L1 SVT Majeure STU – Année 2005-2006

Cycles externes – Atmosphère

—

TD no.1 – Correction Exercice no.4

4 Détente adiabatique – Notion de température potentielle

4.1 Loi de Laplace pour la température

L'équation d'état du gaz parfait s'écrit $P_0V_0 = nRT_0$ pour l'état initial, $PV = nRT$ pour l'état final. On en tire

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}\ ,\ V = \frac{nRT}{P}.$$

On substitue ces expressions de V_0 et V dans l'expression de la loi de Laplace, d'où

$$P_0\left(\frac{T_0}{P_0}\right)^\gamma = P\left(\frac{T}{P}\right)^\gamma$$

en ayant simplifié par le facteur commun $(nR)^\gamma$, soit encore

$$P_0^{1-\gamma}T_0^\gamma = P^{1-\gamma}T^\gamma,$$

et finalement

$$\boxed{T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

L'exposant $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ vaut $\frac{2}{7} \simeq 0.29$ avec $\gamma = \frac{7}{5}$.

Pour une détente, $P < P_0$ et donc $T < T_0$.

4.2 Température potentielle

Supposons que l'état initial soit à la pression de référence. La température potentielle θ est alors simplement la température T_0 de l'expression précédente, soit finalement

$$\boxed{\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{2}{7}}}$$

4.3 Gradient vertical adiabatique

4.3.1 L'équation précédente peut se réécrire :

$$T = \theta\left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha.$$

Pour connaître la variation de T avec l'altitude z, il est naturel de dériver la dernière expression de T par rapport à z, dans laquelle θ et P sont a priori des fonctions de z :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}\cdot\left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha + \theta\cdot\alpha\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{P_0}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}.$$

L'ascension est supposée adiabatique, donc la température potentielle θ va rester constante et par conséquent $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}z = 0$. En outre il faut remarquer que

$$\theta\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{P_0} = \underbrace{\theta\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha}}_{=T}\cdot\frac{\cancel{P_0}}{P}\cdot\frac{1}{\cancel{P_0}} = \frac{T}{P}.$$

Finalement on obtient

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{(\theta=cte)} = \alpha\frac{T}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}}$$

4.3.2 En remplaçant l'expression de $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z$ donnée par la relation de l'hydrostatique dans l'expression ci-dessus, il vient

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{(\theta=cte)} = -\alpha\frac{T}{P}\rho g.$$

Cette relation est valable à toute altitude z, donc en particulier en $z = 0$ où $T = T_0\ (= \theta)$ et $P = P_0$, d'où le résultat demandé :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{\theta=cte}(z=0) = -\alpha\rho g\frac{T_0}{P_0}}$$

Application numérique avec $P_0 = 1000$ hPa, $T_0 = +15$ °C, $g = 9.8$ m/ s^2 et $\rho = 1.2$ kg/m^3 :

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{\theta=cte}(z=0) = -9.7\,10^{-3}\ \mathrm{K/m} = -9.7°\mathrm{C/km}.$$

4.3.3 Cette dérivée (= taux de variation local) est supposée constante sur toute la profondeur Δz. On peut alors écrire

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=0)$$

où ΔT est la variation de température sur la profondeur Δz. Avec $\Delta z = 1$ km, on a alors

$$\boxed{\Delta T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=0)\cdot\Delta z = -9.7°\mathrm{C}}$$

Remarque
En réalité, la masse d'air ascendante va la plupart du temps emporter de la vapeur d'eau avec elle. Si l'ascension est assez profonde, l'air va suffisamment se refroidir pour provoquer la condensation progressive de la vapeur d'eau entraînée (formation d'un nuage). La condensation va bien sûr être accompagnée d'un dégagement de chaleur latente qui va modérer le refroidissement de l'air. En présence de condensation, le refroidissement sera donc plus lent, de seulement -6.5°C/km. (On dit alors que l'air suit une "adiabatique humide".) Comme l'ascension de masses d'air nuages est un phénomène très fréquent dans la troposphère, c'est cette dernière valeur qui va en fin de compte caractériser la décroissance moyenne de la température avec l'altitude dans la troposphère.