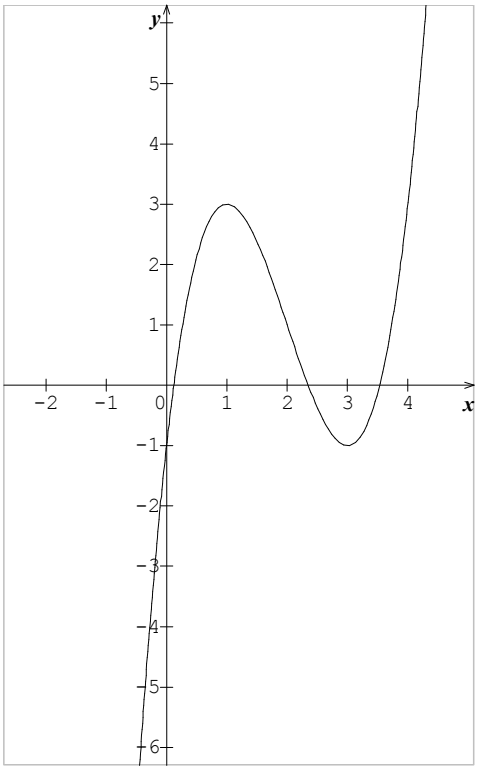
Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

1. Pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f ' (x)		+	0	−	0	+	
f (x)	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

2. Représentation graphique de la fonction dans un repère orthonormé.



3. Graphiquement, l'équation f(x) = 0 admet 3 solutions.
Soit α la plus grande de ces racines.
On a : $f(3,532) \approx -0,00036$ et $f(3,533) \approx 0,0037$, donc $3,532 < \alpha < 3,533$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Pour tout x, $f'(x) = \dfrac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

En effet : $-2(x-2)(2x+1) = -2(2x^2 - 4x + x - 2) = -2(2x^2 - 3x - 2) = -4x^2 + 6x + 4$.

2. On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $-(x-2)(2x+1)$ sur $\mathbb{R}$.

x	0		$-1/2$		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	

3. Les variations de la fonction f sont résumées dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
f ' (x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f (x)	0	↘	-4	↗	1	↘	0

4. On a : $f(-3)=-1,5$ et $f'(-3)=-0,5$, une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -3 est $y=-0,5(x+3)-1,5$, soit $y=-0,5x-3$.

5. On a $f(0)=-3$ et l'ordonnée à l'origine de T est -3, donc cette tangente passe aussi par le point d'abscisse 0 de la courbe.

Exercice 3. 1. Avec le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{H-h}{r}=\dfrac{H}{R}$, d'où le résultat.

2. Le volume V(h) du cylindre est donné par :

$$V(h)=\pi r^2 h=\pi h\left(\frac{R(H-h)}{H}\right)^2=\pi\frac{R^2}{H^2}h(H-h)^2.$$

3. Pour tout $h\in[0,H]$,

$$V'(h)=\pi\frac{R^2}{H^2}\left[(H-h)^2-2h(H-h)\right]=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)(H-h-2h)=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)(H-3h).$$

h	0		H/3		H
V'(h)		$+$	0	$-$	0
V(h)	0	↗		↘	0

4. Au vu du tableau de variations, $V(H/3)$ est la valeur maximale du cylindre.

On a : $V(H/3)=\pi\dfrac{R^2}{H^2}\times\dfrac{H}{3}\times\left(\dfrac{2H}{3}\right)^2=\pi\dfrac{4R^2H}{27}=\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}\pi R^2H=\dfrac{4}{9}V_{\text{cône}}$.