Exercice 1

1. a. Pour tout n, $A\times U_n=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}j_n\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,125j_n+0,525a_n\\ 0,625j_n+0,625a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j_{n+1}\\ a_{n+1}\end{pmatrix}$.

b. $U_1=A\times U_0=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}287,5\\ 437,5\end{pmatrix}$

Au bout d'un an, il y aura 287 jeunes et 437 adultes.

$U_2=A\times U_1=\begin{pmatrix}0,125 & 0,525\\ 0,625 & 0,625\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}287,5\\ 437,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}265,625\\ 453,125\end{pmatrix}$

Au bout de deux ans, il y aura 265 jeunes et 453 adultes.

c. Montrons par récurrence que, pour tout n , $U_n=A^n\times U_0$.

$A^0\times U_0=I\times U_0=U_0$, la propriété est vraie pour n = 0.

Si, pour n quelconque, $U_n=A^n\times U_0$, alors $U_{n+1}=A\times U_n=A\times A^n\times U_0=A^{n+1}\times U_0$.

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

2. a. $Q=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -5 & 5\end{pmatrix}$, det Q = 50, donc Q est inversible et $Q^{-1}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}5 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,1 & -0,06\\ 0,1 & 0,14\end{pmatrix}$.

On peut aussi vérifier que $Q\times\begin{pmatrix}0,1 & -0,06\\ 0,1 & 0,14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a :

$$Q\times D\times Q^{-1}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -5 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-0,25 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}7 & 3\\ -5 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1,25 & 0,75\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}6,25 & 26,25\\ 31,25 & 31,25\end{pmatrix}=A$$

b. Montrons par récurrence que, pour tout n, $Q\times D^n\times Q^{-1}=A^n$.

$Q\times D^0\times Q^{-1}=Q\times Q^{-1}=I=A^0$, la propriété est vraie pour n = 0.

Si, pour n quelconque, $Q\times D^n\times Q^{-1}=A^n$, alors

$A^{n+1}=A^n\times A=Q\times D^n\times Q^{-1}\times Q\times D\times Q^{-1}=Q\times D^n\times D\times Q^{-1}=Q\times D^{n+1}\times Q^{-1}$.

Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

c. La matrice D est diagonale, donc

$D^n=\begin{pmatrix}(-0,25)^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. Pour tout n,

$$A^n=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -5 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}(-0,25)^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,1 & -0,06\\ 0,1 & 0,14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ -5 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,1\times(-0,25)^n & -0,06\times(-0,25)^n\\ 0,1 & 0,14\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n\\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n\end{pmatrix}$$

a. Pour tout n,

$$\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,3+0,7\times(-0,25)^n & 0,42-0,42\times(-0,25)^n \\ 0,5-0,5\times(-0,25)^n & 0,7+0,3\times(-0,25)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 270-70\times(-0,25)^n \\ 450+50\times(-0,25)^n \end{pmatrix}$$

$|-0,25|<1$, donc $\lim(-0,25)^n = 0$, d'où $\lim j_n = 270$ et $\lim a_n = 450$.

b. A terme, le nombre des jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450.

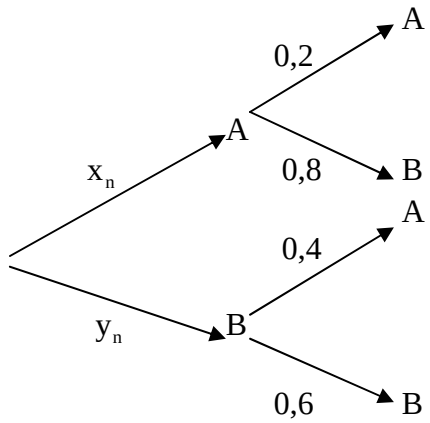
Exercice 2

Soit la marche aléatoire pour laquelle on passe à chaque étape du sommet A au sommet B avec une probabilité 0,8 et du sommet B au sommet A avec une probabilité 0,4.

Soit $X_n = (x_n \quad y_n)$ la matrice ligne état de la marche aléatoire donnant les probabilités d'arrivée respectives en A et B après n étapes.

1. La matrice T de transition associée à la marche aléatoire est $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

2. Montrons, à l'aide d'un arbre, que, pour tout n, $X_{n+1} = X_n T$.



Ainsi :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4y_n \\ y_{n+1} = 0,8x_n + 0,6y_n \end{cases}$$

Soit $X_{n+1} = X_n T$, et pour tout n, $X_n = X_0 T^n$.

3. Si le départ a lieu en A, $X_0 = (1 \quad 0)$ et $X_4 = X_0 T^4 = (0,3344 \quad 0,6656)$.

La probabilité d'être en A après 4 étapes est 0,3344.