

Le problème du grand angle !

AZIZ EL KACIMI

Université de Valenciennes

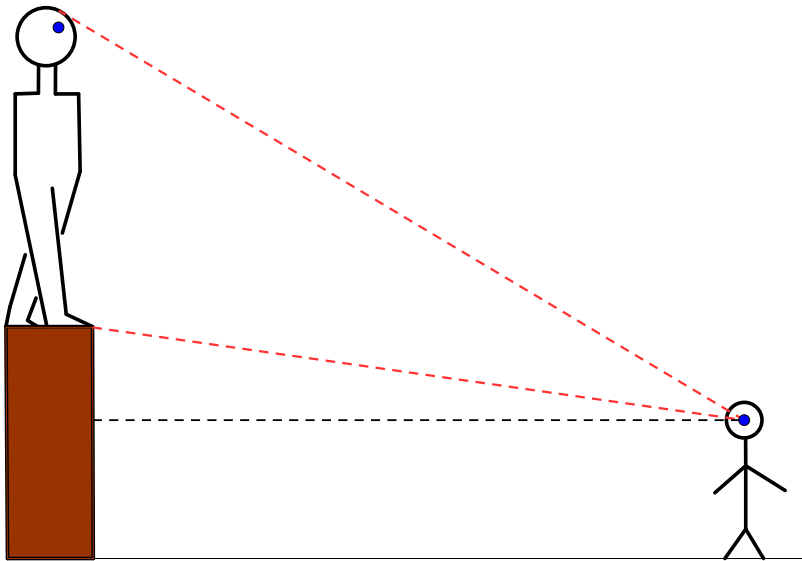
<http://perso.numericable.fr/azizelkacimi/>

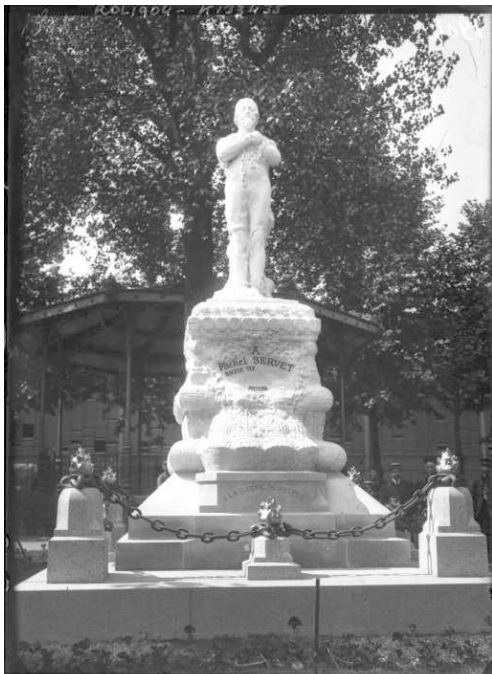
Atelier de géométrie plane

École Africaine de Mathématiques

Outils de topologie algébrique et géométrie

Du 25 juin au 7 juillet 2018







1. La grandeur du Maréchal Toto

La statue du Maréchal Toto est surélevée de façon à ce que ses pieds dépassent largement ma tête.

- 1 Je suis en face de cette statue et je marche dans sa direction.
- 2 De loin, elle me paraît petite. Mais au fur et à mesure que je m'en approche, elle grandit de plus en plus à mes yeux.
- 3 À une certaine distance, elle commence à me reparaître de plus en plus petite !

Quelle est ma position où je la vois la plus grande possible ?

1. La grandeur du Maréchal Toto

La statue du Maréchal Toto est surélevée de façon à ce que ses pieds dépassent largement ma tête.

- 1 Je suis en face de cette statue et je marche dans sa direction.
- 2 De loin, elle me paraît petite. Mais au fur et à mesure que je m'en approche, elle grandit de plus en plus à mes yeux.
- 3 À une certaine distance, elle commence à me reparaître de plus en plus petite !

Quelle est ma position où je la vois la plus grande possible ?

1. La grandeur du Maréchal Toto

La statue du Maréchal Toto est surélevée de façon à ce que ses pieds dépassent largement ma tête.

- 1 Je suis en face de cette statue et je marche dans sa direction.
- 2 De loin, elle me paraît petite. Mais au fur et à mesure que je m'en approche, elle grandit de plus en plus à mes yeux.
- 3 À une certaine distance, elle commence à me reparaître de plus en plus petite !

Quelle est ma position où je la vois la plus grande possible ?

1. La grandeur du Maréchal Toto

La statue du Maréchal Toto est surélevée de façon à ce que ses pieds dépassent largement ma tête.

- 1 Je suis en face de cette statue et je marche dans sa direction.
- 2 De loin, elle me paraît petite. Mais au fur et à mesure que je m'en approche, elle grandit de plus en plus à mes yeux.
- 3 À une certaine distance, elle commence à me paraître de plus en plus petite !

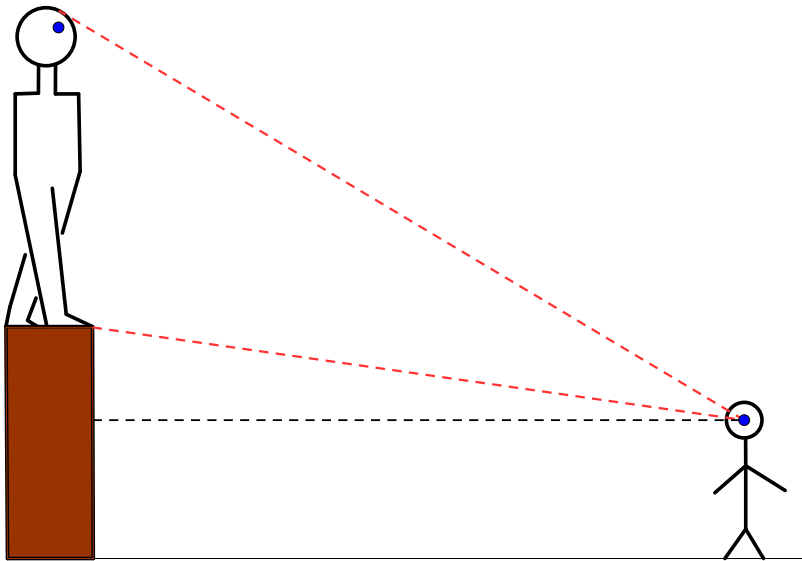
Quelle est ma position où je la vois la plus grande possible ?

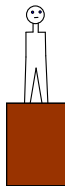
1. La grandeur du Maréchal Toto

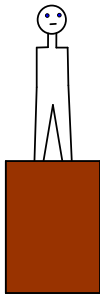
La statue du Maréchal Toto est surélevée de façon à ce que ses pieds dépassent largement ma tête.

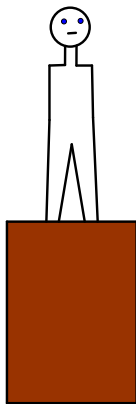
- 1 Je suis en face de cette statue et je marche dans sa direction.
- 2 De loin, elle me paraît petite. Mais au fur et à mesure que je m'en approche, elle grandit de plus en plus à mes yeux.
- 3 À une certaine distance, elle commence à me reparaître de plus en plus petite !

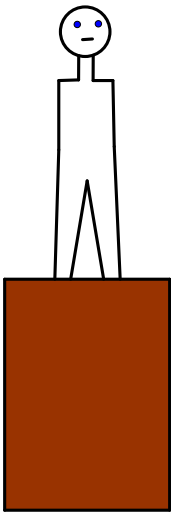
Quelle est ma position où je la vois la plus grande possible ?

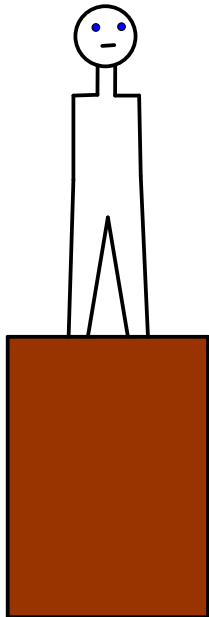












*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ① Mais l'apparence n'est pas la même.
- ② Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ③ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*

*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ❶ Mais l'apparence n'est pas la même.
- ❷ Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ❸ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*

*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ➊ Mais l'apparence n'est pas la même.
- ➋ Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ➌ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*

*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ➊ Mais l'apparence n'est pas la même.
- ➋ Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ➌ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*

*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ➊ Mais l'apparence n'est pas la même.
- ➋ Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ➌ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*

*La taille d'un objet est évidemment
indépendante de tout !*

- ➊ Mais l'apparence n'est pas la même.
- ➋ Elle dépend d'où on voit l'objet.
- ➌ Et sous quel angle.

*Ce sont ces paramètres que nous
allons examiner dans cet exercice.*

*Jetons d'abord un coup d'œil
sur les images qui suivent.*



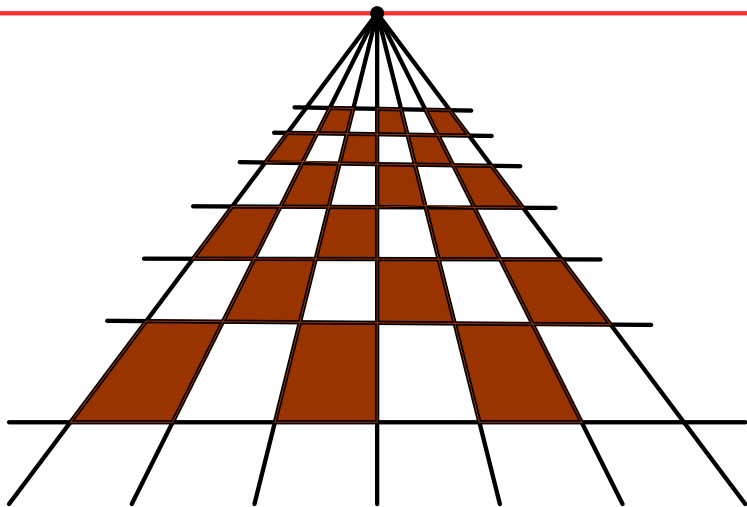


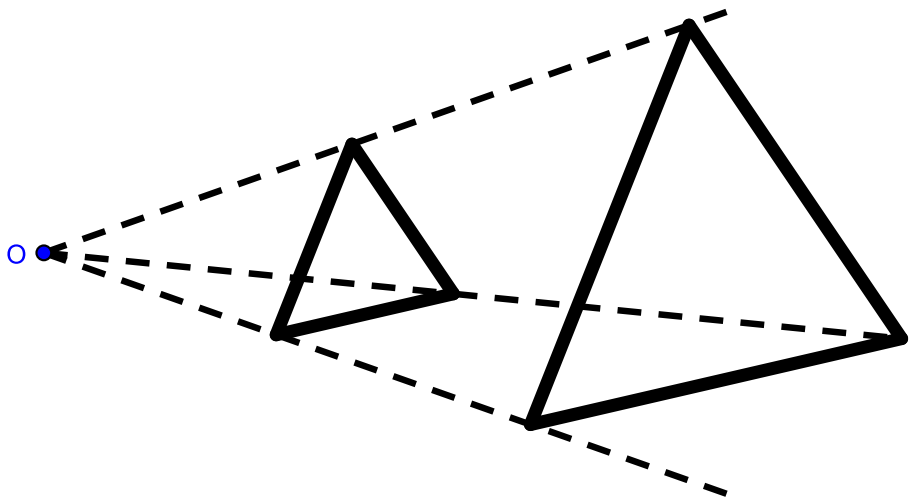


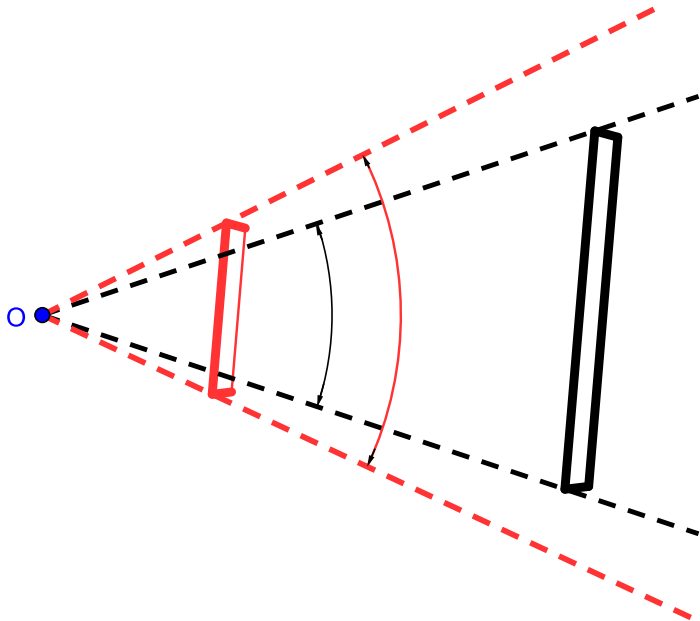


Ligne d'horizon

△



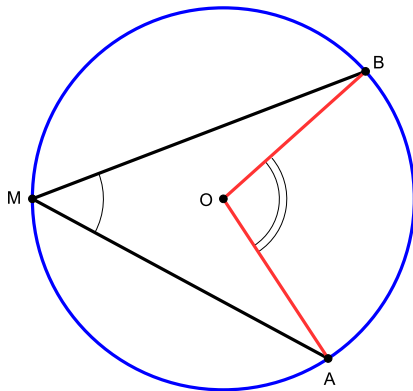




2. Cercle et angles

$\widehat{AMB} = \text{angle inscrit}$ et $\widehat{AOB} = \text{angle au centre}$.

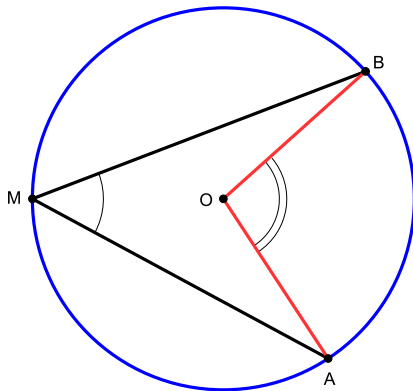
Ces deux angles interceptent le même arc d'extrémités A et B .

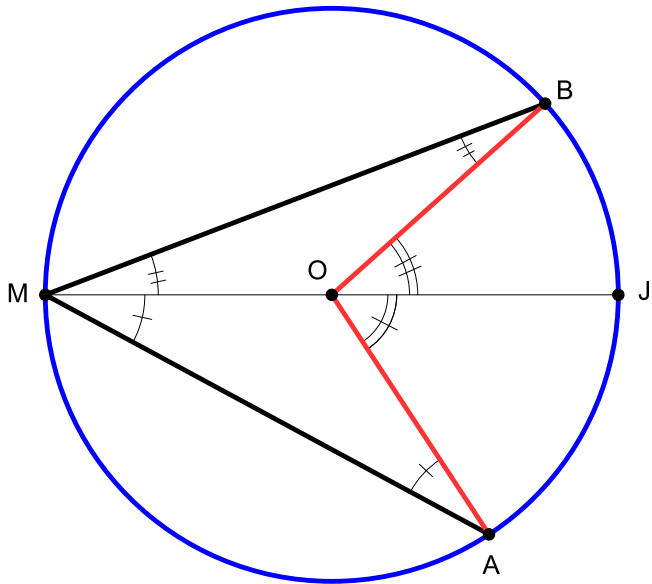


2. Cercle et angles

$\widehat{AMB} = \text{angle inscrit}$ et $\widehat{AOB} = \text{angle au centre}$.

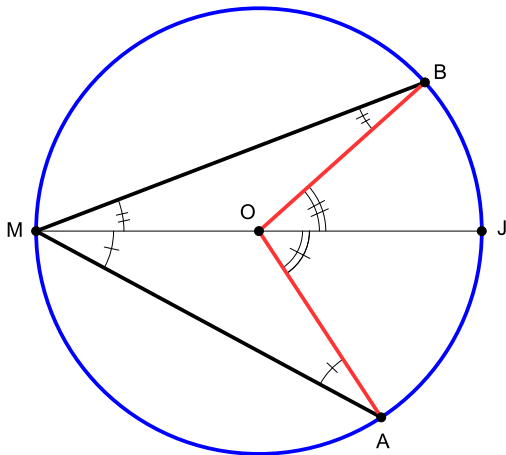
Ces deux angles interceptent le même arc d'extrémités A et B .





Théorème

L'angle au centre est le double de l'angle inscrit interceptant le même arc : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.



Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

Démonstration

- Le triangle OMB étant isocèle, on a :

$$\widehat{JOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\widehat{OMB}.$$

- De même, le triangle OMA étant isocèle, on a :

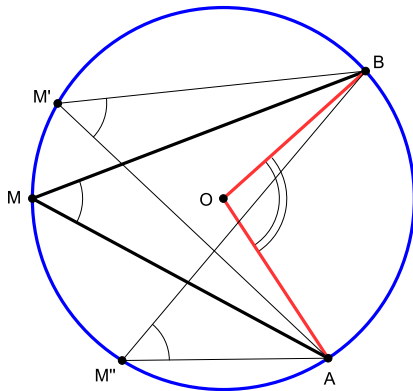
$$\widehat{JOA} = \widehat{OMA} + \widehat{OAM} = 2\widehat{OMA}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} &= \widehat{AOJ} + \widehat{JOB} \\ &= 2\widehat{AMJ} + 2\widehat{JMB} \\ &= 2\widehat{AMB}\end{aligned}$$

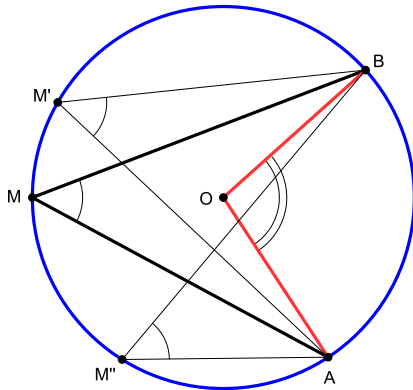
Conséquence :

Tous les angles inscrits \widehat{AMB} , $\widehat{AM'B}$, $\widehat{AM''B}$... ayant leurs sommets sur le même arc d'extrémités A et B et interceptant l'arc opposé sont égaux.



Conséquence :

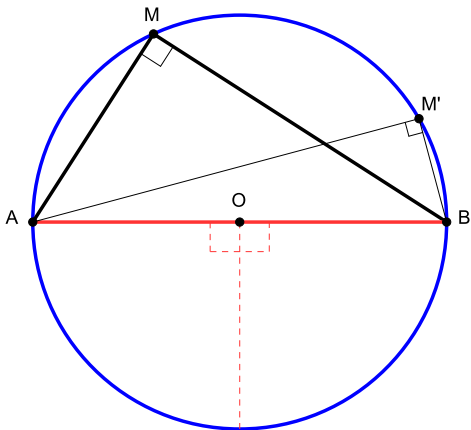
Tous les angles inscrits \widehat{AMB} , $\widehat{AM'B}$, $\widehat{AM''B}$... ayant leurs sommets sur le même arc d'extrémités A et B et interceptant l'arc opposé sont égaux.



Cas particulier 1 : l'arc est un demi-cercle.

Un angle qui intercepte un diamètre est droit :

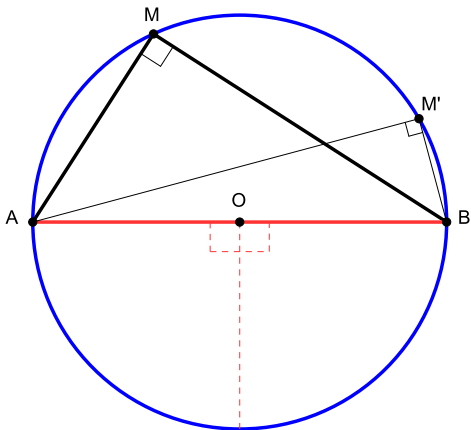
$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B} = \dots = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$



Cas particulier 1 : l'arc est un demi-cercle.

Un angle qui intercepte un diamètre est droit :

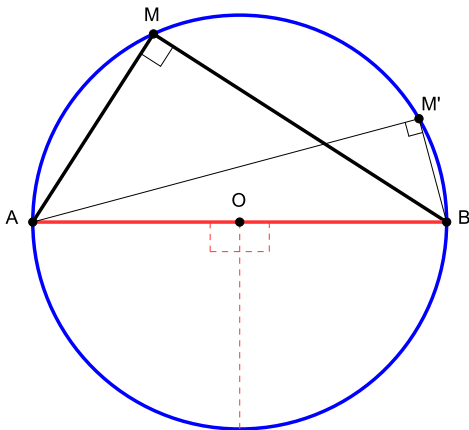
$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B} = \dots = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$



Cas particulier 1 : l'arc est un demi-cercle.

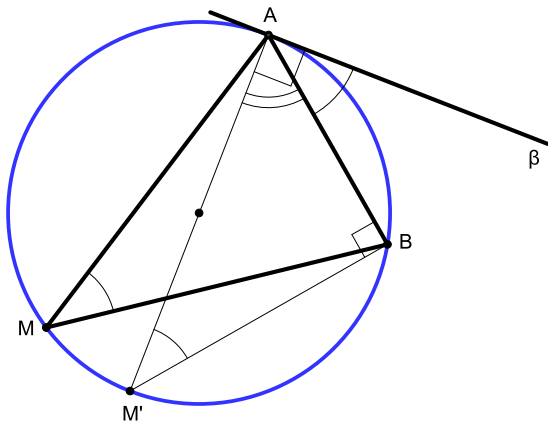
Un angle qui intercepte un diamètre est droit :

$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B} = \dots = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$



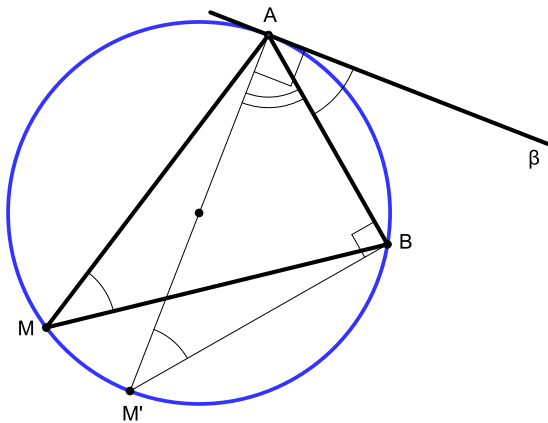
Cas particulier 2 : angle formé par une corde et une tangente.

$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B} = \widehat{BA\beta}$$



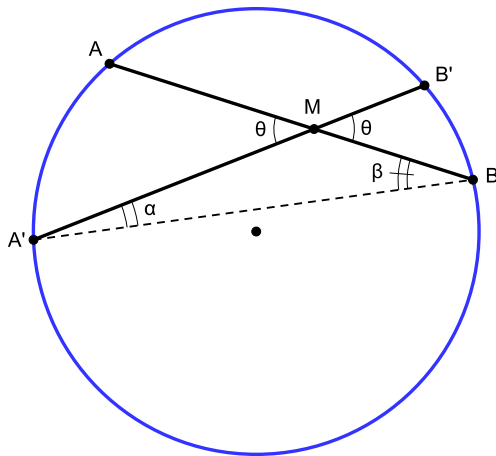
Cas particulier 2 : angle formé par une corde et une tangente.

$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B} = \widehat{BA\beta}$$



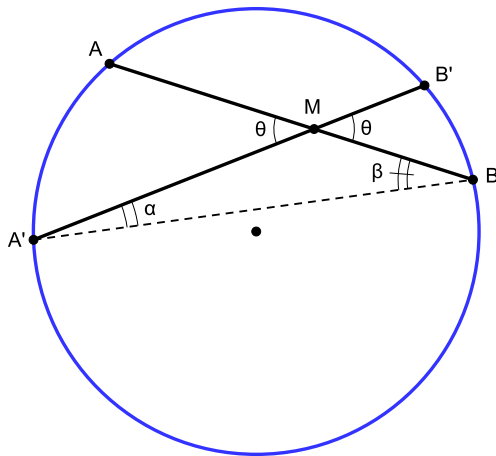
Le sommet de l'angle est à l'intérieur du cercle.

$$\widehat{AMA'} = \theta = \alpha + \beta$$



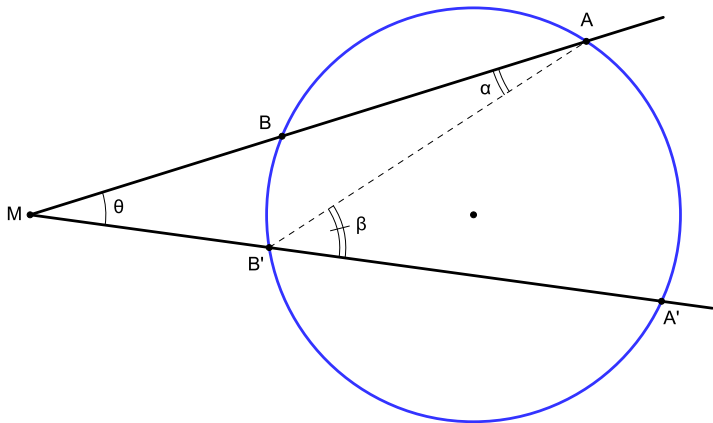
Le sommet de l'angle est à l'intérieur du cercle.

$$\widehat{AMA'} = \theta = \alpha + \beta$$



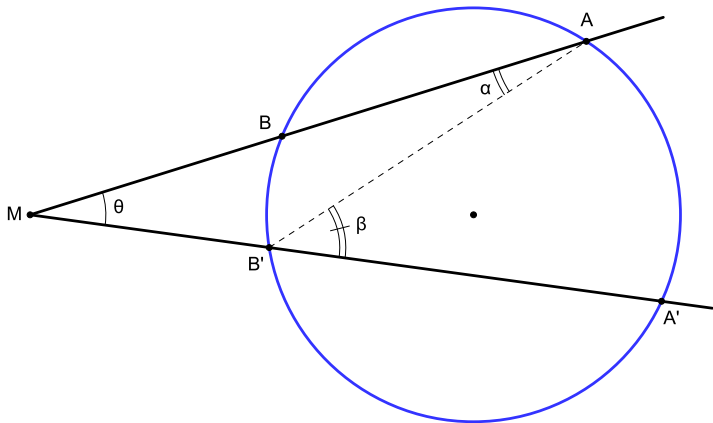
Le sommet de l'angle est à l'extérieur du cercle.

$$\widehat{AMA'} = \theta = \beta - \alpha$$



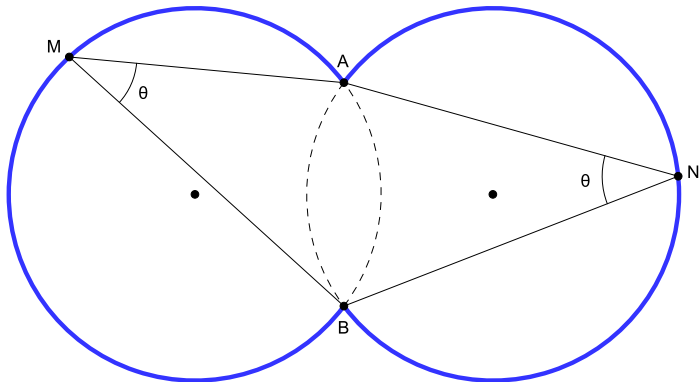
Le sommet de l'angle est à l'extérieur du cercle.

$$\widehat{AMA'} = \theta = \beta - \alpha$$



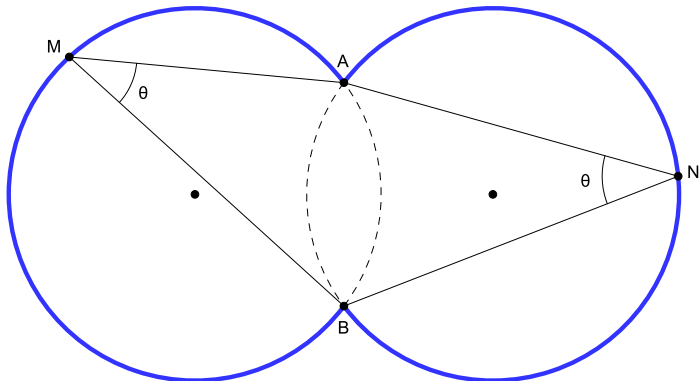
Une question naturelle et très importante pour toute la suite !

Étant donnés deux points A et B et $\theta \in [0, \pi]$
où varie le point M tel que $\widehat{AMB} = \theta$?



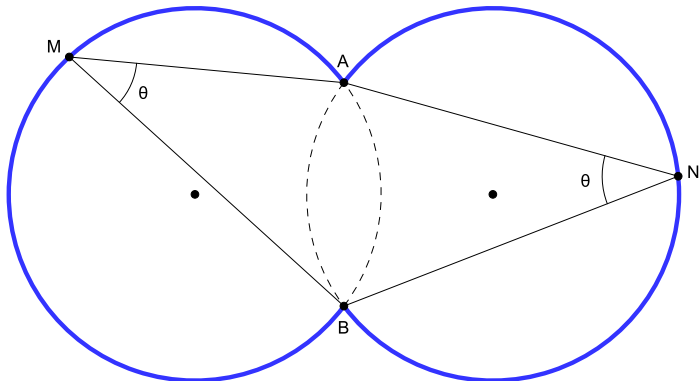
Une question naturelle et très importante pour toute la suite !

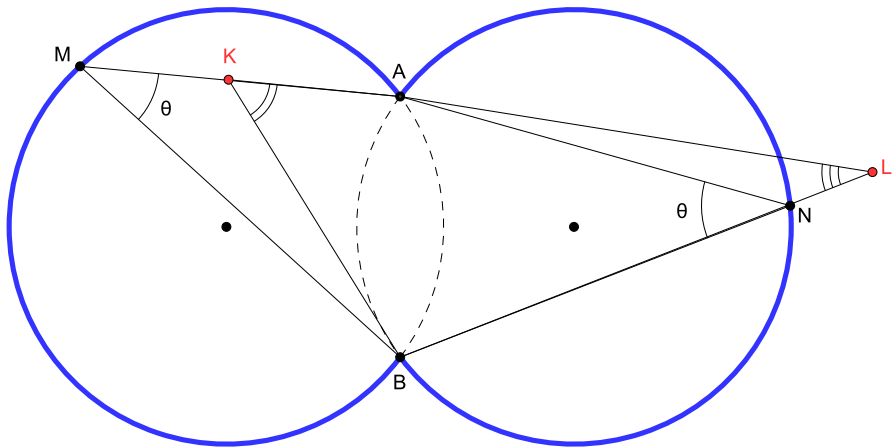
Étant donnés deux points A et B et $\theta \in [0, \pi]$
où varie le point M tel que $\widehat{AMB} = \theta$?



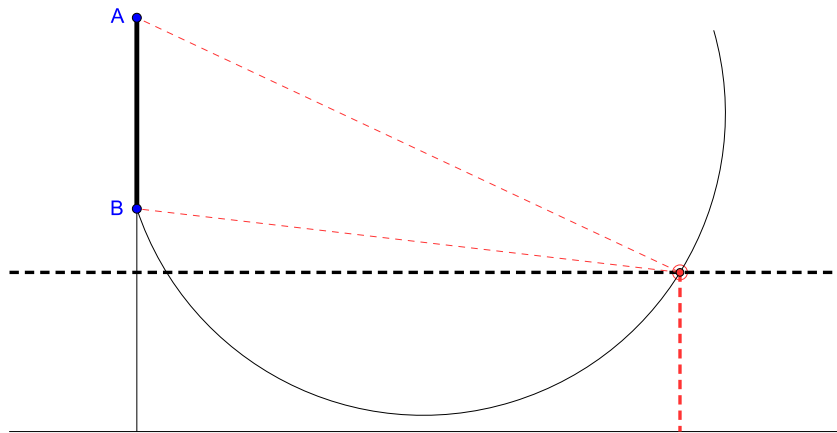
Une question naturelle et très importante pour toute la suite !

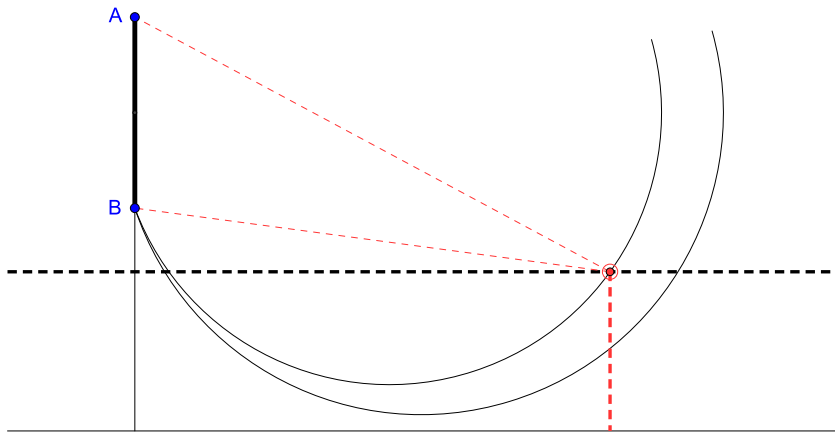
Étant donnés deux points A et B et $\theta \in [0, \pi]$
où varie le point M tel que $\widehat{AMB} = \theta$?

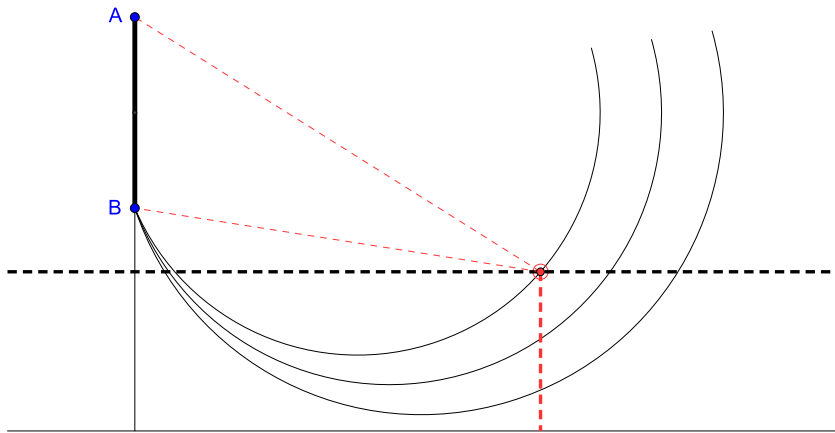


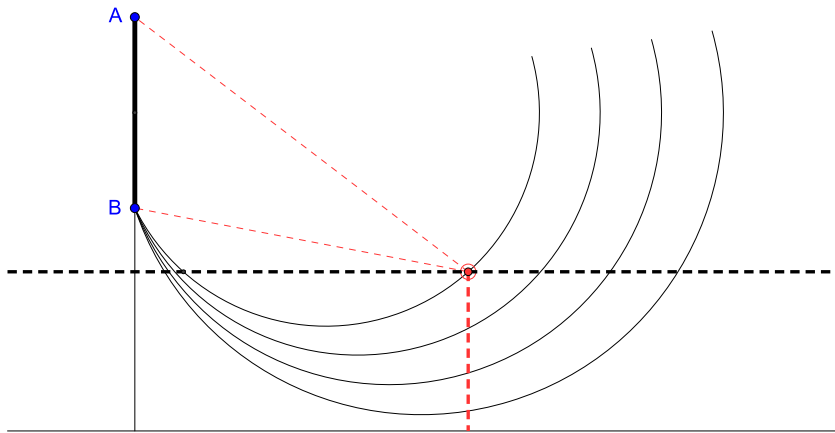


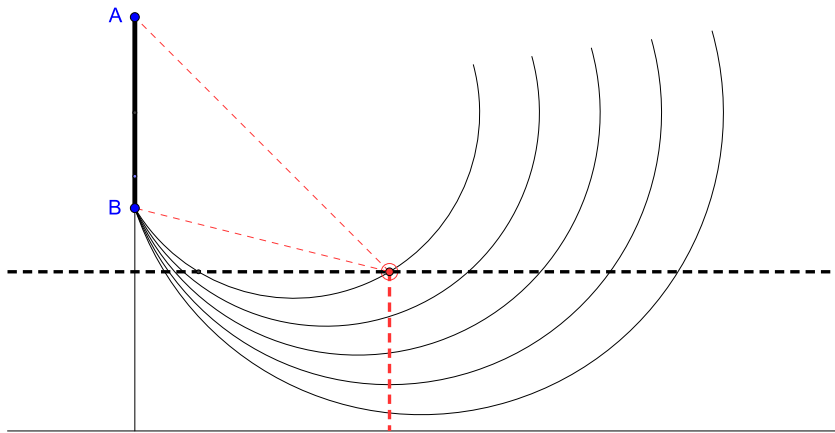
3. La solution

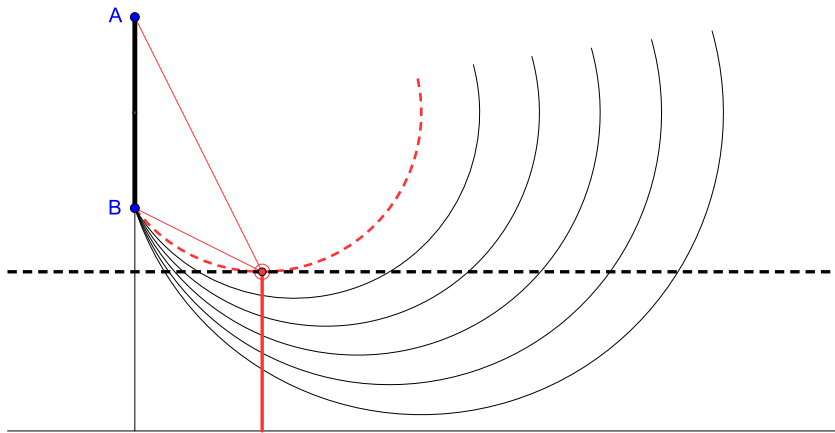


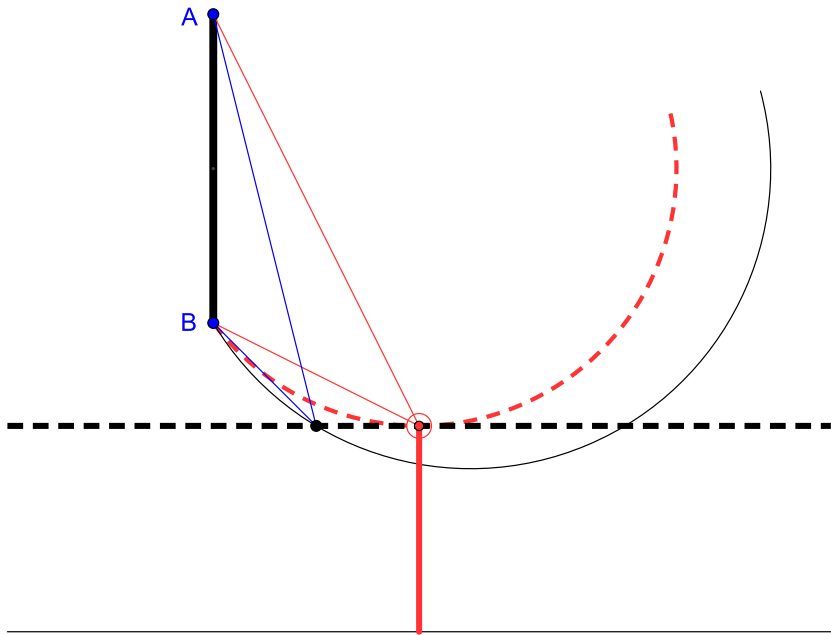


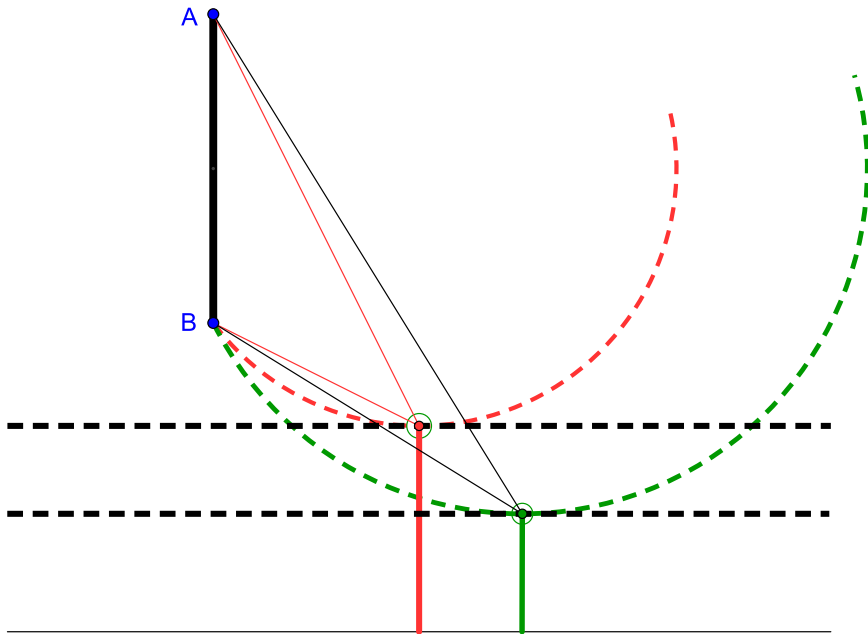




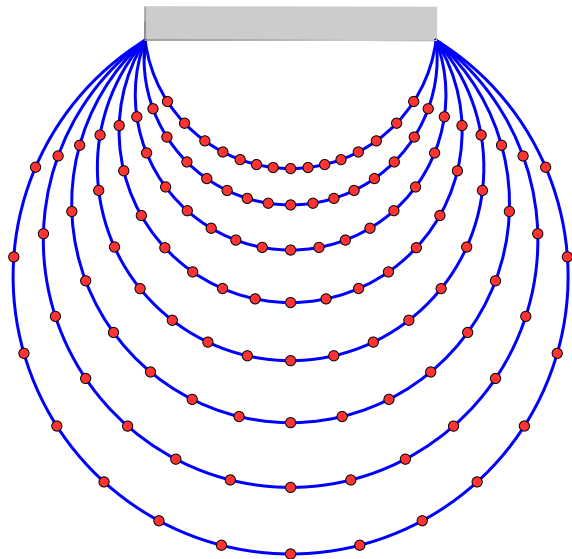


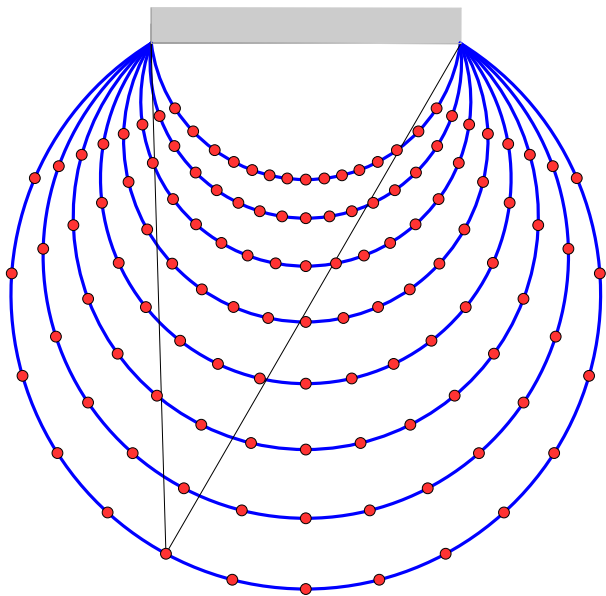


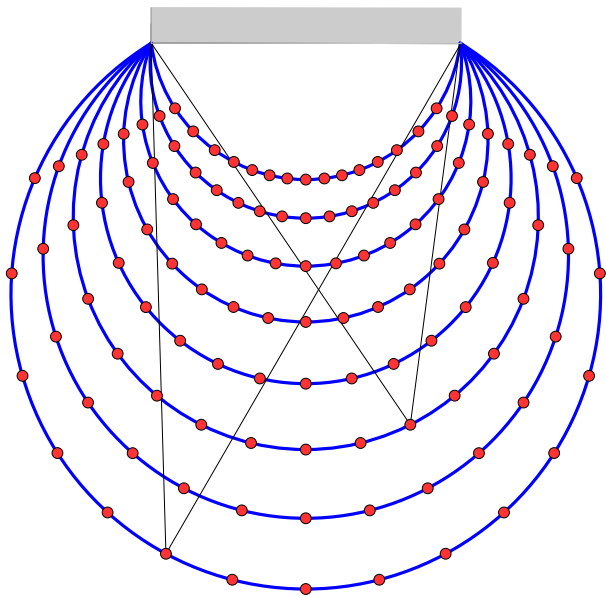


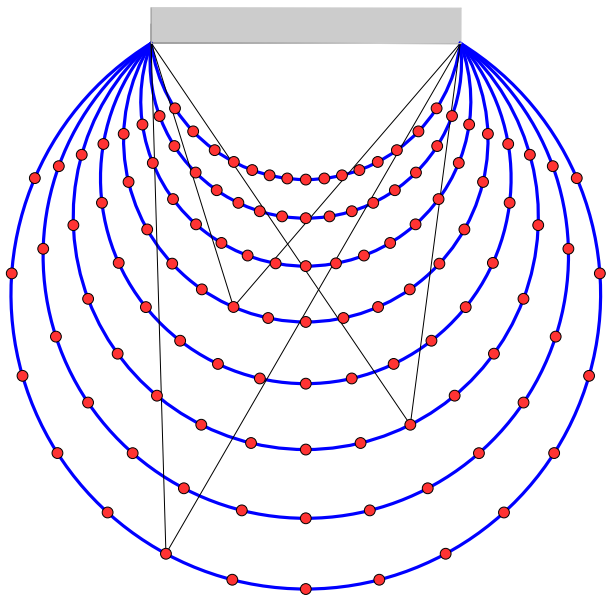


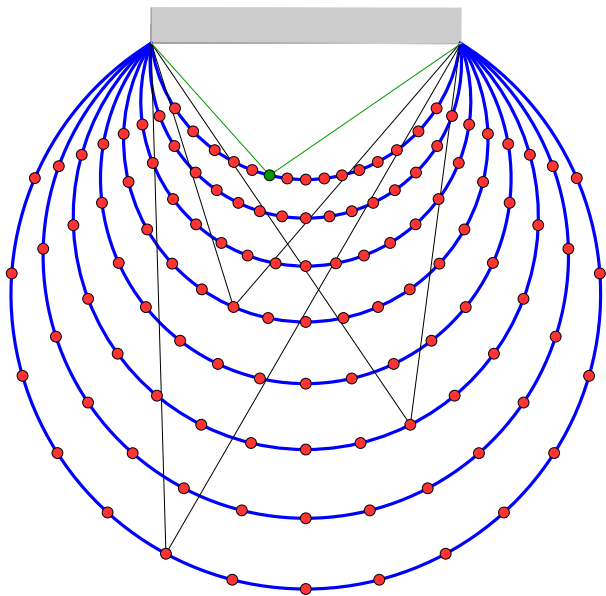
4. Où dois-je m'asseoir pour bien voir ?

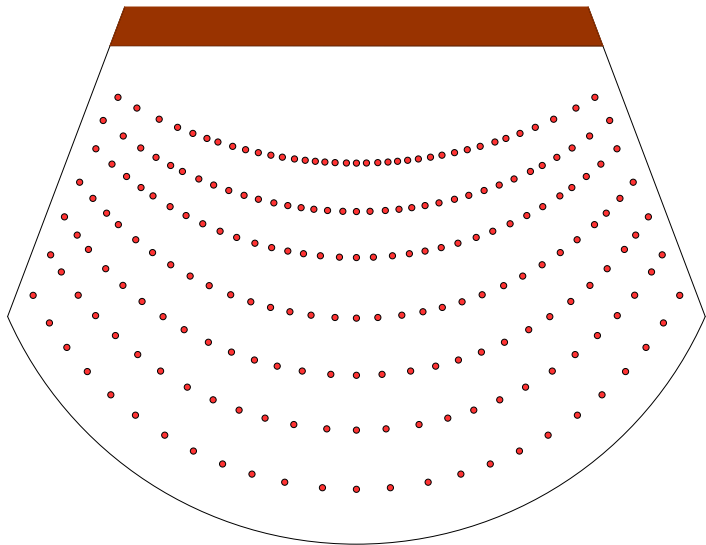


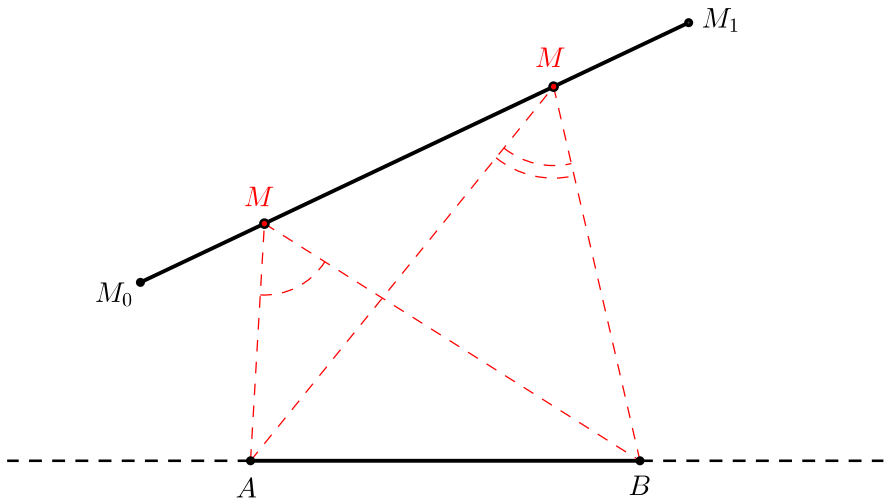












D'abord un exercice avant d'aller vers la suite !

(SM) est tangente au cercle γ .

Établir la relation :

$$SM^2 = SA \cdot SB$$

