décimaux.

- **<u>dans la 4^e ligne</u>**, se trouve la dimension fractale qui a pour partie entière 3. Jusqu'ici nous n'avons pas encore proposé de signification à ce type de dimension.
Nous suggérons maintenant que cette dimension est celle de l'espace-temps et des repères d'espace-temps, tels qu'on les considère habituellement.
La dimension 3 étant spécialisée dans l'interférence des dimensions qui la précédent, nous proposons de considérer cette dimension comme étant celle qui permet de combiner la dimension des nombres entiers, celle des nombres complexes et celle des nombres décimaux.
Comme c'est l'introduction des nombres de base 10 qui permet de calculer de façon commode les nombres dans tous les cas de figure, nous dirons donc que la dimension 3 est la dimension des nombres de base 10.


dérivées
espace
temps
discontinu
continu
discontinu
continu
Dimension fractale
Dimension selon l'univers
contraste
1
D_0
point instable
trajet
proportion
"fromage" de Cantor
nombres entiers
0
1
2
3
discontinu
trajet
2
D_1
hyperbole
a x b = Constante
déformation courbe
trajet fractal
nombres complexes
1
2
3
0
continu
déformation interne
3
D_2
surface
attracteur étrange
points statistiques
déformation interne
nombres décimaux
2
3
0
1
discontinu
espace-temps
4/0
D_3
repère d'espace autosimilaire
point fixe
mesure d'un point par rapport à un autre
espace euclidien
nombres de base 10
3
0
1
2
continu
espace
temps
dérivées
unité de mesure
dynamique de la mesure
instrument de mesure
résultat de la mesure : façon dont la dimension nous apparaît par interférence des 3 autres colonnes

La 1e ligne correspond donc aux dimensions fractales qui ont 0 pour partie entière.
Ces dimensions servent à calculer les contrastes

- **dans la 1e colonne**, nous trouvons la figure mathématique qui permet de réaliser la mesure *[la légende décrivant la fonction de chaque colonne est en bas du tableau]*. Comme un contraste peut se mesurer par un rapport entre deux grandeurs, le résultat de ce rapport est simplement un nombre, et un nombre peut toujours être représenté par la position d'un point sur un axe. La 1e case est donc illustrée par un point, mais comme ce point n'est pas fixe et qu'il est, au contraire, susceptible de se déplacer sans cesse sur une courbe, on dira qu'il s'agit d'un point « non stabilisé ». C'est le déséquilibre perpétuel d'un tel point sous l'effet de sa contradiction interne qui provoquerait son incessant déplacement.
- **dans la 2e colonne**, on trouve la dynamique avec laquelle fonctionne l'instrument de mesure décrit en 1e case. Comme on vient de le dire, la dynamique d'un point instable, c'est une courbe. On peut dire aussi, un trajet.
- **la 3e colonne** correspond à la façon dont s'opère la mesure de la dimension. Ce que l'on mesure en fait, c'est l'effet provoqué par la déformation sur le milieu où elle s'exerce, et la nature de la mesure dépend de la nature de cette réaction du milieu. Ici, la déformation consiste à provoquer un contraste, c'est donc sous la forme d'une mesure de proportion que se fait sa mesure.
- **dans la 4e colonne**, nous trouvons la façon dont s'organise la déformation mesurée, c'est-à-dire, finalement, la façon dont le phénomène nous apparaît dans la réalité. Ici, nous avons donné l'exemple du « fromage » de Cantor qui se construit comme une poussière de Cantor *[une poussière de Cantor est représentée au chapitre 3]* à partir d'une proportion que l'on retrouve identique à toutes les échelles de lecture.

Dans chaque coin de case, est donnée une valeur de dimension qui permet de lire le tableau dans un ordre de progression diagonal, permettant donc une lecture qui croise la progression des lignes avec celle des colonnes.
On remarque que, sur chaque diagonale lue du bas à gauche vers le haut à droite, les dimensions sont les mêmes. Cela signifie que la progression diagonale est équilibrée pour toutes les cases dans le sens de lecture des diagonales qui vont du haut à gauche vers le bas à droite.

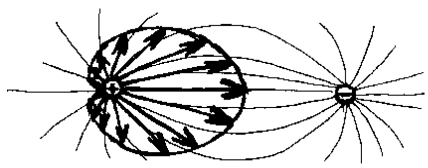
- **quand on tombe sur la valeur 3 en coin de case**, cela signifie que l'on est dans la case de la dimension où s'exerce le caractère autosimilaire de la dimension fractale en question. Pour la dimension 0, c'est donc en 4e case qu'apparaît ce caractère, et la présence du fromage de Cantor dans cette case est bien cohérente avec ce caractère.
- **quand on tombe sur la valeur 2**, cela signifie que l'on est dans la case où s'exerce la valeur décimale de la dimension. Pour la dimension 0, c'est en 3e case qu'apparaît ce caractère, qui est donné par le résultat de la proportion mesurée.
- **quand on tombe sur la valeur 1**, cela signifie que l'on est dans la case où s'exerce la fonction complexe de la dimension. Ici elle n'est pas très « complexe », puisque c'est une simple courbe que l'on trouve en 2e case.
- **quand on tombe sur la valeur 0**, cela signifie que l'on tombe sur la case qui exprime la valeur entière de la dimension. On la trouve ici en 1e case, qui est celle d'un point « même pas stabilisé ». Le nombre 0, pour cette case, semble donc approprié.

La 2e ligne correspond aux dimensions fractales qui ont 1 pour partie entière, et qui sont spécialement adaptées à calculer les trajets

- **dans sa 1e case**, nous avons donc l'état « de ce qui sert à la mesurer » : ce sont des courbes hyperboliques. La caractéristique d'une hyperbole est que, pour tous ses points, le produit de l'abscisse par l'ordonnée a une valeur constante. Gauss, qui a donné aux nombres complexes la présentation que les mathématiciens utilisent toujours, a aussi montré que les nombres complexes avaient à voir avec la courbure hyperbolique d'un espace. Ces travaux ont trouvé leur plein accomplissement dans la notion de courbure de l'espace par les masses qu'a proposée Einstein, ce calcul faisant appel, précisément, aux nombres complexes. Nous rappelons que, selon la lecture diagonale (valeur 1 en coin de case) tout autant que selon la lecture par lignes, nous sommes, avec cette case, dans la dimension des nombres complexes.

- **la dynamique que l'on trouve en 2e case** a son origine dans ce que l'on vient de dire sur la particularité d'une courbe hyperbolique : ce qui a, ici, valeur de constante, ce n'est pas une seule valeur isolée, mais c'est le produit de deux grandeurs, l'une qui sert d'abscisse et l'autre qui sert d'ordonnée. La dynamique de cette dimension est donc celle de la coordination continue de deux dimensions de type « 0 ». C'est donc selon l'importance respective de ces 2 dimensions que variera la valeur décimale de la dimension.

- **en 3e case**, on trouve la manière dont la dimension s'exerce (lecture par colonnes) et la façon dont s'organise sa synchronisation à toutes les échelles (lecture diagonale). Elle s'exerce par une impulsion de déplacement dans toutes les directions, impulsion que l'on a représentée, comme nous l'avons suggéré au chapitre 4, par une infinité de vecteurs pointant dans toutes les directions possibles.

  La forme spécifique de chaque « bouquet de vecteurs » est donnée par la valeur décimale de la case précédente. La dimension autosimilaire à toutes les échelles est donnée par la forme identique, à toutes les échelles, de ce « bouquet ».

- **en 4e case**, on trouve la façon dont la dimension nous apparaît sous l'effet de l'interférence de ses 3 premiers aspects : elle nous apparaît comme un trajet, le trajet qu'effectue le corps soumis aux impulsions multiples qui sont résumées dans le bouquet de vecteurs envisagé à la case précédente. Dans l'espace, un trajet correspond à une dimension entière « 1 ». Selon la lecture diagonale du tableau, puisque l'on trouve la valeur 0 en coin de case, celle-ci doit indiquer la valeur de la partie entière de la dimension. Comme il s'agit de la ligne de la dimension fractale 1 et que l'on y trouve un trajet dont on a dit, au chapitre 9, qu'il correspondait à une dimension fractale qui a 1 pour partie entière, tout cela est cohérent.
  Puisqu'il est question, ici, de trajet fractal, celui qui illustre cette case est similaire à lui-même sur toutes ses échelles : une hélice en hélice d'hélice.

La 3e ligne correspond aux dimensions fractales qui ont 2 pour partie entière, et qui sont spécialement adaptées à mesurer des déformations internes

- **dans sa 1e case**, nous avons mis l'état « de ce qui sert à la mesurer » : ce sont des surfaces ainsi que nous l'avons vu dans notre analyse des attracteurs étranges *[fin du chapitre 15]*. Selon la lecture diagonale (valeur 2 en coin de case), cette case doit servir à porter la valeur décimale de la dimension : c'est la courbure de cette surface qui correspondra à cette valeur. Pour la dimension fractale « 0 », cette valeur décimale était seulement unidimensionnelle, pour la dimension fractale « 1 », la valeur décimale était le résultat de la combinaison de 2 dimensions, et pour la dimension fractale « 2 », cette valeur décimale est donc maintenant la combinaison de 3 dimensions : les 2 dimensions qu'il faut pour faire une surface, plus la valeur de la déformation de cette surface.

  Que l'unité de mesure de cette dimension soit une surface peut se comprendre de la façon suivante :
  Puisqu'il s'agit de mesurer la déformation d'un corps sur lui-même, cela implique que tous les points de ce corps se coordonnent de façon permanente entre eux pour échanger leurs places respectives, car, en effet, pendant toute la déformation, il faut qu'il n'y ait jamais deux points qui occupent le même emplacement, ce qui laisserait des trous aux endroits délaissés et occasionnerait des surdensités aux endroits suroccupés. Chaque point suit donc son propre trajet, ce qui correspond à une dimension 1, mais, en même temps, il doit jouer un rôle dans la dimension de densité du corps pour que cette densité reste constante, et l'on a vu qu'une dimension de densité est une dimension de contraste de type « 0 ». Chaque point est donc soumis à l'influence simultanée de 2 dimensions de types différents : une dimension de type « 1 » et une dimension de type « 0 ». Quand un point est soumis à la coordination de 2 dimensions similaires, cette coordination peut se résumer dans une seule dimension, de type « 1 », ainsi qu'on l'a vu à la ligne précédente, spécialisée dans la confrontation permanente de deux grandeurs, mais, quand chaque point est sous l'influence de deux dimensions de nature différente, cette différence de nature les empêche de se combiner, et l'évolution du point doit être simultanément décrit par ces deux dimensions. Deux dimensions, cela fait donc une surface, et c'est à décrire l'évolution de cette surface que doit servir une dimension fractale « 2 ».

- **dans la 2e case** de cette dimension, on trouve la dynamique d'évolution de cette surface. On a vu qu'il s'agit d'un « attracteur étrange » autosimilaire à lui-même à toutes les échelles *[chapitre 15 - l'exemple de l'attracteur de Hénon]*. La position de cette case dans la lecture diagonale du tableau (valeur 3 en coin) correspond à la synchronisation entre toutes les échelles, ce qui est bien cohérent avec la dynamique d'un attracteur étrange.

- e**n 3e case**, on trouve que cette dimension se manifeste par des valeurs statistiques et non par des valeurs continues. Chaque point obtenu est l'un des croisements des dimensions 0 et des dimensions 1 qui s'exercent en même temps pour faire la surface décrite en 1e case. Ces croisements ne peuvent pas être reliés en continus l'un l'autre, car cela voudrait dire que ces 2 dimensions 0 et 1, de nature différente, auraient trouvé une dimension de coordination commune, ce qui est impossible ou nous ramènerait à la dimension fractale de la ligne précédente.

Cette case doit porter la valeur du nombre entier de la dimension fractale : que chaque point soit le croisement de 2 courbes séparées correspond bien à la valeur « 2 » de cette dimension.
Au chapitre 9, on a dit que cette dimension sert à mesurer les phénomènes liés à la force nucléaire de cohérence de la matière, parce que les particules de matière sont fondamentalement des corps qui se déforment sur eux-mêmes.

– **dans la 4e case**, nous avons la façon dont nous apparaît la dimension. Ce qui nous apparaît est donc un corps qui se déforme sur lui-même par l'échange de position coordonnée de tous ses points. Dans la lecture diagonale du tableau (valeur 1 en coin), cette case est celle de la dimension complexe. Nous ne connaissons pas assez la mathématique des nombres complexes pour interpréter cette case.

La 4e et dernière ligne correspond aux dimensions fractales qui ont 3 pour partie entière et qui sont les dimensions usuelles de l'espace-temps

- **dans sa 1e case**, nous avons mis l'état « de ce qui sert à la mesurer » : c'est un volume d'espace. Comme il intègre les 3 dimensions des lignes précédentes, il doit être muni de 3 courbes pour correspondre au croisement de 3 dimensions de natures différentes et impossibles à combiner entre elles. Cette case étant celle de la dimension d'autosimilarité d'échelle, aussi bien dans le sens diagonal (valeur 3 en coin de case) que dans le sens vertical de lecture du tableau, ses courbes doivent être autosimilaires, ce qui ne s'obtient que si elles sont droites, ont même origine, et ont même unité de mesure.

- **dans la 2e case**, nous avons la dynamique de ce repère 3 D. Cette dynamique consiste à repositionner en permanence tous les points à la même place par rapport au point qui sert d'origine. L'absence de mouvement qui en résulte n'est pas due à l'absence réelle de mouvement, mais à la combinaison complexe du mouvement dans les 3 directions de l'espace, de telle sorte que, en permanence, ces mouvements se neutralisent exactement les uns les autres. La fixité qui en résulte est donc due à une coordination dans 3 dimensions distinctes, c'est pourquoi « 3 » est la valeur entière de la dimension fractale qui exprime cette case.

- **dans la 3e case**, nous avons la dimension complexe sous laquelle doit se faire la mesure. L'essence de cette mesure est qu'elle se fait « d'un point à un autre », c'est-à-dire que l'on mesure la position de chaque point par rapport à l'origine.

Si l'on observe toute la 3e colonne en remontant, on voit que cette mesure se fait en augmentant chaque fois le nombre des dimensions des « instruments de mesure » :
- dans la dimension 3, donc, la mesure se fait à l'aide de points ;
- dans la dimension 2, juste au-dessus, la mesure se fait à l'aide de l'intersection de deux courbes ;
- dans la dimension 1, encore au-dessus, on l'a représentée avec des vecteurs qui occupent toutes les directions de l'espace, mais la valeur de ces vecteurs s'exprime finalement par la surface que forment leurs extrémités ;
- dans la dimension 0, enfin, c'est tout un volume que l'on doit comparer à un autre pour mesurer la proportion entre les deux. La proportion entre 2 surfaces ou entre 2 longueurs ne sont que des cas particuliers dans lesquels 1 ou 2 dimensions des volumes à comparer sont nulles.

Si l'on redescend cette 3e colonne, l'instrument de mesure se transforme donc de la manière suivante: des volumes, des surfaces, des trajets, des points.

La même évolution par gain, chaque fois, d'une dimension, se fait aussi pour les figures que l'on rencontre dans les autres colonnes.
- <u>dans la 1e colonne</u>, qui concerne « l'unité de mesure », on commence avec un point pour la dimension fractale 1, puis on passe à la courbe, puis à la surface, et enfin au volume.
- <u>dans la 2e colonne</u>, qui concerne la dynamique de l'unité de mesure, on commence par le point fixe avec la dimension 3, puis on continue avec la dimension 0 et la dynamique du

trajet continu (puisque le tableau se poursuit indéfiniment, en remettant à sa suite les lignes précédentes), ensuite, vient la dimension 1 et la coordination de 2 dimensions qui a valeur de surface constante, puis la dimension 2 où l'on trouve l'attracteur étrange dont on a vu, par l'exemple du robinet qui goutte, qu'il se construit en groupant des coordonnées par 3.
Cela implique qu'un attracteur étrange est donc une figure qui a valeur de volume, et que son unité élémentaire est donc une surface.

– la 4e colonne concerne la façon dont la dimension apparaît finalement sous la forme du phénomène que l'on observe. On y retrouve aussi une progression de ligne à ligne, mais cette fois cette progression a un caractère plus abstrait, car l'on y trouve l'essence de ce que l'on a désigné par « les dimensions selon l'univers ».
Cette notion des 4 dimensions selon l'univers *[2e colonne, avant les 4 colonnes, proprement dites, du tableau]* se réfère aux 4 stades successifs par lesquels passe tout phénomène naturel qui se complexifie, tels qu'ils sont décrits de façon résumée au chapitre 1.2 de la 1e partie (Présentation de l'hypothèse) de l'essai « En attendant le Boson de Higgs ». L'essence de ces dimensions selon l'univers est qu'elles ne constituent pas seulement la combinaison d'un nombre de plus en plus grand de dimensions : en naissant, chacune opère une véritable mutation de nature qui la différencie radicalement des autres. On va voir que la valeur des dimensions fractales correspond à la valeur des « dimensions selon l'univers » qui « font la même chose », ce qui est d'autant plus remarquable que chaque case du tableau des dimensions fractales est décalée d'une dimension, si on la compare à celle du tableau des dimensions selon l'univers.

Dans cette 4e colonne :

- la dimension fractale 0 mesure une certaine densité de mutation. Par exemple, elle peut mesurer dans quelle proportion un solide se métamorphose en liquide, ce qui correspond à l'ultime étape de la dimension 0 selon l'univers, celle que l'on a définie comme étant la dimension des « points séparés » *[chapitre 2-4, à la 4e étape du cycle de formation de la matière]*.
- la dimension fractale 1 correspond à un mouvement qui fait s'écarter un point dans toutes les directions de l'espace, et qui peut le faire éventuellement errer sans jamais le faire revenir à l'une de ses anciennes positions. Par exemple, lorsqu'elle a la valeur maximale de 1,999999... cette dimension mesure la dispersion complète d'un gaz dans l'air d'une pièce sous l'effet du mouvement brownien de ses molécules *[dernier croquis du chapitre 11, et chapitre 2-5, à la 5e étape du cycle de formation de la matière]*. Cette dimension fractale est équivalente à la dimension 1 selon l'univers, c'est-à-dire à la dimension que l'on a appelée « du classement », lequel classement culmine dans l'organisation en spirale ou en hélice d'hélice qui parvient à réguler la dispersion dans l'espace de façon similaire sur toutes les échelles *[chapitre 2-8, à la 8e étape du cycle de formation de la matière]*.
- la dimension fractale 2 correspond à la déformation interne d'un corps. Elle est équivalente à la dimension 2 selon l'univers qui organise le mouvement en cycles fermés *[chapitres 2-10 et 2-11, aux 10e et 12e étapes du cycle de formation de la matière]*. La dimension selon l'univers fait donc très exactement la même chose que la dimension fractale qui lui correspond.
- la dimension fractale 3 correspond à « l'espace-temps traditionnel ». Il nous reste à en voir la 4e case sous laquelle cette dimension nous apparaît.

- **dans la 4e case**, nous retrouvons l'espace-temps traditionnel.
  Nous n'avons pas besoin d'innover, nous l'illustrons comme la tradition : un point qui se déplace forme une droite qui se déplace pour former un plan qui se déplace pour former un volume. Dans le sens diagonal (valeur 2 en coin de case), cette case correspond à la valeur décimale de cette dimension. Cette valeur décimale dépend de la vitesse relative avec laquelle ces 3 déplacements s'effectuent.
  On remarque que l'espace-temps obtenu par construction d'une droite, puis d'une surface, puis d'un volume, ne changera pas si l'on se sert d'un autre de ces 3 axes pour servir de 1e droite par laquelle débute la construction : l'ordre des 3 déplacements qui génèrent le volume est permutable. Les 3 dimensions sont donc devenues similaires entre elles, et cela à toutes les échelles. Dans sa signification de « dimension selon l'univers » *[voir plus haut]*, la dimension 3 correspond aussi à l'interférence autosimilaire des 3 premières.
  Nous trouvons donc, dans la signification de la dimension fractale 3, la réconciliation enfin obtenue des 3 premières dimensions fractales : elles y trouvent le moyen, enfin, de se combiner de telle façon qu'on ne peut plus différencier les 3 axes de l'espace, attribuer l'un ou l'autre spécialement à la dimension 0 ou à la dimension 1 ou à la dimension 2.

À l'issue de toutes ces réflexions, la conception traditionnelle de mesure de l'espace par 3 axes orthogonaux gradués nous apparaît donc comme une méthode parmi quatre méthodes, radicalement différentes l'une de l'autre, pour mesurer les phénomènes, quatre méthodes complémentaires l'une de l'autre, et, en définitive, toutes contenues les unes dans les autres.
Ce que l'on a donc découvert, c'est qu'une dimension n'est rien d'autre, au fond, que l'une des 4 façons possibles de combiner entre elles 4 dimensions, l'une des 4 façons possibles de faire permuter leurs rôles complémentaires.
L'intérêt que peut présenter ce tableau serait d'aider à comprendre comment mesurer de façon « non probabiliste » les dimensions fractales 2.
De façon générale, l'idée serait de penser comment chaque dimension est la « dérivée » de la dimension juste au dessus et sert de « primitive » à la dimension juste en dessous.
L'introduction des dérivées par Newton et Leibniz a été, en effet, l'instrument mathématique qui a permis tous les développements du calcul scientifique depuis le XVIIème siècle.
Aujourd'hui, on considère toujours qu'une dérivée est le changement instantané que subit la direction d'une courbe : elle serait la limite de ce changement, lorsque la durée de temps tend vers 0. Malgré l'efficacité de cette conception, il était malcommode de penser qu'un changement pouvait être véritablement réalisé en un temps nul : dans un temps nul, un changement ne peut qu'être nul.
Notre hypothèse, qui propose que les dimensions soient fondamentalement des déformations, ne rencontre pas cette anomalie : comme nous considérons qu'un trajet est fondamentalement la coordination de 2 déformations, nous pouvons très bien arrêter l'une des déformations en la rendant nulle, et de mesurer alors l'autre déformation qui n'a pas de raison spéciale d'être simultanément nulle. Dans notre hypothèse, c'est cette valeur que prend l'une des déformations d'un trajet, lorsque sa déformation associée s'annule, que nous appelons « dérivée ».
La dynamique des dimensions 2 présente un caractère « volumique » qui provoque son caractère statistique, car on ne peut pas calculer les côtés d'un parallélépipède si l'on n'en connaît que le volume. Peut-être l'analyse de ce tableau permettra-t-elle à quelqu'un de trouver comment trouver l'évolution de la surface d'une des faces de ce parallélépipède, et de connaître, ainsi, de façon absolue, la longueur de ses arêtes ?

ÉPILOGUE

D'abord dans l'essai « l'adieu au big-bang », puis dans l'essai « en attendant le Boson de Higgs », est longuement décrite l'hypothèse d'une évolution des ondes d'espace au fil du temps.
Le dernier tableau de ce présent texte sur les dimensions des nombres se boucle sur la notion d'espace-temps.
Peut-on maintenant proposer une façon de penser le temps par rapport à l'espace, et de ramener ainsi la naissance du temps à la synchronisation des ondes d'espace qui marqua, comme on l'a supposé, le début de l'univers sous son aspect actuel ? Certainement.
Selon notre hypothèse, le temps apparaît clairement, en effet, comme la dimension même d'autosimilarité que se sont trouvé les trois dimensions de l'espace, c'est-à-dire comme la 4e dimension qui naît toujours *[chapitre 14]* pour correspondre à l'interférence de 3 premières dimensions lorsqu'elles ont réussi à se coordonner à toutes les échelles de l'espace à la fois.

Toujours, on l'a donc proposé dans les essais cités plus haut, les ondes d'espace complexifieraient leurs déformations de façon irréversible.
À la conception habituelle qui veut que tout ce qui se passe dans l'espace soit réversible et que le temps, lui, file irrésistiblement, nous opposons donc une hypothèse où l'espace se transforme irrésistiblement et où l'on nomme temps ce changement continuel et toujours similaire à lui-même.

L'espace nous file entre les doigts.
Le temps est la mesure cette glissade.

Texte rédigé en 1993
Relecture complète et dernières mises à jour de détail et de présentation : 14 février 2010

Il est rappelé que ce texte reprend le chapitre 4 du livre « l'adieu au big-bang »,
et qu'il est aussi disponible en format html, décomposé en 14 parties accessibles depuis le site Quatuor à l'adresse :
http://www.quatuor.org/Math.htm