Exercice 1. A. Montrons que toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
Supposons la suite (u_n) croissante et non majorée. Soit M un réel quelconque, M n'est pas un majorant de la suite, donc il existe $u_p > M$. Or la suite est croissante, donc, pour tout $n \geq p$, $u_n > M$.
Tout intervalle $]M;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Donc $\lim u_n = +\infty$.
B. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$; donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $u_n > n^2$.
$u_0 = 1 > 0$. Supposons la propriété vraie pour n quelconque, alors :
$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Donc la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence, pour tout n, $u_n > n^2$.
$\lim n^2 = +\infty$; par un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$.
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = 9,\ u_3 = 16,$ etc... Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n = (n+1)^2$.
$u_0 = 1^2$. Supposons la propriété vraie pour n quelconque, alors :
$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Donc la propriété est héréditaire.
Par le principe de récurrence, pour tout n, $u_n = (n+1)^2$.

Exercice2
a) $\lim u_n = \lim(-3n^3) = -\infty$
b) $\left(\frac{-1}{4}\right)^n \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{-2}{3}\right)^n \times \frac{8}{3}$, $\left|\frac{-2}{3}\right| < 1$, donc $\lim\left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$, $\lim u_n = 0$.
c) $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} = \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}$, $\lim(\sqrt{n+3} + \sqrt{n}) = +\infty$, donc $\lim u_n = 0$.
d) $\lim u_n = \lim \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}$
e) $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, d'où, par le théorème d'encadrement, $\lim \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim u_n = 1$.
f) $\sqrt{n^2 + 4n} - n = \frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}$, on en déduit que $\lim u_n = 2$.
g) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + ... + \frac{1}{5^n} = \frac{1 - (1/5)^{n+1}}{1 - 1/5} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$, $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, donc $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, $\lim u_n = \frac{5}{4}$.

Exercice3
Pour tout n, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{(2u_n + 3)/(u_n + 4) - 1}{(2u_n + 3)/(u_n + 4) + 3} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1/5$ et de premier terme $v_0 = -1/3$.

2. Pour tout n, $v_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
3. Pour tout n, on a :

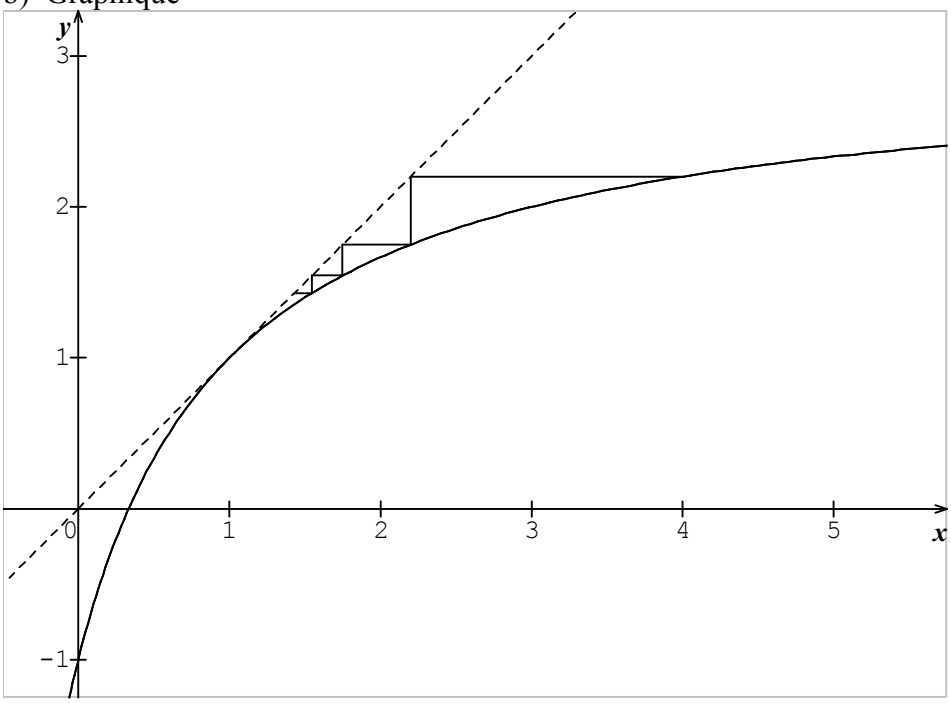
$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$.

4. $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, donc $\lim v_n = 0$, d'où $\lim u_n = 1$.

Exercice4

1. a) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

b) Graphique



$f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$. La première bissectrice est tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

c) On peut conjecturer que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 1.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

$u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{11}{5}$, donc la propriété est vérifiée pour n = 0.

Si pour n quelconque, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$, alors, la fonction f étant croissante sur $[1, +\infty[$, $1 = f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, donc $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1, par le théorème du cours, elle est donc convergente. Soit $\lim u_n = L$, avec $L \geq 1$.

Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$, donc L vérifie l'équation $L = \dfrac{3L - 1}{L + 1}$, soit $L^2 - 2L + 1 = 0$, d'où L = 1.