manuscripta math. 98, 349 – 362 (1999)

Abdelhak Abouqateb

Courants invariants par une action propre

Received: 8 June 1998 / Revised version: 22 September 1998

Abstract The purpose of this paper is to characterise the invariant sections-distributions by a proper action. More precisely, we show that if G is a connected Lie group acting on a differentiable vector bundle $E \to V$ such that the induced action on V is proper, then the topological vector space $(C_c^\infty(E))'_G$ of the G-invariant linear functionals (on the space $C_c^\infty(E)$ of C^∞ sections with compact support) equipped with the induced weak-topology (resp. the strong-topology), is isomorphic to the weak (resp. strong) topological dual of the space $\overline{C}_G^\infty(E)$ (of all G-invariant sections σ with compact quotient $\mathrm{supp}(\sigma)/G$) equipped with a suitable topology; this coincides with the usual C^∞-topology if the orbit space is compact, and with the Schwartz-topology if the group G is compact.

1. Introduction

Le problème de déterminer les distributions invariantes sur un espace vectoriel par un groupe de matrices a été étudié par divers auteurs : Methée [Me], de Rham [Rh], Gärding [Ga], Tengstrand [Te], Zhu [Zh], etc. Les travaux de Ziemian [Zi], Herz [He] et Barra [Ba], portent sur les distributions invariantes sur une variété différentiable par un groupe de Lie connexe. Dans [Ek], El Kacimi détermine explicitement l'espace des courants invariants par une action localement libre du groupe affine préservant un volume continu sur une 3-variété compacte à groupe fondamental résoluble. Dans [He] (théorème 3), Herz donne, dans le cas d'une action propre d'un groupe de Lie connexe sur une variété différentiable, une caractérisation de l'espace des fonctions divergences (c'est-à-dire le sous-espace vectoriel topologique de l'espace de Schwartz engendré par les fonctions $X.f$ où f est une fonction différentiable à support compact et X un champ fondamental). Les sections-distributions étant des fonctionnelles plus générales que les distributions et les courants, nous nous proposons dans ce travail, de généraliser d'une part le théorème de Herz aux sections-distributions d'un fibré vectoriel muni d'un groupe d'automorphismes dont l'action sur la base

A. Abouqateb: Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université Cadi Ayyad, B.P. 618, Guéliz, Marrakech, Maroc. e-mail: fstg@cybernet.net.ma

Mathematics Subject Classification (1991): 58A25, 58E40

est propre, et d'autre part de *caractériser l'espace vectoriel topologique des sections-distributions invariantes*.

Le cas où le groupe opérant est discret a été implicitement étudié pour les courants dans [EMM].

Notre intêret portera donc sur les actions différentiables de groupes de Lie (connexes) sur les fibrés vectoriels. Sauf mention expresse du contraire ou précision, toutes les structures considérées dans ce papier (variétés, fibrés vectoriels, fonctions, formes différentielles, sections ...) seront supposées être de classe C^∞.

2. Préliminaires

Soient G un groupe topologique et V un espace topologique. On appelle *action* de G sur V toute application $\varphi : (g,x) \in G \times V \longrightarrow gx \in V$ telle que : (1) $\varphi(e,x) = x$ pour tout $x \in V$ (e étant l'élément neutre de G); (2) $\varphi(g', \varphi(g,x)) = \varphi(g'g,x)$ pour tout $x \in V$ et tous $g, g' \in G$. L'action de G sur V est dite **propre** si pour tout compact C de V l'ensemble $\{g \in G \ / \ gC \cap C \neq \emptyset\}$ est compact (cf. [Pa]) ; cela signifie aussi que pour tout compact C de V l'application $(g,x) \to gx$ de $G \times C$ dans V est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact de V est un compact de $G \times C$), ou encore l'ensemble $\{g \in G \ / \ gC_1 \cap C_2 \neq \emptyset\}$ est compact pour tout couple de compacts C_1 et C_2 de V.

Lorsque G est un groupe de Lie, V une variété et l'application φ ci-dessus est différentiable, on dira que l'action est différentiable ; V sera dite **G-variété propre** si l'action est en plus propre.

Exemples-Remarques. i) Soient G un sous-groupe fermé d'un groupe topologique H ; alors la translation à gauche (ou à droite) sur H par les éléments de G définit une action propre de G sur H, plus généralement si K est un sous groupe compact de H, alors l'action homogène naturelle de G sur H/K est propre. Lorsque K n'est plus compact mais que l'espace homogène H/K est du type réductif (cf. [KoT]), T. Kobayashi a donné un critère (et des exemples) pour que l'action homogène d'un sous-groupe réductif G sur H/K soit propre. Une extension de cette étude en a été donnée récemment par Benoist ([Be]).

ii) Soit G un sous-groupe fermé du groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ des isométries du demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$; alors l'action de G sur $\mathcal{H}$ est propre. Plus généralement, soit G est un groupe de Lie opérant par isométries sur une variété riemannienne V telle que l'action soit effective (i.e. $gx = x$ pour tout $x \in V$ implique $g = e$) ; s'il existe un point x dans V tel que le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G \ / \ gx = x\}$ soit compact et que l'orbite $Gx = \{gx \ / \ g \in G\}$ soit fermé dans V, alors l'action de G sur V est propre (voir [Ku] p. 43) ; et c'est bien sûr le cas si $G = Iso(V)$ est le groupe des isométries tout entier (cf. par exemple [Hel]).

$iii)$ Soient D un domaine borné (de frontière assez régulière) de $\mathbb{C}^n$ et $\mathrm{Aut}(D)$ le groupe des transformations biholomorphes de D muni de la topologie C^0 usuelle. Alors tout sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(D)$ est un groupe de Lie qui opère proprement sur D ([Na] [Ro] [Wo]). Signalons que le groupe des transformations biholomorphes d'une variété analytique complexe n'est pas toujours un groupe de Lie (cf. par exemple [KoS]).

$iv)$ Si G est compact, toute action topologique de G sur V est propre. Si V est compact, seuls les groupes compacts opèrent de façon propre sur V. On en déduit évidemment que si l'action d'un groupe G non compact sur V est propre, alors il n'existe pas de partie de V qui soit compacte et G-stable par l'action. Pour tout compact A de V, l'ensemble G-stable $GA = \{gx \ / \ g \in G\ ,\ \ x \in A\}$ est le saturé de A ; il est facile de voir que ce saturé est un fermé de V chaque fois que l'action est propre.

$v)$ Soit G un groupe de Lie tel que tous ses sous-groupes compacts soient finis ; c'est par exemple le cas du groupe des transformations affines de la droite réelle. Alors toute action propre de G sur V est localement libre (i.e. pour tout x dans V, le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G \ / \ gx = x\}$ est fini), et par suite sur toute G-variété propre V, les orbites Gx de l'action définissent un feuilletage sur la variété V.

Soit $E \overset{\pi}{\to} V$ un fibré vectoriel C^∞ (réel ou complexe) au-dessus d'une variété différentiable de dimension N. Désignons par $C^\infty(E)$ l'espace de toutes les sections C^∞ muni de la topologie C^∞ (cf. par exemple [Di], p. 229), celle-ci en fait un espace de Fréchet (i.e. espace vectoriel topologique localement convexe séparé métrisable et complet). $C_c^\infty(E)$ désignera l'espace des sections C^∞ à support compact muni de sa topologie usuelle (de Schwartz) : une suite (σ_n) converge pour cette topologie vers σ si, et seulement si, il existe un compact A de V tel que $\mathrm{supp}(\sigma) \subset A,\ \mathrm{supp}(\sigma_n) \subset A$ pour tout n, et $\sigma_n \to \sigma$ au sens de la topologie C^∞. Il s'agit en fait d'une topologie limite inductive stricte d'espaces de Fréchet, qui est plus fine que la topologie C^∞ et fait de $C_c^\infty(E)$ un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet (non métrisable en général) souvent appelé espace L.F. (Pour la notion de limite inductive, voir par exemple [Kö]).

Une forme linéaire continue sur $C_c^\infty(E)$ est dite **section-distribution** du fibré $E \overset{\pi}{\to} V$. Dans le cas particulier du fibré vectoriel $\Lambda^{N-p}T^*(V)$ (produit extérieur $(N-p)$-fois du fibré cotangeant $T^*(V)$ à la variété V), on obtient la notion de p-**courant** (de de Rham) sur la variété V (ou **distribution** (de Schwartz) sur V en prenant le fibré trivial $E = V \times \mathbb{R}$) : on note $\Omega_c^{N-p}(V)$ l'espace des $N-p$-formes différentielles à support compact ; un élément T

du dual topologique $C^p(V)$ de $\Omega_c^{N-p}(V)$ est appelé p-courant (ou courant de degré p) sur V ; l'évaluation de T sur ω sera noté $< T, \omega >$.

Soit donc $E \stackrel{\pi}{\to} V$ un fibré vectoriel C^∞ et soit G un groupe de Lie opérant différentiablement sur l'espace total E en envoyant fibre vectorielle sur fibre vectorielle par des isomorphismes linéaires ; naturellement une action de G sur V en est alors induite de façon que la projection π soit G-équivariante (i.e on a une représentation de G dans le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(E)$ du fibré). Désormais $E \stackrel{\pi}{\to} V$ sera un tel fibré qu'on appellera alors un G-**fibré vectoriel**, ou encore G-**fibré vectoriel propre** lorsque l'action induite de G sur la base V est propre. De manière naturelle une action induite de G sur $C_c^\infty(E)$ (et sur $C^\infty(E)$) est décrite comme suit : pour un élément g du groupe et une section σ du fibré, $g\sigma$ est la section donnée par :

$$(g\sigma)\ (x) = g\sigma(g^{-1}x) \qquad \forall x \in V$$

Si X_h désigne un champ fondamental sur V associé à un vecteur h dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, et $\sigma \in C^\infty(E)$, la dérivé de Lie $L_{X_h}\sigma$ de la section σ suivant le champ X_h est la section donnée par :

$$(L_{X_h}\ \sigma)\ (x) = \frac{d}{dt}\ |_{t=0}\ \ ((\exp th)\sigma)\ (x) \qquad \forall x \in V$$

Définition. *Une section σ est dite G-***semi-invariante** *(respectivement G-invariante) si pour tout $g \in G$ on a*

$$g\sigma = \triangle_G(g)\sigma \qquad (resp.\quad g\sigma = \sigma)$$

($\triangle_G(g) = d\acute{e}t\ \ Ad_G(g)$ étant la fonction modulaire du groupe de Lie G.
Ce qui est équivalent, si le groupe G est connexe, à
$L_{X_h}\sigma = (Tr\ ad_h)\sigma, \quad (resp.\quad L_{X_h}\sigma = 0)$
pour tout h dans l'algèbre Lie de G ; $Tr\ ad_h$ étant la trace de l'endomorphisme adjoint de $\mathcal{G}$ associé à h.

Remarquons que le support d'une section G-semi-invariante (ou G-invariante) est G-stable par l'action.

L'espace vectoriel de toutes les sections τ (qui sont C^∞ et non nécessairement à support compact) telles que $supp(\tau)$ soit G-stable par l'action et $supp(\tau)/G$ soit compact, sera désigné par $\overline{C}^\infty(E)$. Celui-ci coïncide avec $C^\infty(E)$ si l'espace des orbites V/G est compact, et n'est autre que $C_c^\infty(E)$ si le groupe G est compact.

Notons $\mathcal{B}$ la famille des sous-ensembles fermés B de V tels que B soit G-stable et B/G soit compact. Pour tout B dans cette famille, l'espace $C_B^\infty(E)$ des sections à support dans B, muni de la topologie C_B^∞ (:= celle induite par la topologie C^∞) est un espace de Fréchet (puisqu'il est fermé dans $C^\infty(E)$). On munira alors l'espace

$$\overline{C}^\infty(E) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} C_B^\infty(E)$$

de la topologie limite inductive stricte des topologies C_B^∞ ; on obtient ainsi un espace L.F. (c'est donc un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et complet $e.v.t.l.c.s.c.$) ; une suite $(\tau_n)_n$ dans $\overline{C}^\infty(E)$ converge vers τ si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $supp(\tau_n) \subset B$, $supp(\tau) \subset B$ et $\tau_n \to \tau$ au sens de la topologie C^∞.

Les espaces $\overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ et $\overline{C}_G^\infty(E)$ des sections τ respectivement G-semi-invariantes et G-invariantes telles que $supp(\tau)/G$ soit compact, seront munis de la topologie L.F. induite de celle de $\overline{C}^\infty(E)$, et seront par suite des $e.v.t.l.c.s.c.$.

Dans le cas particulièrement intéressant du G-fibré vectoriel $\Lambda^p T^*(V)$ (produit extérieur p-fois du fibré cotangeant), nous utiliserons la notation $\overline{\Omega}_{Gs}^p(V)$ (resp. $\overline{\Omega}_G^p(V)$). Un courant $T \in C^p(V)$ est alors dit G-invariants si, pour toute forme $\omega \in \Omega_c^{N-p}(V)$ et tout $g \in G$, on a $< T, g\omega >=< T, \omega >$ (où $g\omega$ désigne la transposée de la forme ω par le difféomorphisme associé à l'élément g). Le sous espace de $C^p(V)$ des p-courants G-invariants sur V sera désigné par $C_G^p(V)$.

L'objet de ce travail est de montrer les deux théorèmes ci-dessous.

Théorème 1. *Soit $E \overset{\pi}{\to} V$ un G-fibré vectoriel propre avec G connexe. Alors l'espace vectoriel topologique $(C_c^\infty(E))'_G$ des formes linéaires continues G-invariantes sur $C_c^\infty(E)$ muni de la topologie faible (resp. forte) est isomorphe au dual topologique faible (resp. fort) de $\overline{C}_G^\infty(E)$.*

Ce théoerème sera en fait un corollaire du théorème 2 ci-dessous, et du fait que pour un G-fibré propre, les espaces $\overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ et $\overline{C}_G^\infty(E)$ seront isomorphes ; nous exhiberons l'isomorphisme à l'aide de l'existence de "fonctions modulaires" sur une G-variété propre pour G connexe ; pour cela nous usons du théorème de "slice global" (version différentiable) de Abels ([Ab]).

Désormais $(E \overset{\pi}{\to} V)$ sera un G-fibré vectoriel propre et le groupe G est connexe. Pour tout $\sigma \in C_c^\infty(E)$ et pour tout $x \in V$, l'ensemble $\{g \in G \;/\; g^{-1}x \in \mathrm{supp}(\sigma)\}$ est alors un compact de G, à l'extérieur duquel l'application $g \longmapsto (g\sigma)(x)$ est nulle. D'où l'existence de l'intégrale $\int_G (g\sigma)(x)dg$ pour une mesure de Haar dg invariante à <u>droite</u> sur G. On obtient ainsi une application linéaire

$$\begin{aligned} m : C_c^\infty(E) &\longrightarrow C^\infty(E) \\ \sigma &\longmapsto m\sigma \end{aligned}$$

donnée par :

$$(m\sigma)(x) = \int_G (g\sigma)(x)dg \quad \text{pour} \quad x \in V.$$

Théorème 2. 1) a) *Image* $(m) = \overline{C}^{\infty}_{Gs}(E)$

b) *en tant qu'application de* $C^{\infty}_c(E)$ vers $\overline{C}^{\infty}_{Gs}(E)$, m *est continue et ouverte.*

2) *Le noyau* $\mathrm{Ker}(m)$ *est le sous-espace de* $C^{\infty}_c(E)$ *engendré par les éléments* $L_X\tau$ *où* X *est un champ fondamental et* $\tau \in C^{\infty}_c(E)$.

Remarques. 1) Dans le cas particulier du G-fibré vectoriel trivial $V \times \mathbb{R} \to V$ (où l'action est donnée par $g(x,t) = (gx,t)$ à partir d'une action différentiable de G sur V), l'assertion 2) du théorème 2 n'est alors rien d'autre que le théorème 3 de Herz [He].
2) Lorsque G est compact, et dg la mesure de Haar normalisée ($i.e.\ \int_G dg = 1$), l'application m devient en fait une rétraction de l'espace $C^{\infty}_c(E)$ sur le sous-espace des éléments G-invariants ([AE]); d'où le corollaire 2 ci-dessous.
3) Associé à une métrique riemannienne sur une variété V orientée de dimension N, l'opérateur $*$ de Hodge (cf. [Wa]) est en fait un isomorphisme d'e.v.t. entre les deux espaces de Schwartz $\Omega^p_c(V)$ et $\Omega^{N-p}_c(V)$, pour tout entier p. Lorsque V est une G-variété propre, on peut choisir une métrique riemannienne G-invariante (cf. [Pa], théorème 4.3.1.), l'opérateur $*$ de Hodge associé à une telle métrique serait donc G-équivariant. Nous obtenons ainsi que sur une G-variété propre, les espaces $C^p_G(V)$ et $C^{N-p}_G(V)$ (resp. $\overline{\Omega}^p_G(V)$ et $\overline{\Omega}^{N-p}_G(V)$) sont isomorphes. Comme conséquence du théorème 1, le corollaire 1 ci-dessous exprime une dualité entre les courants G-invariants et les formes G-invariantes sur une G-variété propre.

Corollaire 1. *Soit G un groupe de Lie connexe opérant différentiablement et proprement sur une variété différentiable V de dimension N. Alors*

a) *l'espace* $C^p_G(V)$ *des p-courants G-invariants sur V muni de la topologie faible (resp.forte) est isomorphe au dual topologique faible (resp. fort) de l'espace* $\overline{\Omega}^{N-p}_G(V)$.

b) *Si l'espace des orbites V/G est compact, alors l'espace des p-courants G-invariants sur V s'identifie au dual topologique de* $\Omega^{N-p}_G(V)$, *espace de toutes les $(N-p)$-formes G-invariantes sur V muni de la topologie* C^{∞}.

Corollaire 2. *Soient G un groupe de Lie compact connexe et $E \xrightarrow{\pi} V$ un G-fibré vectoriel. Désignons par F l'un des espaces $C^{\infty}_c(E)$ ou $C^{\infty}(E)$.*

Alors on la décomposition topologique

$$F = F_G \oplus L_G F$$

($L_G F$ étant le sous-espace de F engendré par les éléments $L_X \tau$ pour X champ fondamental et $\tau \in F$, F_G est le sous-espace de F des éléments G-invariants).

3. Démonstration du Théorème 2

3.1. Soit $\sigma \in C_c^\infty(V)$

Il est classique que si ω désigne une forme volume invariante à droite sur un groupe de Lie G, alors la translatée à gauche $L^*_{g^{-1}}\omega$ de ω par un élément $g^{-1} \in G$, est donnée par $L^*_{g^{-1}}\omega = (\triangle_G(g))\omega$. Le fait que $m\sigma$ soit G-semi-invariante en découlera alors immédiatement.

Désignons maintenant par A le support de σ, qui est un compact de V et posons $B = \mathrm{supp}(m\sigma)$. Il est clair que si $x \notin GA$ alors $(m\sigma)(x) = 0$; on déduit alors l'inclusion $B \subset GA$. La section $m\sigma$ étant G-semi-invariante, son support est G-stable, d'où l'égalité : $B = G(A \cap B)$, et par suite l'espace des orbites B/G n'est autre que l'image par la projection canonique $V \to V/G$ du compact $A \cap B$; donc B/G est compact.

L'espace $C_c^\infty(V)$ est un L.F., $\overline{C}^\infty_{Gs}(E)$ est un $e.v.t.l.c.$, et l'application $m : C_c^\infty(E) \to \overline{C}^\infty_{Gs}(E)$ est linéaire, la continuité séquentielle assurera alors la continuité. Prenons donc $(\sigma_n)_n$ une suite d'éléments de $C_c^\infty(E)$ convergeant vers 0 ; il existe alors un compact A de V tel que $\mathrm{supp}(\sigma_n) \subset A$ pour tout n. Soit ensuite C un compact de GA ; il s'agit d'établir que $m\sigma_n \to 0$ au sens de la topologie C^∞ sur C. Pour cela choisissons U un ouvert relativement compact tel que $A \subset U$. Les translatés $s^{-1}U$ de l'ouvert U pour $s \in G$, forment un recouvrement ouvert de C, on peut en extraire un sous recouvrement fini $C \subset \cup_{\text{finie}} s^{-1}U$. Or, pour tout n la restriction de la section $m\sigma_n$ à l'ouvert U est donnée par

$$(m\sigma_n)\,|_U \; = \int_{G_U} (g\sigma_n)\,|_U \; dg$$

avec $G_U = \left\{g \in G \;/\; g^{-1}\overline{U} \cap C \neq \emptyset\right\}$ qui est un compact puisque l'action est propre ; l'intégrale ci-dessus étant celle d'une fonction à valeurs vectorielles (cf. par exemple [Ru], p. 75.)

Et puisque $m\sigma_n$ est G-semi-invariante, sa restriction à $s^{-1}U$, pour $s \in G$, est alors donnée par :

$$(m\sigma_n)\,|_{s^{-1}U} \; = s^{-1}(\Delta_G(s) \int_{G_U} (g\sigma_n)\,|_U \; dg)$$

Or de la continuité de l'application :

$$\begin{array}{ccc} G_U \times C_c^\infty(E) & \to & C^\infty\left(E\,|_{s^{-1}U}\right) \\ (g,\sigma) & \mapsto & (g\sigma)\,|_U \end{array}$$

on déduit (puisque G_U est compact) que pour tout $s \in G$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} C_c^\infty(E) \to & & C^\infty\left(E\,|_{s^{-1}U}\right) \\ \sigma & \mapsto & s^{-1}(\Delta_G(s)\int_{G_U}(g\sigma)\,|_U\; dg) \end{array}$$

est continue. D'où : $m\sigma_n \to 0$ au sens de topologie C^∞ sur C (puisque C est recouvert par un nombre fini d'ouverts $s^{-1}U$).

Montrons l'inclusion de $\overline{C}^\infty_{Gs}(E)$ dans l'image de m.
Soit τ une section G-semi-invariante de support B tel que B/G soit compact. Il existe un compact A tel que $B = GA$. En effet : Soit $(V_i)_i$ un recouvrement localement fini de B par des ouverts relativement compacts ; on peut alors écrire $B/G = \cup_{j\in J}\, p(V_j)$ où J est un sous ensemble fini d'indices et $p : V \to V/G$ la projection canonique. Le compact $A = \cup_{j\in J}\overline{V_j}$ répond alors à la question.

Considérons ensuite une fonction C^∞ positive, $\psi : V \to \mathbb{R}$, à support compact telle que $\psi = 1$ sur A ; soit U un voisinage ouvert de A sur lequel ψ est strictement positive.

La section $\psi\tau$ est alors à support compact inclus dans GA ; de plus puisque τ est G-semi-invariante, il est facile de vérifier l'égalité :

$$m(\psi\tau) = (M_\psi)\tau$$

où $M_\psi : V \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par :

$$(M_\psi)(x) = \int_G \psi(g^{-1}x)\triangle_G(g)dg.$$

Pour tout $x \in U$, la fonction : $g \in G \mapsto \psi(g^{-1}x)$ est positive sur l'ouvert $\rho_x^{-1}(U)$ de G (avec $\rho_x : g \in G \mapsto (g^{-1}x) \in V$), on en déduit que : $(M_\psi)(x) > 0$ pour tout $x \in U$. De plus, il est facile de vérifier que M_ψ est une fonction G-invariante (i.e. $(M_\psi)(ax) = (M_\psi)(x) \;\; \forall a \in G, \;\; \forall x \in V$). D'où : M_ψ est strictement positive sur le saturé GU de l'ouvert U.

Considérons alors la section $J_A\tau$ donnée par :

$$(J_A\tau)(x) = \begin{cases} (\frac{\psi}{M_\psi}\tau)(x) & \text{si } x \in GU \\ \qquad o & \text{sinon} \end{cases} \qquad (*)$$

Cette section est bien définie sur l'ouvert GU de V, et nulle à l'extérieur du fermé GA de V (puisque $GA = \mathrm{supp}(\tau)$), donc $J_A\tau$ est une section C^∞, qui est clairement à support compact ($\mathrm{supp}(J_A\tau) \subset \mathrm{supp}(\psi)$).
On vérifie ensuite facilement l'égalité : $m(J_A\tau) = \tau$.

Ainsi $m : C_c^\infty(E) \to \overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ est surjective.

Montrons que cette application est ouverte. Pour cela, considérons $\overline{m}$ l'application linéaire continue et bijective induite naturellement de m par passage au quotient :

$$\overline{m} : C_c^\infty(E)/\ker(m) \to \overline{C}_{Gs}^\infty(E) \quad , \quad \overline{m}\,[\sigma] = m\sigma$$

($[\sigma]$ désigne la classe dans $C_c^\infty(E)/ker(m)$ de la section $\sigma \in C_c^\infty(E)$) ; et montrons que $\overline{m}$ est d'inverse continue. Puisque $\overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ est un espace L.F., il suffit alors de montrer que pour tout compact A de V, la restriction de $\overline{m}^{-1}$ à l'espace $C_{GA}^\infty(E)$ est continue. Or d'après ce qui précède, si l'on se fixe le choix d'une fonction C^∞ positive, $\psi : V \to \mathbb{R}$, à support compact telle que $\psi = 1$ sur A, on a :

$$\overline{m}^{-1}(\tau) = [J_A\tau] \quad , \quad \forall \tau \in C_{GA}^\infty(E)$$

où $J_A\tau$ est donnée par $(*)$.

Désignons ensuite par U_0 un ouvert relativement compact tel que $A \subset \overline{U_0} \subset U$ et soit $\varphi : V \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $\varphi = 1$ sur le fermé GA, et $\operatorname{supp}\varphi \subset G\overline{U_0}$. La fonction $f := \varphi\frac{\psi}{M\psi}$ est alors C^∞ sur la variété V toute entière ; et nous avons :

$$J_A\tau = f\tau \quad \forall \tau \in C_{GA}^\infty(E)\ .$$

La restriction de $\overline{m}^{-1}$ à l'espace $C_{GA}^\infty(E)$ est alors la composée de l'application $\tau \mapsto f\tau$ de $C_{GA}^\infty(E)$ dans $C_c^\infty(E)$ (qui est bien continue en vertu de la formule de Leibniz, comme dans [Di], p. 229) ; suivie de la projection canonique de $C_c^\infty(E)$ sur $C_c^\infty(E)/\ker m$. D'où : $\overline{m}^{-1}$ est continue.
Ceci achève la démonstration de 1.)

3.2. Soit $\tau \in C_c^\infty(E)$

L'intégration sur le groupe de Lie G étant faite par rapport à une mesure de Haar à droite, on en déduit que $m(s\tau) = m(\tau)$ pour tout $s \in G$.

D'où : $m(L_X\tau) = 0$ pour tout champ fondamental X.

Réciproquement, soit $\sigma \in C_c^\infty(E)$ telle que $m\sigma = 0$. Pour toute fonction $\psi : V \to \mathbb{R}$, l'application $\Phi : G \times V \to E$ donnée par : $\Phi(g, x) = \psi(x)g\sigma(g^{-1}x)$ pour $g \in G$ $x \in V$, satisfait aux hypothèses du lemme ci-dessous.

Lemme. *Soit $\Phi : G \times V \to E$ une application différentiable telle que :*

i) $\forall g \in G,\ \Phi(g, .) \in C_c^\infty(E)$.

ii) $\forall x \in V$, *l'application $\Phi(., x) : g \mapsto \Phi(g, x)$ est nulle à l'extérieur d'un compact.*

iii) *la section* $J\Phi : x \mapsto \int_G \Phi(g,x)dg$*, est nulle.*

Alors il existe une famille finie d'applications différentiables $\Phi_j : G \times V \to E$ *telles que :*

$$\Phi = \sum_j L_{\overline{Z}j}\Phi_j$$

où :

a) $(Z_j)_j$ *désigne une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur* G, $(L_{\overline{Z}j}\Phi_j)(g,x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Phi_j(g \exp tZ_j, x)$ *;*

b) *pour tout* j *il existe* K_j *un compact de* V *tel que pour tout* $g \in G$*, la section* $\Phi_j(g,.) : x \mapsto \Phi_j(g,x)$ *est à support dans* K_j*.*

Démonstration du lemme. Soit $(V_i)_i$ un recouvrement localement fini de V par des ouverts contractiles et relativement compacts, et soit $(p_i)_i$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Posons $K_i := \mathrm{supp}(p_i)$ et $\Phi_i(g,x) := p_i(x)\,\Phi(g,x)$.

On a alors

$$\Phi = \sum_i \Phi_i\ , \quad \mathrm{supp}\,\Phi_i \subset G \times K_i \quad \text{et}$$

$$J\Phi_i(x) = \int_G \Phi_i(g,x)\,dg = p_i(x)\int_G \Phi(g,x)\,dg = 0.$$

Au-dessus de V_i le fibré vectoriel $E_{V_i} = \pi^{-1}(V_i) \xrightarrow{\pi} V_i$ est trivial ; il existe donc une base $\left\{\Phi_i^1, \ldots, \Phi_i^r\right\}$ du $C^\infty(V_i)$-module $C^\infty(E_{V_i})$ des sections de E au-dessus de V_i. On peut ainsi écrire :

$$\Phi_i(g,x) = \sum_{j=1}^r f_i^j(g,x)\Phi_i^j(x)$$

D'où : $\int_G f_i^j(g,x)dg = 0$ pour tout $x \in V_i$, pour tout $j = 1, \ldots, r$.

En utilisant ensuite le théorème 3.2 [Ha] on peut en déduire pour tout i et j l'existence d'une famille finie de fonctions (f_i^{jk}) sur $G \times V_i$ (à support dans $G \times K_i$) telle que :

$$f_i^j = \sum_k \overline{Z}_k f_i^{jk}$$

(où : $\overline{Z}_k$ est le champ de vecteurs sur $G \times V_i$ donné par $\overline{Z}_k(g,x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (g\exp tZ_k, x)$; et pour tout $x \in V_i$, les fonctions $f_i^{jk}(.,x)$ sont à support compact). D'où :

$$\Phi_i = \sum_{j,k}(\overline{Z}_k f_i^{jk})\Phi_i^j$$

Soit encore : $\Phi_i = \sum_{j,k} L_{\overline{Z}_k}\Phi_i^{jk}$ avec $\Phi_i^{jk} = f_i^{jk}\Phi_i^j$. On a ainsi : $\Phi = \sum_{i,j,k} L_{\overline{Z}_k}\Phi_i^{jk}$.

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Suite de la démonstration du théorème 2. Considérons une fonction C^∞ positive, $\psi : V \to \mathbb{R}$, à support compact telle que $\psi = 1$ sur $A := \operatorname{supp} \sigma$. En appliquant le lemme à l'application $\Phi : G \times V \to E$ donnée par $\Phi(g, x) = \psi(x) g\sigma(g^{-1}x)$, nous pouvons écrire :

$$\Phi = \sum_j L_{\overline{Z}_j} \Phi^j$$

Soit encore, pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in V$ on a :

$$g\psi(x)\sigma(g^{-1}x) = \sum_j \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Phi^j(g \exp tZ_j, x)$$

D'où : $\forall g \in G\ \ \forall x \in V$ on a :

$$\psi(gx)\sigma(x) = \sum_j \frac{d}{dt}|_{t=0}\ g^{-1}\Phi^j(g \exp tZ_j, gx).$$

En intégrant par rapport à la mesure de Haar dg, nous obtenons :

$$(\hat{\psi}\sigma)(x) = \sum_j \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_G g^{-1}\Phi^j(g \exp tZ_j, gx) dg.$$

(où $\hat{\psi} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par : $\hat{\psi}(x) = \int_G \psi(gx)dg$)
Soit encore, à cause de l'invariance à droite de dg :

$$(\hat{\psi}\sigma)(x) = \sum_j \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_G \exp(tZ_j) g^{-1}\Phi^j(g, g\exp(-tZ_j)x) dg.$$

En posant alors $\sigma_j(y) = \int_G g^{-1}\Phi^j(g, gy)dg$, nous obtenons ainsi, pour tout j, une section à support compact (toujours puisque l'action est propre), et nous avons :

$$(\hat{\psi}\sigma)(x) = \sum_j \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tZ_j)\sigma_j(\exp -tZ_j x)\ ,$$

c'est-à-dire on a l'égalité :

$$\hat{\psi}\sigma = \sum_j L_{\widetilde{Y}_j}\sigma_j$$

où $\widetilde{Y}_j$ désigne le champ de vecteurs fondamental sur V associé à l'élément $Y_j = -Z_j$.

La fonction différentiable $\hat{\psi}$ étant G-invariante et strictement positive sur le compact A, considérons alors une fonction différentiable $h : V \to \mathbb{R}$, G-invariante et telle que $h\hat{\psi} = 1$ sur A. Nous avons donc :

$$\sigma = \sum_j h L_{\widetilde{Y}_j}\sigma_j$$

Soit encore (puisque $L_{\widetilde{Y}_j} h = 0$ pour tout j) :

$$\sigma = \sum_j L_{\widetilde{Y}_j}(h\sigma_j)$$

4. Démonstration du Théorème 1

1^{ere} *étape.* Désignons par F le sous-espace vectoriel de $C_c^\infty(E)$ engendré par les éléments $L_X\sigma$ pour X champ fondamental et $\sigma \in C_c^\infty(E)$; comme conséquence du théorème 2, c'est un sous-espace vectoriel fermé. Le dual topologique faible (resp. fort) de l'e.v.t. quotient $C_c^\infty(E)/F$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel topologique $(C_c^\infty(E))'_G$ des formes linéaires continues G-invariantes (sur l'espace de Schwartz $C_c^\infty(E)$ des sections C^∞ à support compact) muni de la topologie induite faible (resp. forte).
D'autre part, d'après le théorème 2, l'application $\overline{m} : C_c^\infty(E)/F \to \overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques. Sa transposée :

$$\overline{m}^t : \left(\overline{C}_{Gs}^\infty(E)\right)' \to \left(C_c^\infty(E)/F\right)'$$

est alors un isomorphisme d'e.v.t. de $\left(\overline{C}_{Gs}^\infty(E)\right)'$ sur $\left(C_c^\infty(E)\right)'_G$.

2^{eme} *étape.* Il s'agit d'établir une identification entre $\overline{C}_{Gs}^\infty(E)$ et $\overline{C}_{G}^\infty(E)$.

Proposition 1. *Soit V une G-variété propre avec G connexe.*

Alors il existe une fonction différentiable $\triangle_V : V \to \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout g dans G et tout x dans V on a :

$$\triangle_V(gx) = \triangle_G(g)\triangle_V(x).$$

Démonstration de la proposition.

– Pour $V = G$ muni de sa translation à gauche, il suffit de prendre la fonction modulaire du groupe.
– Pour $V = G/K$ muni de l'action homogène classique (où K étant un compact maximal connexe de G) : à cause de la compacité et la connexité de K, la fonction modulaire du groupe G passe au quotient et nous donne $\triangle_{G/K}$.
– Le théorème de "slice global" de Abels [Ab] affirme l'existence d'une fonction différentiable G-équivariante de V vers G/K pour K compact maximal de G ; il suffit alors de prendre pour $\triangle_V$, la composée de cette application suivie de $\triangle_{G/K}$.

Il est ensuite facile d'obtenir :

Corollaire 3. *L'opérateur $L : \overline{C}_{Gs}^\infty(E) \to \overline{C}_{G}^\infty(E)$ donné par $L(\tau) = \triangle_V\tau$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.*

Remerciements. Une partie de ce travail a été réalisée lors d'un séjour à l'Université de Valenciennes. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à A. El Kacimi pour les discussions enrichissantes que nous avons eues, ainsi que pour les remarques qu'il m'a faites sur la version initiale du manuscrit.

Références

[AE] Abouqateb, A. et El Kacimi, A.: Quelques remarques sur les fonctionnelles invariantes et les courants basiques. Prépublication de l'Université de Valenciennes, 1998

[Ab] Abels, H.: Parallelizability of Proper actions, Global K-slices and Maximal Compact Subgroups. Math. Ann. **212**, 1–19 (1974)

[Ba] Barra, R.: Existence et support des distributions invariantes. Bull. Sc. math., série 2, **117**, 357–376 (1993)

[Be] Benoist, Y.: Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. Annals of Mathematics **144**, 315–347 (1996)

[Di] Dieudonné, J.: Cours d'analyse tome 3. Gautier-Villars

[Ek] El Kacimi, A.: Invariants de certaines actions de Lie. Instabilité du caractère Fredholm. Manuscripta Mathematica **74** Fasc 2, 143–160 (1992)

[EMM] El Kacimi, A., Matsumoto, S. and Moussa, T.: Currents invariant by Kleinian group. Hokkaido Mathematical Journal **26**, 177–202 (1997)

[Gä] Gärding, L.: Distributions invariantes. In: Seminaire Leray, 1961–62

[GHV] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R.: *Connections, curvature, and cohomology*. Vol. II. Academic Press, 1973

[Ha] Haefliger, A.: Some remarks on foliations with minimal leaves. J. of Diff. Geo. Vol. **15**, 269–284 (1980)

[He] Herz, C.S.: Functions which are divergences. A. J. M. **92**, 640–656 (1970)

[Hel] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*. Academic Press, 1978

[KoS] Kobayashi, S.: *Transformation groups in differential Geometry*. New York: Springer, 1972

[KoT] Kobayashi, T.: Proper action on a homogeneous space of reductive type. Math. Ann. **285**, 249–263 (1989)

[KO] Köthe, G.: *Topological Vector Spaces I*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1969

[Ku] Kulkarni, S.: Proper actions and Pseudo-Riemannian Space Forms. Advances in Mathematics **40**, 10–51 (1981)

[Na] Narasimhan, R.: *Several complex variables*. Chicago: The University of Chicago Press, 1971

[Me] Methée, P.D.: Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz. Comm. Math. Helv. Vol. **28**, 224–269 (1954)

[Pa] Palais, R.S.: On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. Annals of Mathematics. bf 73 No. 2, 1961

[Rh] De Rham, G.: *Variétés différentiables*. Paris: Hermann, 1960

[Ro] Rosay, J.P.: Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes. Ann. Inst. Fourier, **29** 4, 91–97 (1979)

[Ru] Rudin, W.: *Analyse fonctionnelle*. Ediscience, 1997

[Sc] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*. Paris: Hermann, 1966

[Tr] Trèves, F.: *Topological vector spaces, Distributions, and Kernels*. New York: Academic, 1967

[Wa] Warner, W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1971

[Wo] Wong, B.: Characterization of the Ball in $\mathbb{C}^n$ by its Automorphism Group. Inventiones math. **41**, 253–257 (1977)

[Zh] Zhu, C-B.: Invariant distributions of classical groups. Duke Mathematical Journal **65** No 1, (1992)

[Zi] Ziemian, B.: On G-invariant distributions. J. of Diff. Equations. **35** (1980)