

AZIZ EL KACIMI ALAOU

(Mars 2019)

**Résumé.** On calcule explicitement la cohomologie feuilletée  $H_{\mathcal{F}}^*(M)$  du flot affine de Reeb  $\mathcal{F}$  sur la variété de Hopf  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ . L'espace vectoriel  $H_{\mathcal{F}}^1(M)$  donne ainsi les obstructions à la résolution de l'équation cohomologique  $X \cdot f = g$  et les distributions invariantes pour tout champ  $X$  non singulier définissant  $\mathcal{F}$ .

## 1. Rappels

Dans cette section, on définit les principales notions considérées dans ce texte : celle de feuilletage, de cohomologie feuilletée, de suite spectrale d'un revêtement... Tous les objets géométriques (variétés, fonctions, champs de vecteurs, formes différentielles...) seront supposés de classe  $C^\infty$ . Et sauf mention expresse du contraire, les fonctions et les formes différentielles seront à valeurs complexes.

**1.1. Définition.** Soit  $M$  une variété (connexe) de dimension  $m + n$ . Un **feuilletage**  $\mathcal{F}$  de **codimension**  $n$  (ou de **dimension**  $m$ ) sur  $M$  est la donnée d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  et, pour tout  $i$ , d'un difféomorphisme  $\varphi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$  tel que, sur toute intersection non vide  $U_i \cap U_j$ , le difféomorphisme de changement de coordonnées  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$  soit de la forme  $x' = \varphi_{ij}(x, y)$  et  $y' = \gamma_{ij}(y)$ .

On peut aussi voir  $\mathcal{F}$  comme la donnée d'un sous-fibré  $\tau$  de rang  $m$  du fibré tangent  $TM$  complètement intégrable, c'est-à-dire, pour toutes sections  $X, Y \in C^\infty(\tau)$  de  $\tau$  (i.e. des champs de vecteurs sur  $M$  tangents à  $\tau$ ), le crochet  $[X, Y]$  est encore une section de  $\tau$ . Les sous-variétés connexes tangentes à  $\tau$  sont appelées *feuilles* de  $\mathcal{F}$ .

## 1.2. Cohomologie feuilletée

• Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de dimension  $m$  sur  $M$ . On note  $T\mathcal{F}$  son fibré tangent et  $\nu$  un sous-fibré supplémentaire dans  $TM$ , par exemple le fibré orthogonal pour une métrique riemannienne. On dira qu'une forme différentielle  $\alpha$  de degré  $\ell$  sur  $M$  est *feuilletée* si  $\alpha(X_1, \dots, X_\ell) = 0$  lorsque l'un des vecteurs  $X_1, \dots, X_\ell$  est tangent à  $\nu$ . Soit  $\Omega_{\mathcal{F}}^\ell(M)$  l'espace vectoriel de telles formes. Pour  $\ell = 0$ ,  $\Omega_{\mathcal{F}}^0(M)$  est l'espace  $C^\infty(M)$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ . On a un opérateur de différentiation extérieure le long des feuilles :  $\Omega_{\mathcal{F}}^\ell(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{\ell+1}(M)$  défini (comme dans le cas classique), pour  $X_1, \dots, X_\ell$  tangents à  $\mathcal{F}$ , par la formule :

$$d_{\mathcal{F}}\alpha(X_1, \dots, X_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell+1} (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{\ell+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{\ell+1})$$

où  $\widehat{X}_i$  signifie qu'on a omis l'argument  $X_i$ . On vérifie facilement que  $d_{\mathcal{F}}$  est de carré nul. On obtient ainsi un complexe différentiel (dit *complexe feuilleté* de  $(M, \mathcal{F})$ ) :

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^0(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^1(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1}(M) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^m(M) \longrightarrow 0.$$

Sa cohomologie (en tout degré  $\ell$ ) :

$$(2) \quad H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = Z_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)/B_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$$

ne dépend pas du choix du fibré supplémentaire  $\nu$  ; on l'appelle  $\ell^{\text{ème}}$  espace vectoriel de *cohomologie feuilletée* de  $(M, \mathcal{F})$ . C'est un invariant important du feuilletage. Par exemple, le dual topologique de l'espace  $H_{\mathcal{F}}^m(M)$  contient les *cycles feuilletés* au sens de [Su] et donc, en particulier, les mesures transverses invariantes (*cf.* [Ek]). Le calcul de  $H_{\mathcal{F}}^*(M)$  est souvent très ardu. Pour une utilisation intéressante de la cohomologie feuilletée dans l'étude de la rigidité de certaines actions de groupes de Lie voir [MM].

• Une fonction  $f$  sur  $M$  est dite  $\mathcal{F}$ -*basique* (ou simplement *basique*) si elle vérifie  $d_{\mathcal{F}}f = 0$ , c'est-à-dire si elle est constante sur les feuilles. Le faisceau des germes de telles fonctions sera noté  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$  ; il admet une résolution fine (*cf.* [Va]) :

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^0 \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^1 \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^{m-1} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega_{\mathcal{F}}^m \longrightarrow 0$$

où  $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}$  est le faisceau des germes des  $\ell$ -formes feuilletées. Comme  $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$  est l'espace des sections globales de  $\Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}$ , on a un isomorphisme canonique :

$$(4) \quad H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) \simeq H^{\ell}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}).$$

Les deux définitions permettent de faire des calculs, chacune a son utilité suivant la nature des exemples et la manière dont ils sont décrits. Mais c'est plutôt la version "faisceau" que nous utiliserons le plus dans la suite.

### 1.3. Suite spectrale d'un $\mathbb{Z}$ -revêtement feuilleté

Soit  $\widetilde{M}$  une variété munie d'un feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}$ . Un *automorphisme* de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  est un difféomorphisme  $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  envoyant feuille sur feuille. L'ensemble  $\text{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}})$  de tels automorphismes est un groupe pour la composition des applications.

Une *action fidèle* du groupe  $\mathbb{Z}$  sur  $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$  est la donnée d'un morphisme injectif de groupes  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\widetilde{\mathcal{F}})$ , donc de l'image  $\gamma$  de l'élément 1 (générateur du groupe  $\mathbb{Z}$ ). Si cette action est libre et propre, le quotient  $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$  est une variété de même dimension que  $\widetilde{M}$  ;  $\widetilde{\mathcal{F}}$  y induit alors un feuilletage  $\mathcal{F}$  de même dimension (et donc de même codimension). La projection canonique  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  est un revêtement feuilleté *i.e.* un revêtement qui, en plus, envoie toute feuille de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sur une feuille de  $\mathcal{F}$ .

De ce qui précède on déduit que l'image réciproque  $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$  par  $\pi$  du faisceau  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$  est le faisceau  $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ . On a donc une suite spectrale de terme :

$$(5) \quad E_2^{pq} = H^p(\Gamma, H^q(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}}))$$

et convergeant vers  $H^{p+q}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ . (L'espace vectoriel  $H^q(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$  est vu comme  $\Gamma$ -module pour l'action induite par celle de  $\Gamma = \langle\gamma\rangle$  sur  $\widetilde{M}$ .) Comme  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$ , la différentielle  $d_2 : E_2^{pq} \rightarrow E_2^{p+2, q-1}$  est nulle et donc la suite spectrale stationne au terme  $E_2$ . Ce qui donne, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = E_2^{0\ell} \oplus E_2^{1, \ell-1}$ . En particulier :

$$(6) \quad H_{\mathcal{F}}^0(M) = H^0(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = \{\text{fonctions basiques } \Gamma\text{-invariantes sur } \widetilde{M}\}.$$

$$(7) \quad H_{\mathcal{F}}^1(M) = E_2^{01} \oplus E_2^{10} = H^0(\Gamma, H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) \oplus H^1(\Gamma, H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})) .$$

Si en plus  $\widetilde{\mathcal{F}}$  est un flot (et donc aussi  $\mathcal{F}$ ), les espaces vectoriels  $H^*(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{F}}})$  et  $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$  sont nuls pour  $* \geq 2$  et donc la cohomologie feuilletée  $H^*(M, \mathcal{O}_{\mathcal{F}})$  se réduit à celle donnée par les formules (6) et (7). Ce sera le cas pour le flot affine de Reeb, objet de cette note.

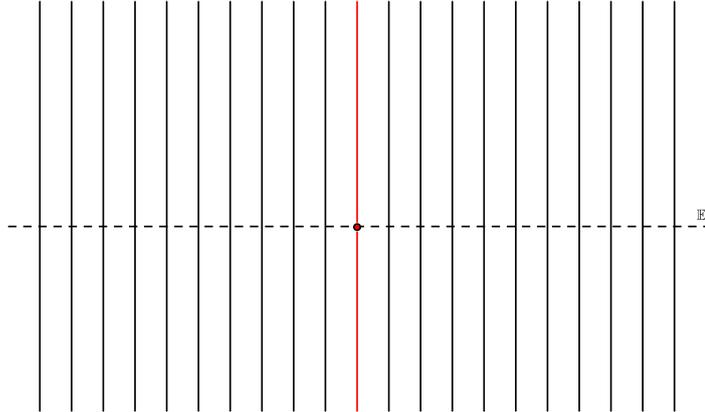
## 2. Construction du flot affine de Reeb

Pour  $n \geq 2$  entier naturel, on note  $\mathbb{E}$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  et  $(z, t)$  les coordonnées d'un point quelconque de  $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$ . On pose  $\mathbb{E}^* = \mathbb{E} \setminus \{0\}$  et  $\widetilde{M} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ .

**2.1.** Le système différentiel  $dz = 0$  définit un feuilletage (un flot)  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sur  $\widetilde{M}$  ; ses feuilles sont les courbes intégrales du champ de vecteur  $\widetilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ . De la même manière, l'équation différentielle  $dt = 0$  définit un feuilletage  $\widetilde{\mathcal{V}}$  de codimension 1.

– Toute feuille de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  passant par  $(z, t)$  avec  $z \neq 0$  est une droite ; les autres sont deux demi-droites  $\widetilde{F}_+ = \{(0, t) : t > 0\}$  et  $\widetilde{F}_- = \{(0, t) : t < 0\}$ .

– Toute feuille de  $\widetilde{\mathcal{V}}$  passant par  $(z, t)$  avec  $t \neq 0$  est une copie de l'espace  $\mathbb{E}$ . Celle qui reste (qui passe par les  $(z, 0)$ ), qu'on notera  $\widetilde{V}$ , est isomorphe à  $\mathbb{E}^*$ .



**2.2.** Soient  $\lambda \in ]0, 1[$  et  $\widetilde{M} \xrightarrow{\gamma} \widetilde{M}$  la transformation affine  $\gamma(z, t) = (\lambda z, \lambda t)$  ; elle engendre une action analytique de  $\Gamma = \langle \gamma \rangle = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$  sur  $\widetilde{M}$ . Cette action est libre et propre ; le quotient  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  est donc une variété. Celle-ci est compacte, et plus précisément analytiquement isomorphe à la variété de Hopf réelle  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ . Les feuilletages  $\widetilde{\mathcal{F}}$  et  $\widetilde{\mathcal{V}}$  sont invariants par  $\gamma$  et induisent respectivement des feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  sur  $M$ .

– Les feuilles  $F_+$  et  $F_-$  de  $\mathcal{F}$  provenant respectivement de  $\widetilde{F}_+$  et  $\widetilde{F}_-$  sont des cercles (courbes fermées simples). Les autres sont des courbes non fermées ; pour chacune d'elle, un bout spirale autour de  $L_+$  et l'autre autour de  $L_-$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}$  est connu comme étant le *flot affine de Reeb* sur  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ .

– La feuille  $V$  de  $\mathcal{V}$  provenant de  $\widetilde{V}$  est une variété analytique isomorphe à la variété de Hopf  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Les autres feuilles sont difféomorphes à  $\mathbb{E}$ . Le feuilletage  $\mathcal{V}$  est connu comme étant le *feuilletage affine de Reeb* sur  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ .

On peut mettre sur la variété  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$  une métrique riemannienne  $\Theta$  de telle sorte que les feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  soient orthogonaux. Il suffit d'en définir une sur  $\widetilde{M}$  invariante

par  $\gamma$ , par exemple :

$$(8) \quad \Theta = \frac{1}{\|z\|^2 + t^2} (dz_1 \otimes dz_1 + \cdots + dz_n \otimes dz_n + dt \otimes dt)$$

où  $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}$  est la norme euclidienne de  $z$  dans  $\mathbb{E}$ . Pour cette métrique, les deux feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  sont conformes.

### 3. Cohomologie feuilletée de $(M, \mathcal{F})$

Dans cette section on calcule explicitement la cohomologie feuilletée du feuilletage  $\mathcal{F}$  sur la variété  $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ . Plus précisément, on démontre le :

**3.1. Théorème.** *La cohomologie feuilletée  $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M)$  du flot affine de Reeb  $\mathcal{F}$  sur la variété de Hopf  $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$  est  $\mathbb{C}$  pour  $\ell = 0$  et est isomorphe (en tant qu'espace de Fréchet) à  $C^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$  pour  $\ell = 1$ . (Et bien sûr,  $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = 0$  pour  $\ell \geq 2$ .)*

Pour  $\ell \geq 2$ , on a  $H_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = 0$  pour une raison évidente de degré. D'autre part, il est facile de voir que  $H_{\mathcal{F}}^0(M) = \mathbb{C}$ . Cela vient du fait que toute feuille non compacte de  $\mathcal{F}$  spirale positivement sur  $F_+$  et négativement sur  $F_-$  ; donc une fonction basique (continue) est nécessairement constante.

Toute la suite de ce texte sera consacrée à la démonstration de l'isomorphisme  $H_{\mathcal{F}}^1(M) \simeq C^{\infty}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ . Elle se fera en trois petites étapes.

**3.2.** Dans l'hyperplan affine de  $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$  d'équation  $t = 1$ , on note  $B_+$  la boule fermée de centre  $(0, 1)$  et de rayon un nombre  $\rho > 0$  et  $C_+$  le cône fermé de base  $B_+$ . De même, dans l'hyperplan affine d'équation  $t = -1$ , on considère la boule  $B_-$  de centre  $(0, -1)$  et de rayon  $\rho > 0$  et  $C_-$  le cône fermé de base  $B_-$ . On pose :

$$(9) \quad U_+ = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus C_-, \quad U_- = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \setminus C_+ \quad \text{et} \quad U = U_+ \cap U_-.$$

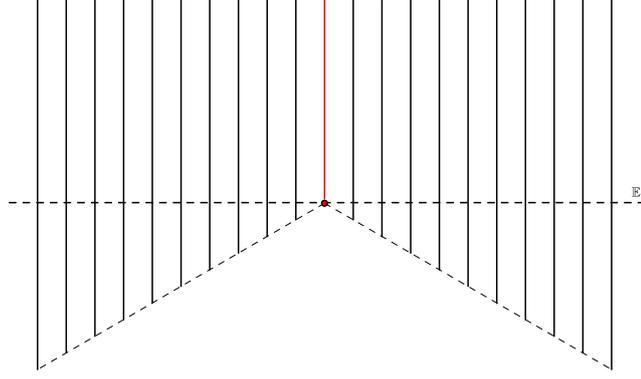
Alors  $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$  est un recouvrement ouvert de  $\widetilde{M}$ . Les feuilletages induits par  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sur  $U_+$  et  $U_-$  sont isomorphes au feuilletage sur  $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$  défini par la première projection  $(z, t) \rightarrow z$ . Ils sont donc *intégrablement homotopes* (cf. [Ek]) au feuilletage par points sur l'espace euclidien  $\mathbb{E}$ . De la même manière, le feuilletage induit par  $\widetilde{\mathcal{F}}$  sur  $U$  est isomorphe au feuilletage sur  $\mathbb{E}^* \times \mathbb{R}$  défini par la première projection  $(z, t) \rightarrow z$ . Il est donc *intégrablement homotope* au feuilletage par points sur  $\mathbb{E}^*$ . Leurs cohomologies feuilletées respectives sont donc triviales ; plus précisément on a :

$$(10) \quad H_{\mathcal{F}}^{\ell}(U_+) = H_{\mathcal{F}}^{\ell}(U_-) = \begin{cases} C^{\infty}(\mathbb{E}) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

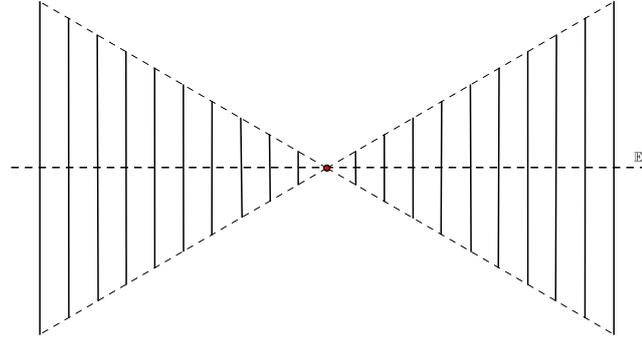
et

$$(11) \quad H_{\mathcal{F}}^{\ell}(U) = \begin{cases} C^{\infty}(\mathbb{E}^*) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases}$$

Voici par exemple les ouverts  $U_+$  et  $U$  ( $U_-$  est obtenu simplement en appliquant à  $U_+$  la réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation  $t = 0$ ).



L'ouvert  $U_+$



L'ouvert  $U$

Le recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$  est donc acyclique pour le faisceau  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ . Par suite :

$$(12) \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}}^*(\tilde{M}) = H^*(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}) = H^*(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}).$$

**3.3.** On peut alors utiliser le recouvrement ouvert  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ -acyclique  $\mathcal{U}$  pour calculer la cohomologie feuilletée de  $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ . La suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée s'écrit :

$$(13) \quad 0 \longrightarrow H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(\tilde{M}) \xrightarrow{r} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U_+) \oplus H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U_-) \xrightarrow{j} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^0(U) \xrightarrow{\delta} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \longrightarrow 0$$

où  $r(f) = (f|_{U_+}, f|_{U_-})$  (qu'on notera  $(f, f)$ ),  $j(g, h) = g|_U - h|_U$  (qu'on notera  $g - h$ ) et  $\delta$  est l'homomorphisme de connexion. Cette suite exacte s'écrit plus précisément :

$$(14) \quad 0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{E}) \xrightarrow{r} C^\infty(\mathbb{E}) \oplus C^\infty(\mathbb{E}) \xrightarrow{j} C^\infty(\mathbb{E}^*) \xrightarrow{\delta} H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \longrightarrow 0$$

toujours avec  $r(f) = (f, f)$  et  $j(g, h) = g - h$ . L'image de  $r$  est un sous-espace fermé de  $C^\infty(\mathbb{E}) \oplus C^\infty(\mathbb{E})$  isomorphe à  $C^\infty(\mathbb{E})$  ; il a pour supplémentaire le facteur  $(C^\infty(\mathbb{E}), 0)$  puisque tout  $(g, h)$  s'écrit de façon unique  $(g, h) = (h, h) + (g - h, 0)$ . En plus, ce facteur est l'image de  $j$  dans  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$ . On a donc un isomorphisme canonique :

$$(15) \quad H_{\tilde{\mathcal{F}}}^1(\tilde{M}) \simeq C^\infty(\mathbb{E}^*)/C^\infty(\mathbb{E}).$$

Pour simplifier, on notera dorénavant  $W$  l'espace  $H_{\mathcal{F}}^1(\widetilde{M}) \simeq C^\infty(\mathbb{E}^*)/C^\infty(\mathbb{E})$ . Muni de la topologie quotient,  $W$  hérite d'une structure d'EVT non séparé puisque  $C^\infty(\mathbb{E})$  est un sous-espace non fermé de  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$  (cf. Appendice section 5).

**3.4.** Comme l'ouvert  $\mathbb{E}^*$  est invariant par l'homothétie  $\gamma(z) = \lambda z$ ,  $\gamma$  agit sur  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$  en préservant  $C^\infty(\mathbb{E})$  donc aussi sur le quotient  $W = C^\infty(\mathbb{E}^*)/C^\infty(\mathbb{E})$  ; par suite  $W$  est un  $\Gamma$ -module. On a donc une suite exacte de  $\Gamma$ -modules :

$$(16) \quad 0 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{E}) \xrightarrow{j} C^\infty(\mathbb{E}^*) \xrightarrow{\tau} W \longrightarrow 0$$

où  $j$  est l'application dans la suite (14) et  $\tau$  la projection canonique de  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$  sur le quotient  $W$ . En prenant la cohomologie de  $\Gamma$  à valeurs dans chacun de ces  $\Gamma$ -modules, on obtient une suite exacte longue :

$$(17) \quad \begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E})) \xrightarrow{j^*} H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) \xrightarrow{\tau^*} H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E})) \xrightarrow{j^*} H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) \xrightarrow{\tau^*} H^1(\Gamma, W) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où  $\delta$  est l'homomorphisme de connexion habituel. Reste à déterminer les espaces en question, nous aurons bien besoin de certains d'entre eux pour la suite.

- L'espace  $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$  est celui des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{E}$  invariantes par  $\gamma$ , donc constantes ; par suite  $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E})) = \mathbb{C}$ .

- L'espace  $H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*))$  est celui des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{E}^*$  invariantes par  $\gamma$ , donc les fonctions sur  $V = \mathbb{E}^*/\langle\gamma\rangle = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  i.e. :

$$H^0(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

- Calculons l'espace  $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$ . C'est le quotient de  $C^\infty(\mathbb{E})$  par le sous-espace engendré par les éléments de la forme  $f - f \circ \gamma$ . Nous avons donc à résoudre l'équation cohomologique  $f(z) - f(\lambda z) = g(z)$  pour  $g \in C^\infty(\mathbb{E})$  donnée. Une condition nécessaire est  $g(z) = 0$ . Si on la suppose satisfaite, une solution formelle est donnée par la série :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\lambda^k z).$$

Cette série converge pour  $z = 0$ , puisque tous ses termes sont nuls. D'autre part, on montre facilement que, pour tout  $R > 0$ , toutes ses séries dérivées sont équivalentes, sur la boule fermée de rayon  $R$  et centrée à l'origine, à des séries géométriques de raison une puissance de  $\lambda$ , donc elles convergent. Finalement, cette série converge pour la topologie  $C^\infty$ . Ce qui montre que  $f$  est  $C^\infty$  et est une solution de l'équation cohomologique  $f - f \circ \gamma = g$ . On en déduit que  $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}))$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$  engendré par la fonction constante égale à 1.

- Pour calculer  $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*))$ , on utilise le  $\Gamma$ -revêtement  $\sigma : \mathbb{E}^* \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  où  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  est le quotient de  $\mathbb{E}^*$  (vu comme la feuille  $\widetilde{V} = \mathbb{E}^* \times \{0\}$  du feuilletage  $\mathcal{V}$  décrit dans la sous-section 2.1) par l'action du groupe  $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ . Notons  $\mathcal{C}^*$  et  $\mathcal{C}$  les

faisceaux des germes de fonctions  $C^\infty$  respectivement sur  $\mathbb{E}^*$  et  $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Ces faisceaux sont fins et donc :

$$(18) \quad H^\ell(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{E}^*) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad H^\ell(V, \mathcal{C}) = \begin{cases} C^\infty(V) & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 1. \end{cases}$$

Au revêtement  $\sigma$  est associée une suite spectrale convergeant vers  $H^{p+q}(V, \mathcal{C})$  et de terme  $D_2^{pq} = H^p(\Gamma, H^q(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*))$ . Comme :

$$0 = H^1(V, \mathcal{C}) = H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) \oplus H^0(\Gamma, H^1(\mathbb{E}^*, \mathcal{C}^*)),$$

on a  $H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = 0$ .

• Avec ce qu'on vient de calculer, la suite exacte longue de cohomologie (17) peut donc s'écrire :  $0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \rightarrow H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \mathbb{C} \rightarrow 0$ . Elle donne la suite exacte (plus courte) :

$$(19) \quad 0 \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{C} \rightarrow H^0(\Gamma, W) \xrightarrow{\delta} \mathbb{C} \rightarrow 0$$

qui montre que :

$$(20) \quad H^0(\Gamma, W) = (C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

• Pour finir, la suite spectrale associée au revêtement feuilleté  $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}}) \rightarrow (M, \mathcal{F})$  donne :  $H_{\mathcal{F}}^1(M) = H^0(\Gamma, H_{\widetilde{\mathcal{F}}}^1(\widetilde{M})) \oplus H^1(\Gamma, H_{\widetilde{\mathcal{F}}}^0(\widetilde{M}))$ . Mais, comme on vient de le voir dans tous les calculs qui précèdent, on a :

$$H^1(\Gamma, H_{\widetilde{\mathcal{F}}}^0(\widetilde{M})) = H^1(\Gamma, C^\infty(\mathbb{E}^*)) = 0$$

et :

$$H^0(\Gamma, H_{\widetilde{\mathcal{F}}}^1(\widetilde{M})) = H^0(\Gamma, W) \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1).$$

Finalement on a le résultat annoncé  $H_{\mathcal{F}}^1(M) \simeq C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ . Ce qui termine la démonstration du théorème 3.1.  $\diamond$

### 3.5. Remarque

Le théorème 3.1. dit que l'espace de cohomologie feuilletée  $H_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1)$  est paramétré par les fonctions de classe  $C^\infty$  sur la feuille compacte  $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  du feuilletage orthogonal  $\mathcal{V}$ . Cette feuille est presque une section de  $\mathcal{F}$  : elle coupe une et seule fois chacune des feuilles de  $\mathcal{F}$  sauf  $F_+$  et  $F_-$ . Si on prive  $M$  de  $F_+$  et  $F_-$ , on obtient une variété  $M_0$  munie du feuilletage induit  $\mathcal{F}_0$ . Le revêtement universel  $\widetilde{M}_0$  de  $M_0$  est le produit  $\mathbb{E}^* \times \mathbb{R}$  et le feuilletage  $\widetilde{\mathcal{F}}_0$  relevé a pour feuilles les facteurs  $\{z\} \times \mathbb{R}$  avec  $z \in \mathbb{E}^*$ . Si on munit  $\widetilde{V}_0 = \mathbb{E}^* \times \{0\}$  du feuilletage par points (qu'on notera  $\mathcal{P}_0$ ), on a une rétraction feuilletée  $H((z, t), s) = (z, st)$  (avec  $s \in [0, 1]$ ) de  $(\widetilde{M}_0, \widetilde{\mathcal{F}}_0)$  sur  $(\widetilde{V}_0, \mathcal{P}_0)$ . Elle est équivariante par rapport à l'action de  $\gamma$  mais ne préserve pas chaque feuille individuellement ; elle ne saurait donc être une rétraction intégrable. Toutefois, elle le devient quand on prend les quotients respectifs sous l'action de  $\Gamma$ . Ainsi, le feuilletage

$\mathcal{F}_0$  sur  $M_0$  est intégrablement homotope au feuilletage par points sur  $V = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ . Donc  $H_{\mathcal{F}_0}^1(M_0) = 0$ .

#### 4. Distributions invariantes

**4.1.** Si  $\mathcal{F}$  est un flot défini par un champ non singulier  $X$  sur une variété  $M$ , sa cohomologie feuilletée peut se voir comme suit. Soit  $\nu$  un sous-fibré supplémentaire à  $\mathcal{F}$  dans  $TM$ . Soit  $\chi$  la 1-forme différentielle telle que  $\chi(X) = 1$  et  $\chi|_{\nu} = 0$ . Il est facile de voir que, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , on a :

$$(21) \quad \Omega_{\mathcal{F}}^{\ell}(M) = \begin{cases} C^{\infty}(M) & \text{si } \ell = 0 \\ C^{\infty}(M) \otimes \chi & \text{si } \ell = 1 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 2 \end{cases}$$

et que le complexe feuilleté se réduit à :  $0 \longrightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^0(M) \xrightarrow{d_X} \Omega_{\mathcal{F}}^1(M) \longrightarrow 0$  où  $d_X$  est l'opérateur défini par  $d_X f = (X \cdot f) \otimes \chi$ . Son conoyau  $\Omega_{\mathcal{F}}^1(M)/\text{Im}d_X$  est exactement le premier espace de *cohomologie feuilletée*  $H_{\mathcal{F}}^1(M)$  de  $\mathcal{F}$ . Il ne dépend pas du champ qui le définit : on vérifie aisément, en exhibant explicitement un isomorphisme de complexes feuilletés, qu'on obtient la même cohomologie si on remplace le champ  $X$  par un champ  $Z = hX$  avec  $h$  fonction partout non nulle.

Le calcul de l'espace  $H_{\mathcal{F}}^1(M)$  revient à la résolution de l'équation cohomologique continue pour le champ  $X$  (*cf.* [DE]) :

$$(22) \quad \text{Étant donnée } g \in C^{\infty}(M), \text{ existe-t-il } f \in C^{\infty}(M) \text{ telle que } X \cdot f = g \text{ ?}$$

L'espace  $H_{\mathcal{F}}^1(M)$  contient exactement les obstructions à la résolution de cette équation, d'où l'intérêt de son calcul.

**4.2.** Supposons  $M$  compacte. Une *distribution* sur  $M$  est une forme linéaire continue  $\varphi \in C^{\infty}(M) \xrightarrow{T} \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$  *i.e.* un élément du dual topologique  $\mathcal{D}'(M)$  de  $C^{\infty}(M)$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{D}'(M)$  sera muni de la *topologie faible* *i.e.* la topologie la moins fine qui rend continues toutes les évaluations linéaires  $e_{\varphi} : T \in \mathcal{D}'(M) \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$ . Toute forme volume  $\mu$  sur  $M$  définit une injection  $f \in C^{\infty}(M) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(M)$  donnée par  $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_M (f\varphi)\mu$ . Une distribution de ce type est dite *régulière*.

Soit  $M \xrightarrow{\gamma} M$  un difféomorphisme. Une distribution  $T$  sur  $M$  est dite *invariante* par  $\gamma$  (ou simplement  $\gamma$ -*invariante*) si elle vérifie  $\langle T, \varphi \circ \gamma \rangle = \langle T, \varphi \rangle$  pour toute fonction  $\varphi \in C^{\infty}(M)$ . On dira que  $T$  est invariante par un groupe  $\Gamma$  de difféomorphismes de  $M$  (ou  $\Gamma$ -invariante) si elle est invariante par chacun de ses éléments.

**4.3.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . C'est aussi un opérateur différentiel du premier ordre (on l'a déjà considéré ainsi)  $X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$  défini par l'égalité  $(X \cdot f)(x) = d_x f(X_x)$ . Il admet une extension naturelle aux distributions :

$$X : T \in \mathcal{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathcal{D}'(M)$$

avec  $\langle X \cdot T, \varphi \rangle = -\langle T, X \cdot \varphi \rangle$ . (On peut donc s'intéresser aussi à la résolution de l'équation cohomologique continue au niveau des distributions  $X \cdot T = S$ .)

Une distribution  $T$  est dite *invariante* par  $X$  ou  $X$ -*invariante* si elle vérifie  $X \cdot T = 0$  *i.e.* elle est nulle sur l'image de  $X : C^{\infty}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$  qui est l'espace des *divergences* de  $X$ . Une condition nécessaire (et non suffisante en général) pour que l'équation (22)

admette une solution  $f$  est  $\langle T, g \rangle = 0$  pour toute distribution  $T$  invariante par  $X$ . L'espace  $\mathcal{D}'_X(M)$  des distributions invariantes par  $X$  s'identifie donc naturellement au dual topologique de l'espace  $H^1_{\mathcal{F}}(M)$ .

Revenons à notre flot  $\mathcal{F}$  sur la variété de Hopf  $M = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ . Il peut être défini par n'importe quel champ non singulier dont les feuilles sont les courbes intégrales. Un tel champ s'écrit en coordonnées sur  $\widetilde{M}$  sous la forme  $\widetilde{X} = a(z, t) \frac{\partial}{\partial t}$  où  $a$  est une fonction  $C^\infty$  partout non nulle et vérifiant la condition d'invariance  $a(\lambda z, \lambda t) = \lambda a(z, t)$ , par exemple  $a(z, t) = \sqrt{\|z\|^2 + t^2}$ . Du théorème 3.1 on tire donc le :

**4.4. Corollaire.** *Pour un champ  $X$  définissant le feuilletage  $\mathcal{F}$ , l'espace  $\mathcal{D}'_X(M)$  des distributions  $X$ -invariantes est naturellement isomorphe au dual topologique de  $H^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1) = C^\infty(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ , donc à l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$  sur la variété de Hopf  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ .*

## 5. Appendice

Il est bien connu que le premier groupe de cohomologie feuilletée d'un flot linéaire sur le tore  $\mathbb{T}^2$  à pente un irrationnel de Liouville est un espace vectoriel topologique non séparé. Et souvent, quand la question se pose à cet effet, curieusement tout le monde cite cet exemple ! Mais ça peut se produire même lorsque les feuilles sont fermées et que le feuilletage est presque une fibration, c'est le cas du feuilletage  $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$  : on a vu que  $H^1_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\widetilde{M})$  s'identifie au quotient  $C^\infty(\mathbb{E}^*)/C^\infty(\mathbb{E})$  dont nous avons affirmé qu'il n'est pas séparé. L'objet de cet appendice est de justifier cela en montrant que l'espace  $C^\infty(\mathbb{E})$  n'est pas fermé dans  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$ .

### 5.1. L'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{E}^*)$

Soient  $\lambda$  un nombre réel tel que  $\lambda > 1$ . Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $C_k$  la couronne de  $\mathbb{E}^*$  donnée par  $C_k = \{z \in \mathbb{E} : \lambda^{-k} \leq \|z\| \leq \lambda^k\}$ . Alors la famille  $\{C_k\}$  est une suite croissante de compacts telle que  $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \mathbb{E}^*$ .

Pour un multi-indice  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ , on note  $|s| = s_1 + \dots + s_n$  sa longueur et  $D^s$  l'opérateur différentiel  $\frac{\partial^{|s|}}{\partial^{s_1} z_1 \dots \partial^{s_n} z_n}$ . Pour  $k, r \in \mathbb{N}$  et  $f \in C^\infty(\mathbb{E}^*)$ , on pose :

$$(23) \quad \rho_{k,r}(f) = \sum_{|s| \leq r} \sup_{z \in C_k} |D^s f(z)|.$$

On obtient ainsi une famille dénombrable filtrante de semi-normes sur l'espace  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$ . Elle y définit une topologie  $\mathcal{T}$  qui en fait un espace de Fréchet. Une suite de fonctions  $f_p$  dans  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$  converge vers  $f \in C^\infty(\mathbb{E}^*)$  au sens de cette topologie si, pour tous  $k, r \in \mathbb{N}$ , la suite numérique  $\rho_{k,r}(f_p - f)$  (indexée par  $p$ ) tend vers 0.

### 5.2. Le sous-espace $C^\infty(\mathbb{E})$ n'est pas fermé dans $C^\infty(\mathbb{E}^*)$

Pour le montrer, nous allons exhiber explicitement une suite de fonctions dans  $C^\infty(\mathbb{E})$  qui converge au sens de la topologie  $\mathcal{T}$  vers une fonction  $f$  dans  $C^\infty(\mathbb{E}^*) \setminus C^\infty(\mathbb{E})$ .

Soit  $\phi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  ne se prolongeant pas en fonction  $C^\infty$  sur  $[0, +\infty[$ . (On peut penser par exemple à  $\phi(t) = |t|$ ,  $\phi(t) = \sqrt{t}$ ,  $\phi(t) = \frac{1}{t}$  ou...) On pose :

$$(25) \quad f(z) = \phi(\|z\|^2) \quad \text{et} \quad f_p(z) = \phi\left(\|z\|^2 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*.$$

Il est évident que, pour tout  $p \geq 1$ , la fonction  $f_p$  est dans  $C^\infty(\mathbb{E})$  ; par contre  $f$  est dans  $C^\infty(\mathbb{E}^*)$  mais pas dans  $C^\infty(\mathbb{E})$ .

On va indiquer rapidement comment montrer que la suite  $(f_p)$  converge vers  $f$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ . Un calcul facile mais lourd montre que, pour tout  $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}^n$ , on a :

$$D^s f(z) = \sum_{\ell=0}^{|s|} a_\ell(z) \phi^{(\ell)}(\|z\|^2) \quad \text{et} \quad D^s f_p(z) = \sum_{\ell=0}^{|s|} a_\ell(z) \phi^{(\ell)}\left(\|z\|^2 + \frac{1}{p}\right)$$

où  $a_\ell$  est une fonction polynomiale en  $z_1, \dots, z_n$  et  $\phi^{(\ell)}$  désigne la dérivée d'ordre  $\ell$  de la fonction  $\phi$  (sur  $]0, +\infty[$  bien sûr). On se met sur l'un des compacts  $C_k$ . Là, encore une fois, un calcul facile mais un peu long, usant du théorème des accroissements finis appliqué à chacune des fonctions  $\phi^{(\ell)}$  sur l'intervalle  $[\|z\|^2, \|z\|^2 + \frac{1}{p}]$  donne :

$$\sup_{z \in C_k} |D^s f_p(z) - D^s f(z)| \leq \left\{ \sum_{\ell=0}^{|s|} \left( \sup_{z \in C_k} |a_\ell(z)| \right) \left( \sup_{z \in C_k} |\phi^{(\ell+1)}(z)| \right) \right\} \frac{1}{p}.$$

D'où :

$$(26) \quad \rho_{k,r}(f_p - f) \leq \left\{ \sum_{|s| \leq r} \sum_{\ell=0}^{|s|} \left( \sup_{z \in C_k} |a_\ell(z)| \right) \left( \sup_{z \in C_k} |\phi^{(\ell+1)}(z)| \right) \right\} \frac{1}{p} \leq \frac{C}{p}$$

où  $C$  est une constante strictement positive qui ne dépend que de  $\phi$ ,  $k$  et  $r$ . Ceci montre que  $f_p$  converge vers  $f$  pour toute semi-norme  $\rho_{k,r}$ . Autrement dit, la suite  $(f_p)$  converge vers  $f$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ .  $\diamond$

## Références

- [DE] DEGHAN-NEZHAD, A. & EL KACIMI ALAOU, A. *Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov*. Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 59 N 4. (2007), 1105-1134.
- [Ek] EL KACIMI ALAOU, A. *Sur la cohomologie feuilletée*. Compositio Mathematica 49, (1983), 195-215.
- [MM] MATSUMOTO, S. & MITSUMATSU, Y. *Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 23, (2003), 1839-1866.
- [Su] SULLIVAN, D. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*. Invent. Math. 36, (1978), 225-255.
- [Va] VAISMAN, I. *Cohomology and Differential Forms*. M. Dekker, (1973).

Aziz EL KACIMI ALAOU  
 Univ. Polytechnique Hauts-de-France  
 EA 4015 - LAMAV  
 FR CNRS 2956  
 F-59313 Valenciennes Cedex 9, France  
 aziz.elkacimi@uphf.fr