Exercice 1.

1. On a : $\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2 = A+B-2\sqrt{AB}$. Il s'ensuit que : $A+B \geq 2\sqrt{AB}$.

   Pour A, B et C positifs, on a :

   $A+B \geq 2\sqrt{AB}$

   $B+C \geq 2\sqrt{BC}$

   $C+A \geq 2\sqrt{CA}$

   Tous les membres de ces inégalités sont positifs, on peut donc multiplier membre à membre, ce qui donne : $(A+B)(B+C)(C+A) \geq 8ABC$.

2. a) A = a + b - c, B = b + c – a, C = c + a – b; on a alors : A + B = 2b, B + C = 2c, C + A = 2a.
   Supposons que deux au moins des trois nombres A, B et C soient strictement négatifs, par exemple A et B. Alors A + B (= 2b) est strictement négatif, ce qui est exclu.
   Si l'un des trois nombres A, B et C est strictement négatif, les deux autres sont positifs, et alors l'inégalité (1) est triviale : le membre de gauche étant négatif et celui de droite positif.

   b) Si A, B et C sont positifs, d'après 1., $(A+B)(B+C)(C+A) \geq 8ABC$,

   soit : $2b \times 2c \times 2a \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$,

   d'où : $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

Exercice 2.

1. Pour tout x > 0, $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0$ équivaut à $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$, soit $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$.

2. On a : $(a-1+\dfrac{1}{b})(b-1+\dfrac{1}{c}) = ab-a+\dfrac{a}{c}-b+1-\dfrac{1}{c}+1-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{bc}$,

   D'où : $(a-1+\dfrac{1}{b})(b-1+\dfrac{1}{c}) = -b-\dfrac{1}{b}+\dfrac{a}{c}+2$ car $ab=\dfrac{1}{c}$ et $a=\dfrac{1}{bc}$.

   b > 0, donc, d'après 1., $-b-\dfrac{1}{b}+2 \leq 0$. On en déduit que : $(a-1+\dfrac{1}{b})(b-1+\dfrac{1}{c}) \leq \dfrac{a}{c}$.

3. a, b et c sont strictement positifs et abc = 1, donc forcément l'un des trois nombres a, b et c est ≥ 1.

   Si, par exemple, $a \geq 1$, alors $a - 1 + \frac{1}{b} > 0$. Donc l'un des trois nombres du membre de gauche dans (1) est positif.

4. $a = 2,\ b = \frac{1}{6},\ c = 3,$ alors $b - 1 + \frac{1}{c} = -\frac{1}{2},\ a\text{ -}1 + \frac{1}{b} = 7,\ c - 1 + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}.$

5. Si $a \geq 1$, alors $a - 1 + \frac{1}{b} > 0$,

   si $b \geq 1$, alors $b - 1 + \frac{1}{c} > 0$,

   si $b < 1$, si $c \geq 1$, alors $c - 1 + \frac{1}{a} > 0$,

   si $c < 1$, alors $b - 1 + \frac{1}{c} > 0$.

   On en déduit que l'un au plus des trois nombres est strictement négatif.

6. Si l'un exactement des trois nombres du membre de gauche dans (1) est strictement négatif, l'inégalité est triviale.

   Sinon les trois nombres sont positifs, et on a, d'après 2.,

   $$0 \leq \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{a}{c},$$
   $$0 \leq \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq \frac{b}{a},$$
   $$0 \leq \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{c}{b}.$$

   En multipliant membre à membre, on obtient :

   $$\left[\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\right]^2 \leq 1, \text{ d'où :}$$

   $$0 \leq \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1. \text{ CQFD}$$