Exercice 1

1. On pose, pour tout x, $h(x) = e^x - x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x, $h'(x) = e^x - 1$. Tableau de variations de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h ' (x)		-	0	+	
h (x)		↘	1	↗	

On en déduit que, pour tout x, $h(x) \geq 1 > 0$.

Il s'ensuit que, pour tout x, $e^x > x$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - x$.

Or, pour tout x, $e^x > x$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus $g(0) = e^0 = 1$, il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geq 0$, soit $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.

On en déduit que, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$.

3. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc, par un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Exercice 2

A. Pour tout x réel, $g(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

1. Pour tout x réel, $g'(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-x} = -xe^{-x}$.

2. Les variations de g sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g (x)		↗	0	↘	

3. g(0) = 0, au vu du tableau de variations, pour tout x, $g(x) \leq 0$ (égalité si et ssi x = 0).

B. Pour tout x réel, $f(x) = (x^2 + x)e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x}$. C est la courbe représentative de f.

1. Pour tout x réel, $f'(x) = -(x^2 + x)e^{-x} + (2x+1)e^{-x} = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$.

2. Pour tout x réel, $-x^2 + x + 1 = -(x-a)(x-b)$, où $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Les variations de f sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	0	-	
f (x)	$+\infty$	↘	f(a)	↗	f(b)	↘	0

$f(a) \approx -0,438$ et $f(b) \approx 0,840$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (limites du cours), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est : y = x.

b) Pour tout x, $f(x) - x = (x^2 + x)e^{-x} - x = x((x+1)e^{-x} - 1) = xg(x)$.

c) Pour tout x > 0, f(x) – x < 0, T est strictement au-dessus de C.
Pour tout x < 0, f(x) – x > 0, T est strictement au-dessous de C.

Exercice 3

1. Pour tout x > 0, $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

a. Pour tout $x \geq 0$, $g(x) = x^2e^x - 1$, $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x+2)$.

x	0		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g (x)	-1	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; au vu du tableau de variations et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur a sur $\mathbb{R}^+$ solution de g(x) = 0.
De plus $g(0,703) \approx -0,0018$ et $g(0,704) \approx 0,002$, donc $0,703 < a < 0,704$.

c.

x	0		a		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

b. Pour tout x > 0, $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

c. On en déduit le tableau de variations :

x	0		a		$+\infty$
f ' (x)	‖	-	0	+	
f (x)	‖ $+\infty$	↘	f(a)	↗	$+\infty$

d. a vérifie $g(a) = 0$, soit $a^2e^a - 1 = 0$, d'où $e^a = \frac{1}{a^2}$.

De là $f(a) = e^a + \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = m$.

e. On a :

$0,703 < a < 0,704$ $\qquad$ $1,420 < \frac{1}{a} < 1,423$

$2,016 < \frac{1}{a^2} < 2,025$ $\qquad$ $3,436 < m < 3,448$ $\quad$ donc on a bien : $3,43 < m < 3,45$.