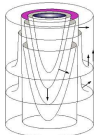


# *Feuilletages : exemples en vrac !*

AZIZ EL KACIMI  
Université Polytechnique Hauts-de-France

**Séminaire Inter-Universitaire de Géométrie**  
Marrakech 27 novembre 2021



## *PETITE INTRODUCTION*

Soit  $G$  une grandeur qui varie dans le temps : à l'instant  $t$ , elle prend une certaine valeur  $G(t)$ . Elle peut être par exemple :

- la population d'un pays (on mesure  $t$  en années) ;
- la température d'un corps (on mesure  $t$  en minutes) ;
- une population de bactéries (on mesure  $t$  en tranches de 20 mn) ;
- un capital déposé en épargne (on mesure  $t$  en mois)...

**Problème** : Déterminer l'expression de  $G(t)$  en fonction de  $t$ .

Habituellement, on ne connaît que la valeur  $G_0$  de  $G$  à un instant  $t_0$  et une relation entre  $G$  et sa "variation relativement" à  $t$ , c'est-à-dire sa dérivée  $\frac{dG}{dt}$  (quand elle existe).

L'expérience nous montre que la variation relative  $\frac{dG}{dt}$  de chacune des grandeurs citées est proportionnelle à  $G(t)$  i.e. il existe une constante  $K$  (liée à la nature de la grandeur et déterminée approximativement) telle que  $\frac{dG}{dt}(t) = KG(t)$  ou encore :

$$\frac{dG}{dt}(t) - KG(t) = 0 \quad \text{à tout instant } t.$$

C'est typiquement un exemple d'*équation différentielle* : une relation entre la fonction inconnue (qu'on cherche à déterminer) et sa dérivée (ou certaines de ses dérivées d'ordre supérieur). La solution générale de cette équation est alors :  $G(t) = Ce^{Kt}$  où  $C$  est une constante. Si on connaît la valeur  $G_0$  de  $G$  à l'instant initial  $t_0 = 0$ , on voit alors que  $C = G_0$ . Donc la fonction cherchée est donnée par :

$$G(t) = G_0 e^{Kt} \quad \text{à tout instant } t.$$

De façon générale, soient  $\mathbb{E}$  l'espace euclidien de dimension  $n$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ . Une *équation différentielle* sur  $\Omega$  est une relation de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  est une fonction continue et  $x$  un vecteur de  $\mathbb{E}$  variant en fonction de  $t$  et qu'on cherche à déterminer.

Une *solution* de cette équation est la donnée d'un intervalle ouvert  $J$  de  $\mathbb{R}$  et d'une fonction dérivable  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{E}$  telle que, pour tout  $t \in J$ , on ait :

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

Le *paramètre*  $t$  représente en général le *temps*; cela vient du fait que beaucoup d'équations différentielles proviennent de problèmes de physique, chimie, économie... (on en a donné quelques exemples) dans lesquels la fonction  $\varphi$  décrit les variations d'une certaine grandeur en fonction de  $t$ .

## Exemples

*i) Prenons  $f$  constante égale au vecteur  $a \in \mathbb{E}$ . Alors l'équation différentielle est définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  et toute fonction affine  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  de **direction  $a$**  en est une solution. Toutefois, si on impose à  $\varphi$  de prendre une valeur particulière  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , la solution devient **unique**.*

*ii) Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction continue définie par  $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ . Alors la fonction identiquement nulle  $\varphi = 0$  est solution ; de même, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_\lambda(t) = (t - \lambda)^3$  est une solution qui s'annule pour  $t_0 = \lambda$ .*

Sur l'exemple ii), on voit que, même si on impose la condition  $\varphi(\lambda) = 0$ , la solution n'est pas unique :  $\varphi = 0$  et  $\varphi_\lambda$  sont deux solutions s'annulant en  $\lambda$  !

Pour avoir une solution unique, il faut donc imposer  $\varphi(t_0) = x_0$  qu'on appelle *condition initiale*, ensuite une autre hypothèse sur la fonction  $f$ .

On appelle *problème de Cauchy*, toute équation différentielle ordinaire  $x' = f(t, x)$  avec une condition initiale  $x(t_0) = x_0$  où  $(t_0, x_0) \in \Omega$ .

Ceci signifie qu'on impose à la *courbe intégrale* de passer par le point  $x_0$  à l'instant  $t_0$ . La solution (locale) du problème de Cauchy est donnée par le théorème qui suit qu'on peut attribuer au moins à A. Cauchy, S. Kowaleska et E. Picard. Pour tout  $(t_0, x_0) \in \Omega$  et tous  $\alpha > 0$  et  $\eta > 0$ , on notera  $B = B(x_0, \eta)$  la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $\eta$  et  $J_\alpha$  l'intervalle ouvert  $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ .

## Théorème d'existence

Soient  $(t_0, x_0) \in \Omega$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\eta > 0$  tels que l'adhérence de  $\Omega_0 = J_\varepsilon \times B$  soit contenue dans  $\Omega$ . Supposons  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  lipschitzienne sur  $\Omega_0$ . Posons :

$$M = \sup_{(t,x) \in \Omega_0} |f(t,x)| \quad \text{et} \quad \alpha = \inf\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M}\right).$$

Alors le problème de Cauchy :

$$x' = f(t,x) \quad \text{avec} \quad x(t_0) = x_0$$

admet une **solution**  $\varphi$  sur l'intervalle fermé  $\bar{J}_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  ; elle est **unique** i.e. toute autre solution définie sur  $\bar{J}_\alpha$  est égale à  $\varphi$ .

À quand remonte la découverte des équations différentielles ? Probablement au moment où on a commencé à se poser des questions sur les liens qui existent entre les valeurs d'une grandeur et la manière dont elle varie en fonction des paramètres qui la déterminent !

Dans son livre *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Vladimir Arnold rapporte que I. Newton considère que sa principale découverte tient dans une phrase qu'il a notée sous forme d'anagramme et qui, en langage moderne, dit à peu près ceci :

*“Il est utile de résoudre les équations différentielles !”*



Le contenu de cette phrase est évidemment capital ! Mais depuis cet avènement aucun mathématicien n'est arrivé à atteindre ce but : il est bien connu qu'à l'heure actuelle il n'existe aucune méthode générale d'intégration des équations différentielles ! Dans beaucoup de cas on sait le faire avec une méthode particulière, bien propre à la situation, et toutes ces méthodes peuvent différer totalement les unes des autres.

À défaut de cela, certains mathématiciens se sont mis à étudier les propriétés géométriques (ou topologiques) et le comportement asymptotique de leurs variétés intégrales. C'est la naissance de la théorie des *feuilletages* : l'étude qualitative des équations différentielles. Elle a été initiée par les travaux de H. Poincaré, I. Bendixson et développée plus tard par C. Ehresmann, G. Reeb, A. Haefliger et beaucoup d'autres. Depuis lors, le sujet est devenu un large champ d'investigation en mathématiques.

**On peut donc dire que**

**La théorie des feuilletages est née  
de l'incapacité des mathématiciens à  
résoudre explicitement  
les équations différentielles !**

# 1. Préliminaires

Définissons d'abord ce qu'est une *variété*. Un objet important en mathématiques est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . Le fait qu'il existe dessus un système de coordonnées globales facilite la formulation des problèmes d'analyse. Mais beaucoup de problèmes sont formulés sous des contraintes, par exemple :

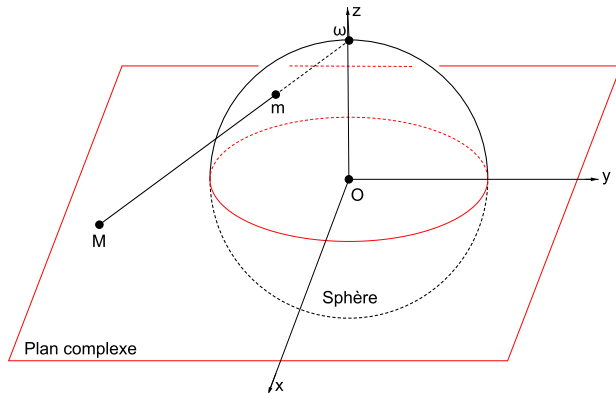
Résoudre le problème  $(P)$  dans  $\mathbb{R}^d$   
 sous la contrainte  $x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1$ .

Ce problème se pose en fait sur une partie fermée de  $\mathbb{R}^d$  et non sur  $\mathbb{R}^d$  tout entier, en l'occurrence la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Un espace topologique  $M$  (avec un minimum de bonnes propriétés) donné localement par des conditions similaires se comporte comme un espace euclidien ; on dira que c'est une *variété topologique* : pour chaque point  $x$  de  $M$  il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et un homéomorphisme  $\varphi$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  sur  $U$ .

Pour connaître un point  $x$  de  $U$ , il suffit donc de connaître les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  de son image réciproque  $\varphi^{-1}(x)$ . Pour cette raison on dira que  $U$  est un *ouvert de coordonnées locales* de  $M$  au voisinage de  $x$ . La paire  $(U, \varphi)$  est appelée *carte locale* et  $(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}(x)$  seront les *coordonnées* de  $x$ . Si  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont deux cartes locales telles que l'intersection  $U \cap V$  soit non vide alors un point  $x \in U \cap V$  sera repéré par ses coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $U$  et ses coordonnées  $(x'_1, \dots, x'_n)$  dans  $V$ . On doit avoir la condition :

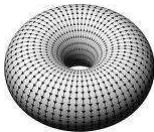
$$(x'_1, \dots, x'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

L'application  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est appelée *changement de coordonnées* de la carte  $(U, \varphi)$  à la carte  $(V, \psi)$ . Lorsque tous ces changements de coordonnées sont de classe  $C^\infty$ , on dira que  $M$  est une *variété différentiable*.



La *projection stéréographique* relative au pôle Nord  $\omega$  réalise un homéomorphisme analytique entre le plan complexe et l'ouvert  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\omega\}$  de la sphère  $\mathbb{S}^2$ .

## Surfaces orientables !



Tore non noué

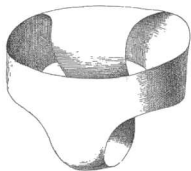


Tore noué



Surface de genre 3

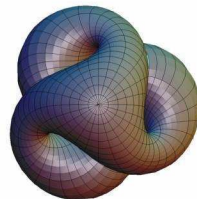
## Surfaces non orientables !



Le slip de Möbius  
(difficile à porter !)



Bouteille de Klein

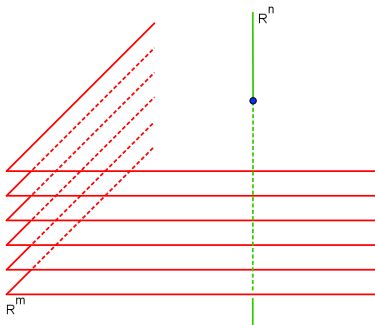


Surface de Boy  
(immersion du plan  
projectif réel dans  
l'espace euclidien)

*Dans l'enfer topologique, la bière est  
contenue dans des bouteilles de Klein !*

## 2. Feuilletages

Un *feuilletage* est une structure géométrique sur une variété. Pour comprendre ce que c'est, il est plus commode d'en voir d'abord le *modèle local*. Jetons un coup d'œil sur l'espace euclidien  $M = \mathbb{R}^{m+n}$  dessiné ci-dessous :



Feuilletage trivial sur  $\mathbb{R}^{m+n}$  défini par le système différentiel  $dy_1 = \dots = dy_n = 0$



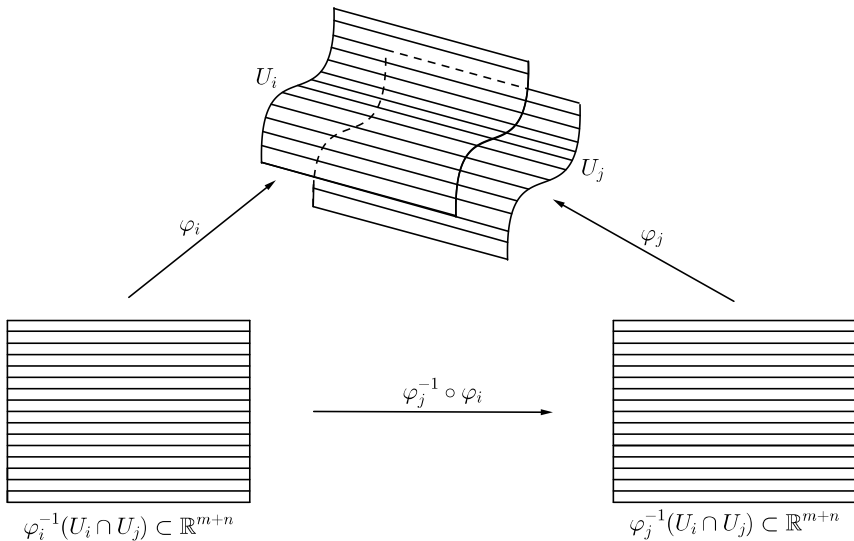
Il peut être vu comme le produit  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Sa topologie usuelle est le produit des topologies des deux facteurs ; elle en fait une variété différentiable connexe de dimension  $m + n$ . Mais on peut aussi l'équiper de la topologie produit de la topologie usuelle sur le premier facteur et la **topologie discrète** sur le second ; il devient alors une variété différentiable de dimension  $m$  non connexe, ses composantes connexes étant les sous-espaces horizontaux définis par le système différentiel  $dy_1 = \dots = dy_n = 0$  qui peuvent être vus comme des **feuilles**. On voit donc que l'espace  $M$  est équipé de deux topologies : la topologie usuelle et la **topologie des feuilles**.

Soit maintenant  $M$  une variété (connexe) de dimension  $m + n$ . Intuitivement on peut définir un **feuilletage** de dimension  $m$  (et de codimension  $n$ ) sur  $M$  comme une structure géométrique telle que autour de chaque point on retrouve quelque chose qui ressemble à ce dessin. La première définition est alors la suivante :

## Définition

Soit  $M$  une variété (connexe) de dimension  $m + n$ . Un **feuilletage**  $\mathcal{F}$  de codimension  $n$  (ou de dimension  $m$ ) sur  $M$  est la donnée d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  et, pour tout  $i$ , d'un difféomorphisme  $\varphi_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow U_i$  tel que, sur toute intersection non vide  $U_i \cap U_j$ , le difféomorphisme de changement de coordonnées  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \in \varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow (x', y') \in \varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$  soit de la forme :  $x' = \varphi_{ij}(x, y)$  et  $y' = \gamma_{ij}(y)$ .

Dans le changement de coordonnées celles qui sont transverses ne dépendent pas de celles qui sont tangentes ! Cela signifie que la structure feuilletée sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  montrée sur le premier dessin est préservée !



La variété est ainsi décomposée en sous-variétés connexes de dimension  $m$ ; chacune d'elles est appelée *feuille* du feuilletage  $\mathcal{F}$ .

On va donner une seconde définition qui se prête mieux à l'introduction de ce qu'on appelle une *structure transverse*.

### Définition

Un *feuilletage* de codimension  $n$  sur  $M$  est la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$ , de submersions  $U_i \xrightarrow{f_i} T$  au-dessus d'une variété  $T$  de dimension  $n$  et pour chaque intersection  $U_i \cap U_j$  non vide, d'un difféomorphisme  $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \subset T \rightarrow f_j(U_i \cap U_j) \subset T$  de telle sorte qu'on ait  $f_j(x) = \gamma_{ij} \circ f_i(x)$  pour  $x \in U_i \cap U_j$ . On dira que le triplet  $\{U_i, f_i, T, \gamma_{ij}\}$  est un *cocycle feuilleté* définissant  $\mathcal{F}$ .

*D'abord des exemples familiers pour  
se mettre en appétit !*



Un bon plat  
de spaghettis

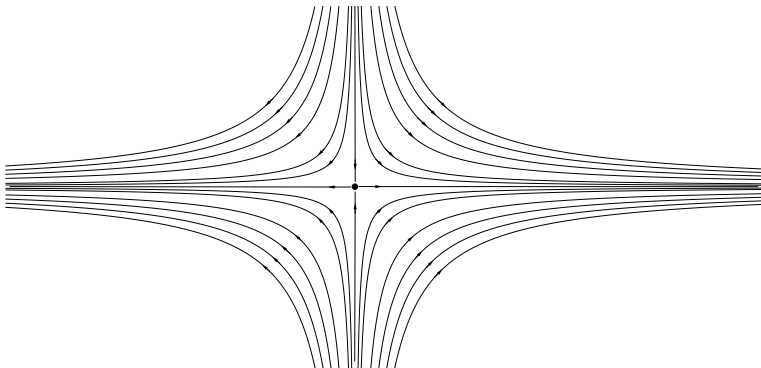


Une pile de crêpes



Une belle laitue !

*Ensuite une équation différentielle dans le plan !*



Courbes intégrales de  $\frac{dx}{dt} = (x_1, -x_2)$ .  
Elles définissent un feuilletage sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

## *Feuilletage angle sur le plan privé de deux points*

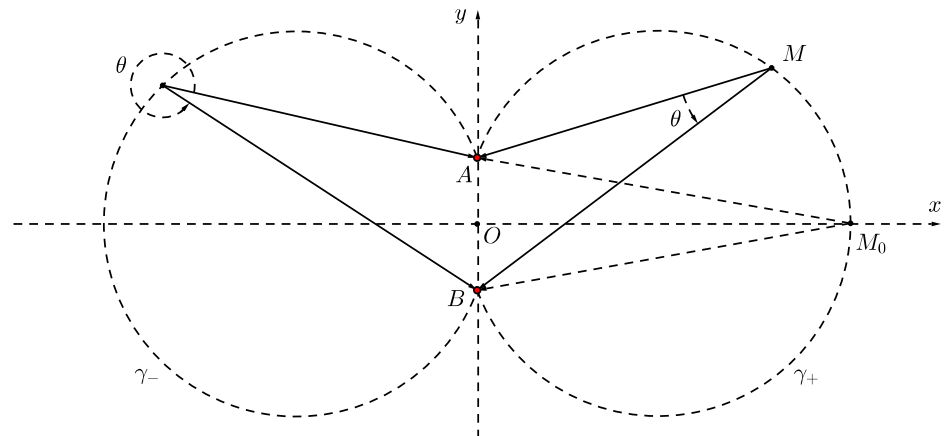
On note  $\mathbb{E}$  le plan euclidien muni d'un repère orthonormé. Soient  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectives  $(0, d)$  et  $(0, -d)$  et  $\Omega$  la partie de  $\mathbb{E}$  obtenue en le privant des deux demi-droites fermées  $\delta^+ = \{x = 0 \text{ et } y \geq d\}$  et  $\delta^- = \{x = 0 \text{ et } y \leq -d\}$ . Soit  $\theta$  l'angle orienté  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ ; c'est une fonction :

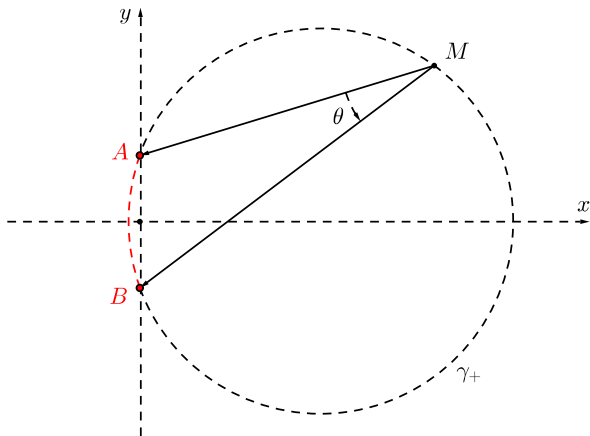
$$\theta : M \in \Omega \longmapsto \theta(M) \in ]0, 2\pi[.$$

Comme on le voit sur le dessin ci-dessous :

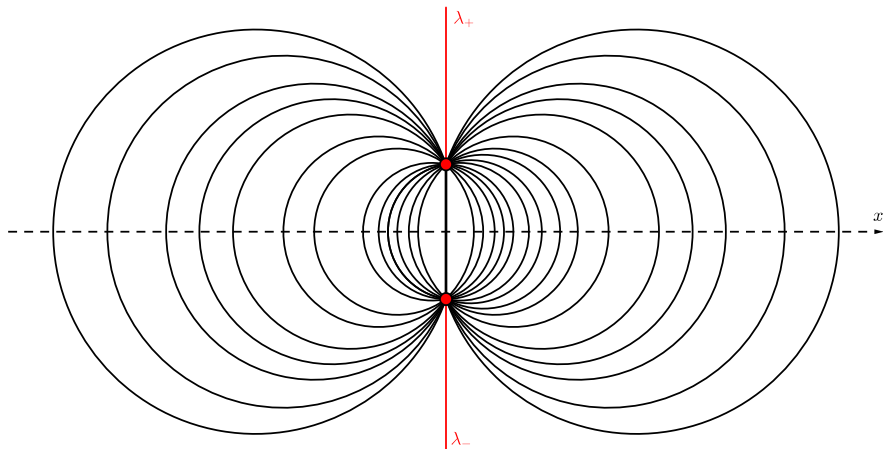
- $\theta \in ]0, \pi[$  si  $M$  est dans le demi-plan ouvert du côté droit de la droite  $(AB)$ ;
- $\theta \in ]\pi, 2\pi[$  si  $M$  est dans le demi-plan ouvert du côté gauche;
- $\theta = \pi$  si  $M$  est sur le segment ouvert  $\delta^0 = ]AB[$ .



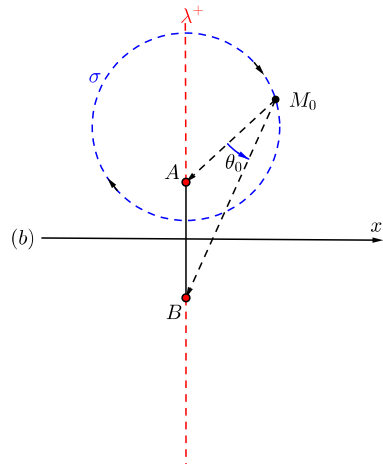
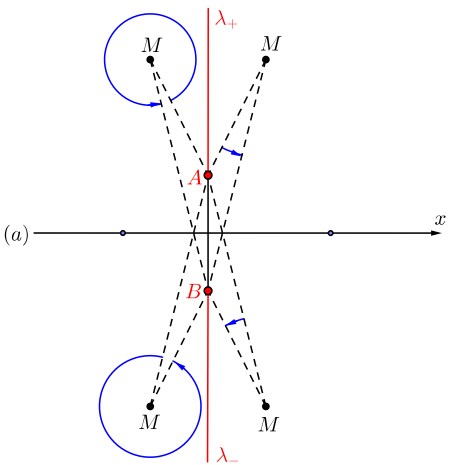




- Les courbes de niveau de la fonction  $\theta : M \in \Omega \longrightarrow \theta(M) \in ]0, 2\pi[$  partitionnent l'ouvert  $\Omega$  et forment un *feuilletage*  $\mathcal{F}$ .



- On peut étendre  $\mathcal{F}$  à l'ouvert plus grand  $\Omega' = \mathbb{E} \setminus \{A, B\}$  en un feuilletage  $\mathcal{F}'$  en rajoutant deux autres feuilles : les deux demi-droites ouvertes  $\lambda_+ = \{x = 0 \text{ et } y > d\}$  et  $\lambda_- = \{x = 0 \text{ et } y < -d\}$ .
- La fonction  $\theta$  définit le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$ . Si on veut la prolonger en une "fonction" sur  $\Omega'$  décrivant l'extension  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$ , on calcule sa limite lorsque  $M$  tend vers  $\lambda_+ \cup \lambda_-$  (au lecteur de donner un sens à cela). Mais cette limite est 0 du côté  $x > 0$  et  $2\pi$  du côté  $x < 0$  (cf. dessin ci-dessous).



- Soit  $M_0$  un point de  $\Omega$  pour lequel l'angle  $\theta$  vaut  $\theta_0 \in ]0, \pi[$  par exemple. Si, à partir de  $M_0$ , on fait décrire à un point  $M$  le cercle  $\sigma$  dans le sens indiqué (voir figure (b)), il passe par le segment ouvert  $]AB[$  où  $\theta = \pi$ , ensuite sur la demi-droite ouverte  $\lambda^+$  où  $\theta = 2\pi$ ; s'il revient sur  $M_0$ ,  $\theta$  vaut  $\theta_0 + 2\pi$ . En refaisant un tour, il vaudra  $\theta_0 + 4\pi$  et ainsi de suite. Si on fait tourner  $M$  (à partir de  $M_0$ ) sur  $\sigma$  dans le sens contraire (à celui indiqué sur (b)), sur la semi-droite  $\lambda^+$  l'angle  $\theta$  vaudra  $0$ , puis sur  $]AB[$  il vaudra  $-\pi$ , de retour sur  $M_0$ ,  $\theta = \theta_0 - 2\pi$  et ainsi de suite.
- Sur l'ouvert  $\Omega'$ , la fonction  $\theta'$  (extension de  $\theta$ ) censée définir  $\mathcal{F}'$  est donc *multiforme*. Ôter les deux demi-droites fermées  $\delta_+$  et  $\delta_-$  de  $\mathbb{E}$  pour obtenir  $\Omega$  c'est faire des *coupures* sur  $\Omega'$ ; et restreindre  $\theta'$  à  $\Omega$  tel qu'on l'a fait, c'est en donner une *détermination*.

- Le fait que la “fonction”  $\theta'$  soit multiforme vient de ce que  $\Omega'$  n'est pas simplement connexe : son *groupe fondamental* est le groupe libre à deux générateurs  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  engendré, par exemple, par deux cercles de centres respectifs  $A$  et  $B$ , chacun de rayon  $\varepsilon < \frac{d}{2}$ .
- Deux déterminations (considérées à valeurs réelles) diffèrent par un multiple entier (relatif) de  $2\pi$ . Si donc on compose  $\theta'$  à la projection canonique  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (quotient du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  par son sous-groupe  $2\pi\mathbb{Z}$ ), on obtient une application  $\Theta = p \circ \theta' : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}^1$  parfaitement définie.
- L'application  $\Theta : \Omega' \rightarrow \mathbb{S}^1$  est une *submersion i.e.* sa différentielle  $d\Theta(M)$  au point  $M$  est une application linéaire surjective pour tout  $M \in \Omega'$ . Pour  $\tau \neq e$  ( $e$  est l'image par  $p$  du sous-groupe  $2\pi\mathbb{Z}$ ), ses *fibres*  $F_\tau = \Theta^{-1}(\tau)$  sont les feuilles de  $\mathcal{F}'$  et pour  $\tau = e$ ,  $F_e$  est constituée des deux feuilles  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$ .

Déjà tout au début de la théorie des feuilletages, le problème de l'existence d'exemples significatifs s'est réellement posé. Il a fallu s'assurer si elle en avait suffisamment pour qu'elle ne reste pas vide ! D'où l'une des premières questions :

*Sous quelles conditions une variété  $M$  (connexe pour simplifier) supporte-t-elle un feuilletage ? Y a-t-il des obstructions de nature topologique, géométrique ou autres ?*

Nous allons commencer à donner les premiers exemples de feuilletages de dimension 1. L'obstruction dans ce cas-là va être très simple à décrire. Nous nous contenterons du cas où la variété  $M$  est une surface compacte orientable.



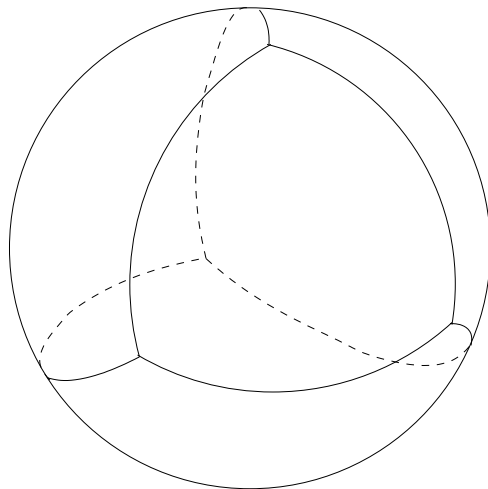
### 3. La dimension 1

Soit  $M$  une surface compacte orientable munie d'une triangulation  $\mathcal{T}$ . Soient  $S$ ,  $A$  et  $F$  respectivement le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le nombre de faces de  $\mathcal{T}$ . Alors l'entier relatif :

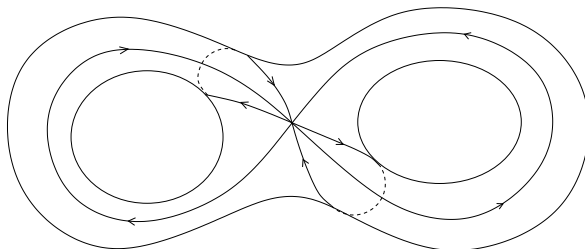
$$\chi(M) = S - A + F$$

ne dépend pas de  $\mathcal{T}$  ; on l'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de  $M$ . C'est un *invariant topologique complet* pour les surfaces :

*Deux surfaces compactes orientables  $M$  et  $M'$  sont homéomorphes si, et seulement si,  $\chi(M) = \chi(M')$ .*



$$\chi(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$



$$\chi(\Sigma_2) = -2$$

De façon générale une surface  $\Sigma_g$  à  $g$  trous a pour caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

## Théorème de Hopf

*Une surface compacte orientable  $\Sigma_g$  (avec  $g \geq 0$ ) admet un champ de vecteurs sans singularité si, et seulement si,  $\chi(\Sigma_g) = 0$ .*

- La sphère  $\mathbb{S}^2$  n'en possède pas. Ceci explique par exemple :
- que quand le vent souffle sur toute la surface de la terre, il y a au moins un point en lequel il ne souffle pas : c'est l'*œil du cyclone* !
  - qu'on ne peut pas peigner les cheveux d'une tête sans produire une *singularité* !



## Théorème

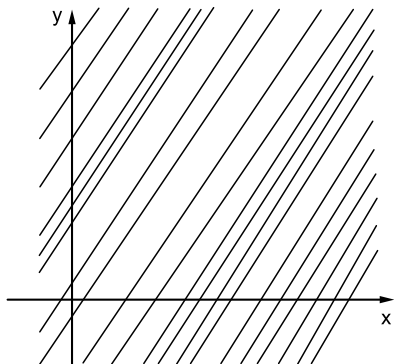
*Une surface compacte orientable  $\Sigma_g$  (avec  $g \geq 0$ ) admet un feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension 1 si, et seulement si  $\chi(M) = 0$ .*

On voit que seul le tore (surface de genre 1) peut être feuilleté par des courbes. Ce n'est le cas ni de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui est de genre 0 ni des surfaces de genre  $g \geq 2$ .

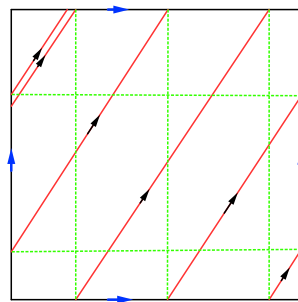
Donnons un exemple sur le tore. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'équation différentielle  $dy - \alpha dx = 0$  dans le plan admet pour courbes intégrales les droites d'équations  $y = \alpha x + c$  où  $c$  est une constante réelle. Chaque valeur de  $c$  détermine donc une droite affine. Lorsqu'on fait varier  $c$  dans tout  $\mathbb{R}$ , on obtient une partition du plan  $\mathbb{R}^2$  en droites parallèles de pente  $\alpha$ . On obtient ainsi un feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Ce feuilletage est invariant sous l'action du réseau  $\mathbb{Z}^2$  :

$$((m, n), (x, y)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + m, y + n) \in \mathbb{R}^2$$

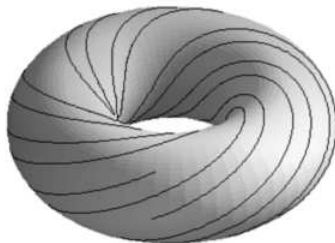
et définit donc un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur la variété quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  qui n'est rien d'autre que le tore  $\mathbb{T}^2$



Courbes intégrales de  
l'équation différentielle  
 $dy - adx=0$

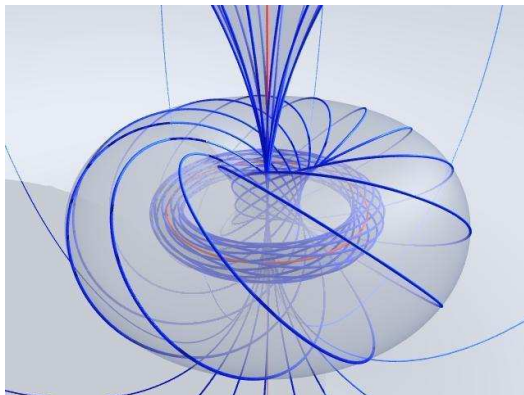


Traces des courbes sur  
un domaine fondamental



Si  $\alpha$  est un nombre rationnel, les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont des courbes fermées toutes diffeomorphes au cercle, sinon à la droite réelle et sont toutes denses dans le tore !

Ce feuilletage sert souvent de test : quand quelqu'un annonce un résultat (sur les feuilletages), on lui demande gentiment d'expliquer d'abord ce que cela donne sur le feuilletage linéaire du tore  $\mathbb{T}^2$ . Il est, en quelque sorte, la tête à claques de la théorie !

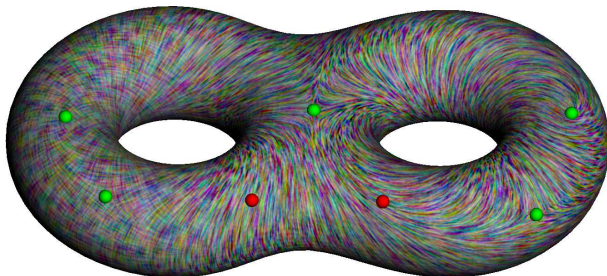


La fibration de Hopf sur la 3-sphère.  
Ses fibres sont des cercles et sa base  
est la droite projective complexe.



*“Où la Forme manque l’Idée n’est plus.  
Chercher l’un, c’est chercher l’autre.”*

Gustave Flaubert (*Correspondance*)



Courbes intégrales d'un champ  
de vecteurs sur une surface de genre 2

## 4. La codimension 1

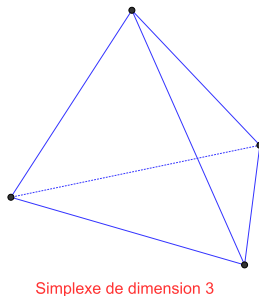
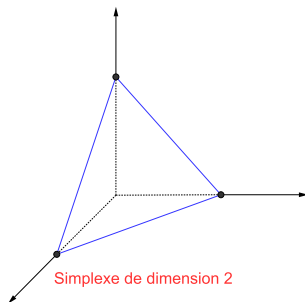
### Le cas général

Soit  $M$  une variété compacte (connexe orientable) de dimension  $n$ . *Sous quelles conditions admet-elle un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 ?*

Comme dans le cas des surfaces, l'obstruction sera aussi la caractéristique d'Euler-Poincaré qui se définit comme suit. On considère une *triangulation*  $\mathcal{T}$  de  $M$  par des simplexes comme ceux dessinés ci-dessous (le *simplexe standard* de dimension  $k$  est l'enveloppe convexe dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{k+1}$  des vecteurs  $e_1, \dots, e_{k+1}$  de la base canonique). Pour chaque  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on note  $m_k$  le nombre de simplexes de dimension  $k$  de cette triangulation  $\mathcal{T}$ . Alors l'entier :

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k m_k$$

ne dépend pas de  $\mathcal{T}$ . Si  $M$  est homéomorphe à  $M'$  alors  $\chi(M) = \chi(M')$ ; la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc un invariant topologique (mais il n'est pas complet en dimension  $\geq 3$ ). Si  $M$  est de dimension impaire,  $\chi(M) = 0$ .



Supposons qu'un tel feuilletage  $\mathcal{F}$  existe et qu'il est orientable. Munissons  $M$  d'une métrique riemannienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  sur chaque espace tangent  $T_x M$  de telle sorte que la famille  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  varie différemment en fonction de  $x \in M$ . Alors il existe sur  $M$  un champ de vecteurs  $\nu$  non singulier et partout orthogonal à  $\mathcal{F}$ . Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  est nulle. La condition  $\chi(M) = 0$  est nécessaire. *Est-elle suffisante ?* C'était une question difficile qui est restée longtemps ouverte. La réponse finale a été donnée par W. Thurston en 1976.

### Théorème

*La variété  $M$  admet un feuilletage de codimension 1 si, et seulement si,  $\chi(M) = 0$ .*

## Le feuilletage de Reeb

C'est une question que H. Hopf a posée en 1935 qui était à l'origine de ce feuilletage :

*Existe-t-il sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  un champ de vecteurs  $X$  partout non nul et orthogonal à son rotationnel  $\text{rot}(X)$  ?*

Si un tel champ existe, la 1-forme différentielle  $\omega$  lui correspondant par l'*isomorphisme musical* (défini par la métrique riemannienne) doit satisfaire la *condition d'intégrabilité* qui suit (et donc définir un feuilletage de dimension 2 sur  $\mathbb{S}^3$ ) :

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

G. Reeb a écrit au sujet de cette question :

*« Ce problème a aussitôt retenu l'attention de Ehresmann qui l'a mis "en conserve" dans un magnifique registre-répertoire que mon maître m'avait autorisé à consulter en 1942. »*

*Il s'est alors mis au travail et a  
résolu le problème en 1944.  
L'acte de naissance de la théorie  
des feuilletages a alors été signé !*

Mais comment Reeb a-t-il procédé ?

1 - D'abord il regarde la sphère  $\mathbb{S}^3$  dans l'espace hermitien  $\mathbb{C}^2$  plutôt que dans  $\mathbb{R}^4$  :  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ .  
Ensuite il remarque qu'il y a un tore plongé dans  $\mathbb{S}^3$  :

$$\mathbb{T}^2 = \partial M_+ = \partial M_- = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2} \right\}.$$

2 - Ce tore disconnecte et partage  $\mathbb{S}^3$  en deux fermés :

$$M_+ = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_1|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$M_- = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 : |z_2|^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$$

difféomorphes tous deux à  $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1$  ( $\mathbb{D}$  est le disque unité ouvert et  $\overline{\mathbb{D}}$  le disque unité fermé).

3 - La sphère  $\mathbb{S}^3$  peut être obtenue en recollant  $M_+$  et  $M_-$  le long de leur bord commun par le difféomorphisme :

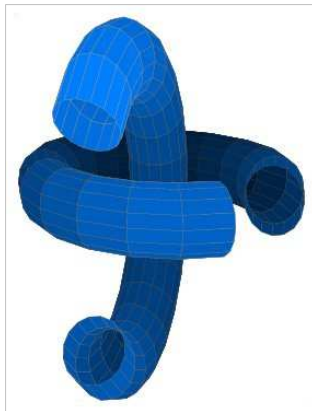
$$(z_1, z_2) \in \partial M_+ \longrightarrow (z_2, z_1) \in \partial M_-$$

*i.e.* on identifie  $(z_1, z_2)$  à  $(z_2, z_1)$  dans la réunion disjointe  $M_+ \amalg M_-$  :

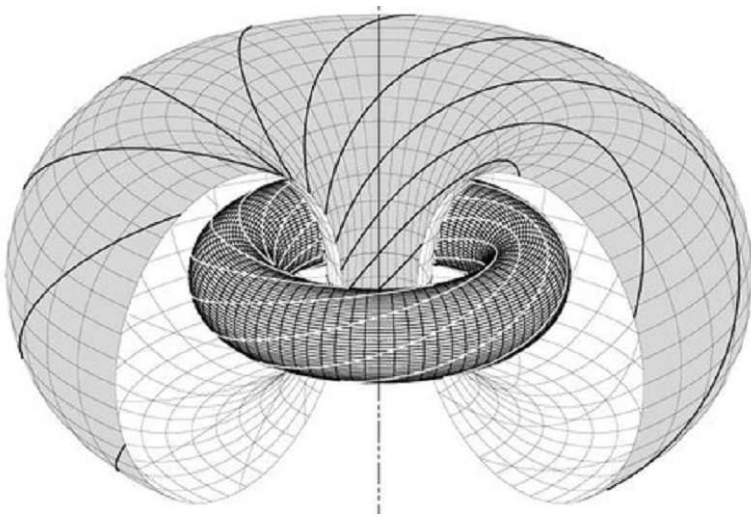
**on recolle deux tores solides en identifiant un méridien du bord du premier à un parallèle du bord du second !**

4 - Il suffit donc de construire un feuilletage sur chacun de ces morceaux de telle sorte que le bord soit une feuille pour que tout se recolle globalement.





La 3-sphère = deux tores solides !

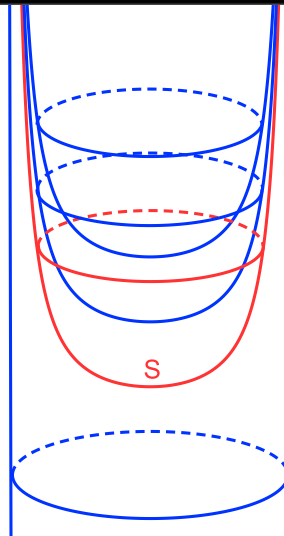


5 - Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{1 - |z|^2}\right).$$

Notons  $t$  la deuxième coordonnée dans  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ . La famille de surfaces  $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$  obtenue en translatant le graphe  $S$  de  $f$  le long de l'axe des  $t$  définit un feuilletage sur  $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ .

Si on rajoute le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{S}^1$  est vu comme le bord de  $\overline{\mathbb{D}}$ , on obtient un feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  de codimension 1 sur  $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$ .



La famille des surfaces  $S_t$ .  
 Feuille du bord = cylindre

6 - Par construction,  $\tilde{\mathcal{F}}$  est invariant par les transformations :

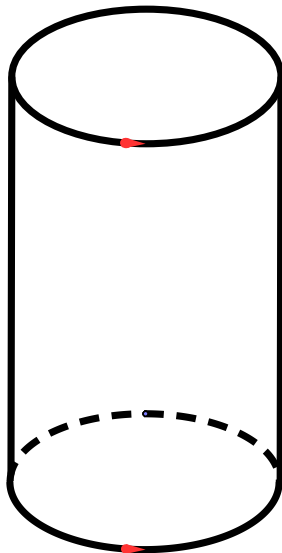
$$(z, t) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} \longmapsto (z, t + 1) \in \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}.$$

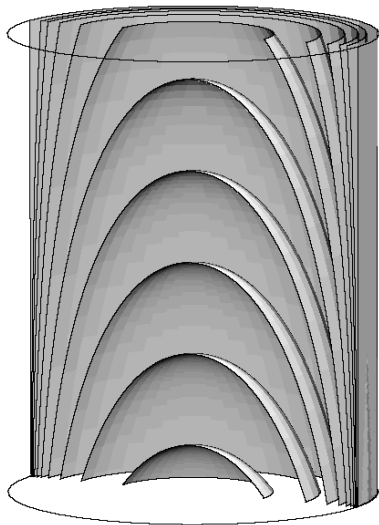
Il induit donc un feuilletage  $\mathcal{F}_0$  sur le quotient :

$$\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R} / (z, t) \sim (z, t + 1) \simeq \overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{S}^1.$$

Il a le bord  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  comme feuille compacte. Toutes les autres sont difféomorphes à  $\mathbb{D}$  lui-même difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .

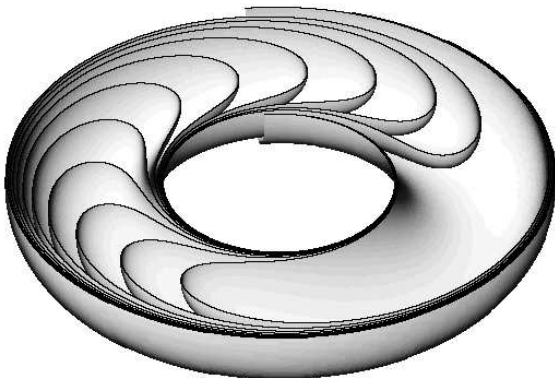
7 - Un domaine fondamental de l'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$  est le cylindre  $\overline{\mathbb{D}} \times [0, 1]$  (*cf.* dessin qui suit).



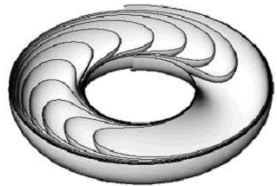
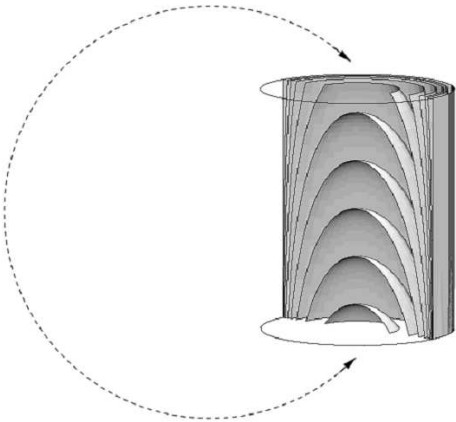








Une coupe au sabre de la composante de Reeb !

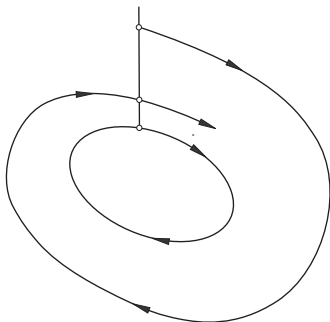


8 - Comme  $M_+$  et  $M_-$  sont difféomorphes à  $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ ,  $\mathcal{F}_0$  définit sur  $M_+$  et  $M_-$  respectivement deux feuilletages  $\mathcal{F}_+$  et  $\mathcal{F}_-$  ; leur recollement le long de la feuille compacte  $\mathbb{T}^2$  donne un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{S}^3$  appelé *feuilletage de Reeb*. Toutes les feuilles sont difféomorphes au plan  $\mathbb{R}^2$  à l'exception de celle qui provient des bords de  $M_+$  et  $M_-$  qui est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$ .

Nous avons vu que cet exemple se construit par chirurgie et ne se voit concrètement que sur les deux morceaux qui constituent séparément la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Sa découverte par G. Reeb a donné un véritable coup de fouet à la théorie. On pourrait dire qu'il est le premier exemple qui a montré qu'elle est véritablement non vide.

## 5. Les feuilles compactes

L'existence d'une solution périodique pour une équation différentielle ordinaire signifie que le système dynamique qu'elle décrit admet un *état d'équilibre*. Pour le feuilletage associé ceci se traduit par l'existence d'une courbe intégrale fermée. Lorsque celle-ci est isolée, on dira que c'est un *cycle limite* (*cf.* dessin ci-dessous) ; cette notion a été introduite par H. Poincaré.



Lorsque la variété est compacte et la dimension du feuilletage qu'elle supporte est strictement supérieure à 1, un état d'équilibre est décrit par une feuille compacte. Par exemple, si la dimension est 2, la sphère  $\mathbb{S}^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  ou une surface  $\Sigma_g$  de genre  $g \geq 2$ ; pour chacune de ces surfaces on peut construire un feuilletage de dimension 2 l'ayant comme feuille compacte. Mais la question reste toutefois de savoir si, lorsqu'on prescrit la codimension et la topologie de la variété ambiante, une feuille compacte existe toujours ! Plus précisément on a la :

Question :

*Soit  $M$  une variété connexe compacte de dimension  $m + n$  munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension  $n$ . Sous quelles conditions  $\mathcal{F}$  admet-il une feuille compacte ?*

Nous avons vu que le feuilletage de Reeb sur la 3-sphère  $\mathbb{S}^3$  possède une feuille compacte difféomorphe à un tore  $\mathbb{T}^2$ . Ceci a amené son auteur en 1948 à poser la :

Question :

*Un feuilletage de codimension 1 sur  $\mathbb{S}^3$  possède-t-il toujours une feuille compacte ?*

S. Novikov a répondu positivement à cette question vers 1965. Plus précisément il a démontré le théorème qui suit :

## Théorème

*Tout feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 sur une variété compacte de dimension 3 ayant un groupe fondamental fini possède une feuille compacte difféomorphe à un tore  $\mathbb{T}^2$ . Plus même : à l'intérieur de cette feuille  $\mathcal{F}$  “est un feuilletage de Reeb”.*

Ce résultat est un véritable tour de force. Il est considéré comme l'un des plus profonds de la théorie des feuilletages.

Remarque : *Maintenant que la conjecture de Poincaré est démontrée on sait ce qu'est une variété  $M$  compacte de dimension 3 à groupe fondamental  $\Gamma = \pi_1(M)$  fini : c'est simplement le quotient  $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$  de la sphère  $\mathbb{S}^3$  par une action libre de  $\Gamma$ .*

On a longtemps pensé que le *Théorème de Novikov* susmentionné pouvait se généraliser à toute sphère impaire  $\mathbb{S}^{2p+1}$ . Très récemment (en juin 2010) [G. Meigniez](#) a annoncé le résultat qui suit :

### Théorème

*Toute variété compacte de dimension  $n \geq 4$  et de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle supporte un feuilletage de codimension 1 dont toutes les feuilles sont denses.*

C'est le cas, par exemple, de toute sphère  $\mathbb{S}^{2p+1}$  avec  $p \geq 2$ , de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$  où le problème était aussi posé de façon plus particulière.



## POUR EN SAVOIR PLUS !

BARRE, R. & EL KACIMI, A. *Foliations*. Handbook of Differential Geometry Vol. II, Elsevier(2006), 33-77.

CAMACHO, C. & LINS NETO, A. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser, (1985).

GODBILLON, C. *Feuilletages*. Birkhäuser, (1991).

HAEFLIGER, A. *Naissance des feuilletages*.

<http://foliations.org/surveys/Feuilletages.pdf>

HECTOR, G. & HIRSCH, U. *Introduction to the geometry of foliations*. Parts A and B, Vieweg & Sohn, (1981).

LAWSON, H.B. *Foliations*. Bull. AMS 80, (1974) 369-418.

MOLINO, P. *Riemannian foliations*. Birkhäuser, (1988).

REEB, G. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Hermann Paris, (1950).

REINHART, B. *Differential geometry of foliations*. Ergebnisse der Mathematik 99, Springer (1983).



Henri Poincaré



Georges Reeb