# Les pavages du Caire

A. El Kacimi

Un *pavage* $\mathcal{P}$ est une partition du plan en polygones (convexes ou non) ne pouvant ni se chevaucher ni laisser de place vide. Ses *symétries* sont des mouvements du plan euclidien qui consistent à pousser, faire tourner, renverser, mais tout en préservant le décor. Elles se composent, donnent lieu à de nouvelles symétries et forment un groupe d'isométries du plan : c'est le groupe des *automorphismes* de $\mathcal{P}$ qu'on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})$. Le type de pavage qu'on connaît le plus (qu'on voit comme carrelage par exemple) est construit à l'aide de pavés tous isométriques ; on dit qu'il est *monoiédral*. La classification des *groupes paveurs* est maintenant établie : il y en a 17 exactement.

**Une question se pose** : *quels sont les polygones qui donnent des pavages monoiédraux* ?

• Ivan Niven a démontré dans [*Convex polygons that cannot tile the plane.* American Mathematical Monthly, Vol. 85 (1978), 785-792] qu'un polygone convexe ayant un nombre de côtés supérieur ou égal à 7 ne pave jamais. Il faut donc se limiter au triangle, au quadrilatère, au pentagone et à l'hexagone.

• Un parallélogramme pave toujours le plan. Par suite tout triangle pave aussi : il suffit de prendre deux exemplaires du même triangle, de les coller de façon à obtenir un parallélogramme et paver ensuite.

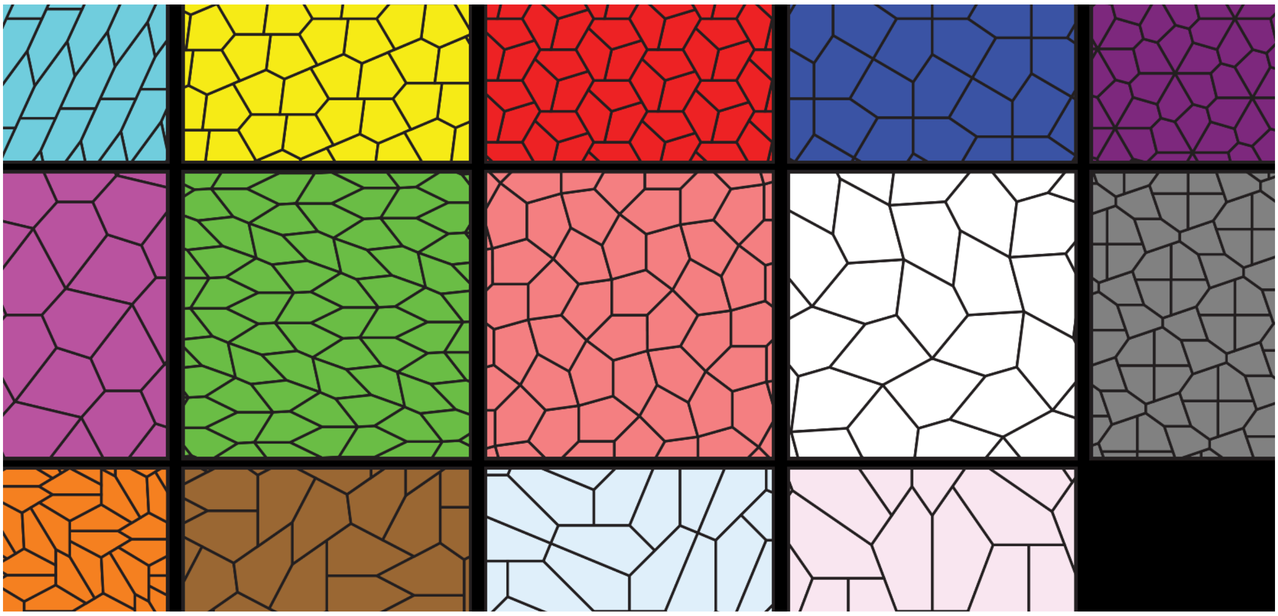
• Tout quadrilatère (convexe ou non) pave le plan. Et on peut même le faire de façon périodique, c'est-à-dire que le groupe des automorphismes du pavage contient deux translations linéairement indépendantes.

• Un hexagone convexe $\Delta = ABCDEF$ pave si, et seulement si, il fait partie de l'une des classes suivantes :

1) $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 2\pi$ et $CD = FA$.
2) $\widehat{FAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 2\pi$ et $BC = DE$ et $CD = FA$.
3) $\widehat{FAB} + \widehat{BCD} + \widehat{DEF} = \frac{2\pi}{3}$ et $AB = BC$, $CD = DE$ et $EF = FA$.

• Reste le cas du pentagone. Jusqu'à ce jour on connaît 14 classes de pentagones qui pavent (voir la liste dans [J.-P. Delahaye : *Les pavages pentagonaux : une classification qui s'améliore* dans *Pour la Science* 432, octobre 2013]). Mais on ne sait toujours pas s'il n'y a que ceux-là. La classe 2 par exemple consiste en les pentagones convexes $\Delta = ABCDE$ (en jaune dans le dessin qui suit tiré de Wikipédia) tels que :

$$\begin{cases} \widehat{EAB} + \widehat{ABC} + \widehat{CDE} = 2\pi \\ CD = AE. \end{cases}$$



Lorsque $\Delta$ vérifie en plus $BC = CD = DE = EA$ et $\widehat{AED} = \widehat{BCD} = \frac{\pi}{2}$, on dit que $\Delta$ est un *pavé du Caire* ; les pavages qu'on construit avec sont appelés *pavages du Caire*. L'appellation vient du fait qu'on en trouve dans une avenue de cette ville.

Dans ce texte, on va juste voir que, dans la classe 2 des pavages par pentagones, ceux du Caire constituent une famille $\mathcal{P}_t$ bien particulière et qu'on peut paramétrer par $t \in ]0,1[$. On dira aussi un mot de quelques cas particuliers et des limites de $\mathcal{P}_t$ lorsque $t$ tend vers 0 ou vers 1.

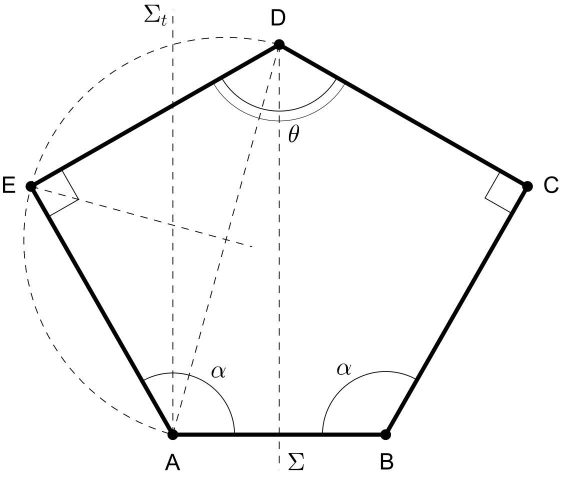
## 1. La famille de pentagones

**1.1.** Soit $t \in ]0,1[$. On se donne deux droites $\Sigma$ et $\Sigma_t$ parallèles et distantes de $t$. On choisit un point $D$ sur $\Sigma$ et le point $A$ sur $\Sigma_t$ tel que $AD = \sqrt{2}$. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe le cercle de diamètre $[AD]$ en un point $E$. Ainsi le triangle $AED$ est isocèle (chacun de ses côtés égaux vaut 1) et rectangle en $E$. Son symétrique $BCD$ par rapport à la droite $\Sigma$ lui est isométrique et est ainsi un triangle isocèle et rectangle en $C$.

**1.2.** Le pentagone $\Delta_t = ABCDE$ a quatre côtés égaux $BC = CD = DE = EA = 1$ ; le cinquième $AB$ a pour longueur $2t$. Les deux angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{BCD}$ sont droits et $\widehat{BAE}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux. Posons $\alpha = \widehat{BAE} = \widehat{ABC}$ et $\theta = \widehat{CDE}$. On a :

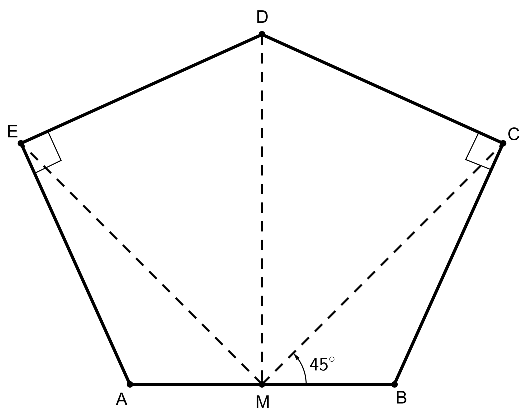
$$2\alpha + \theta = 2\pi$$

qui est une relation-clé pour pouvoir paver comme on le verra par la suite (le dernier dessin du texte montre bien ce que c'est).




### 1.3. Deux cas particuliers

• Lorsque $t = \frac{1}{2}$, le pentagone $\Delta_{1/2}$ est équilatéral (tous ses côtés sont égaux). Sa construction peut se faire aussi d'une autre façon. On part d'un segment $[AB]$ tel que $AB = 1$. De son milieu $M$ on trace deux segments $[MC]$ et $[ME]$ tels que $AE = BC = AB$ et les mesures des angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{EMA}$ soient égales à $\frac{\pi}{4}$ (ou 45 degrés) ; l'angle $\widehat{EMC}$ est donc droit. Les perpendiculaires menées par $C$ et $E$ respectivement à $(BC)$ et $(AE)$ se coupent en un point $D$.




Montrons que $\Delta_{1/2} = ABCDE$ est équilatéral. On sait que $EA = AB = BC$. Reste juste à montrer que $ED = CD = BC$. Par symétrie par rapport à l'axe $(MD)$ on a $ED = CD$ ; il suffit donc d'établir l'égalité $BC = CD$. Comme les angles $\widehat{BMD}$ et $\widehat{BCD}$ sont droits, le quadrilatère $MBCD$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ ; donc les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CMD}$ (qui interceptent le même arc dans le cercle $\mathcal{C}$) sont égaux. Par suite l'angle $\widehat{CBD}$ vaut $\frac{\pi}{4}$ ; comme le triangle $DBC$ est rectangle en $C$ (par construction), l'angle $\widehat{BDC}$ vaut aussi $\frac{\pi}{4}$, ce qui montre que $BCD$ est isocèle de base $[BD]$ et donc $BC = CD$.

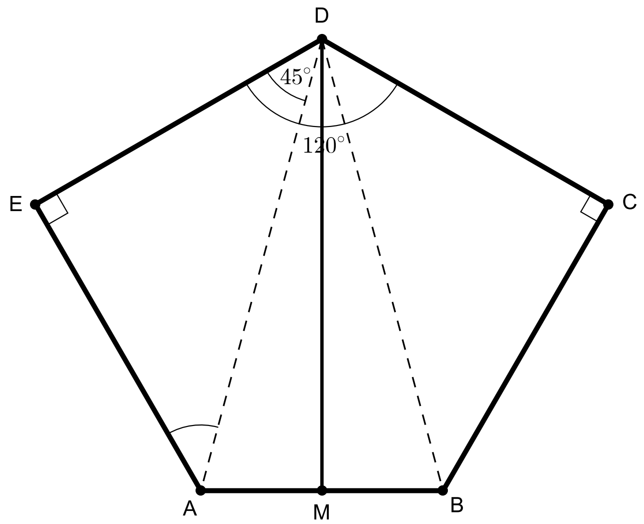
Un dessin approximatif pourrait laisser penser que les angles égaux $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAE}$ mesurent 120 degrés. Ce n'est pas le cas comme on va le voir en calculant le cosinus de l'angle $\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{MBC}$. Pour simplifier l'écriture, posons $\alpha_1 = \widehat{MBD}$ et $\alpha_2 = \widehat{DBC}$ (qui vaut $\frac{\pi}{4}$). On a :

$$\cos\alpha_1 = \frac{MB}{BD} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

et par suite $\sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{14}}{4}$. D'où :

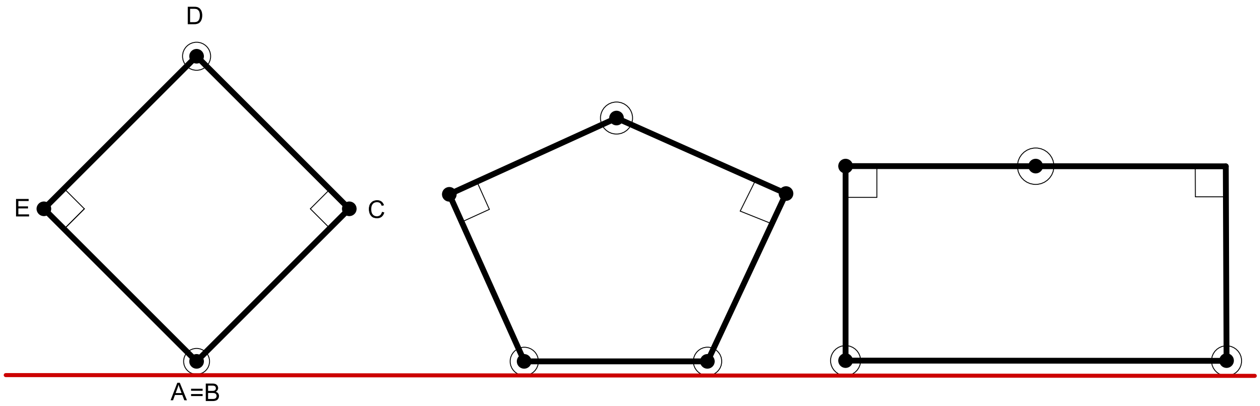
$$\cos\alpha = \cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{7}}{4}.$$

• Le deuxième cas particulier donne $\theta = \alpha = \frac{2\pi}{3}$. La valeur de $t$ correspondante est $t = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Le pentagone $\Delta_t$ associé ne saurait donc être équilatéral.




• Quand $t$ tend vers 0, le côté $AB$ tend vers son milieu et par suite le pentagone $\Delta_t$ tend vers un carré de côté 1. Quand $t$ tend vers 1, le côté $AB$ tend vers 2 et l'angle $\widehat{CDE}$ s'aplatit ; $\Delta_t$ tend alors vers un rectangle de longueur 2 et de largeur 1.

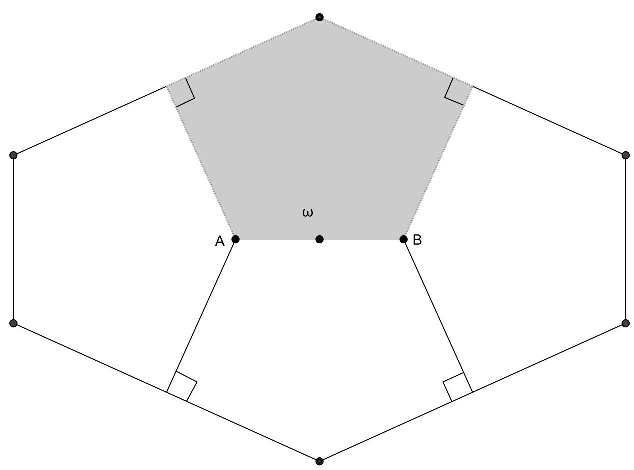
On peut réaliser la déformation en prenant deux équerres dont les côtés adjacents à l'angle droit sont de longueur 1. On colle l'extrémité d'un côté de la première sur son homologue de la deuxième de façon à ce que le point soit mobile (point $D$) ; sur les autres extrémités on met deux petites roues sur lesquelles on fait reposer le système sur une droite. Pour $t = 0$ ces deux roues sont confondues et on a un carré ; le point $D$ étant à la hauteur $\sqrt{2}$. Pour aller vers les formes intermédiaires jusqu'au rectangle, on appuie sur le point mobile qui joint les deux équerres (voir le dessin ci-dessous) : les points $A$ et $B$ se séparent et forment un segment $[AB]$ dont la longueur passe de 0 à 2 (le point $D$ est alors à la heuteur 1).




$t = 0$ $t = 1/2$ $t = 1$

## 2. La famille de pavages

**2.1.** On fixe $t \in ]0, 1[$. On prend quatre exemplaires isométriques du pentagone $\Delta_t$. On les dispose comme dans le dessin qui suit (dans lequel on a pris $\Delta_t$ équilatéral pour simplifier). On obtient un hexagone $\mathcal{H}_t$ ayant le point $\omega$ (milieu du segment $AB$) comme centre de symétrie.




L'hexagone $\mathcal{H}_t$ permet de paver le plan (*cf.* [A. El Kacimi : *Géométrie euclidienne élémentaire*. Collection *Références Sciences*, Éditions *Ellipses*, 2012]). Le pavage obtenu $\mathcal{P}_t$ est un pavage du Caire. Les pavages du Caire forment donc une famille $\mathcal{P}_t$ paramétrée par l'intervalle $]0, 1[$. $\square$

**2.2.** Pour $t_1 \neq t_2$, les pentagones $\Delta_{t_1}$ et $\Delta_{t_2}$ ne sont pas semblables. Les pavages $\mathcal{P}_{t_1}$ et $\mathcal{P}_{t_2}$ correspondants ne sont donc pas équivalents bien qu'ils aient la "même combinatoire".