Exercice 1. On veut calculer l'intégrale $I=\int_{-1}^{0}\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}dx$

1. Montrer qu'on peut écrire :
$\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{(x-1)^2}$ où a et b sont deux réels à déterminer.
2. En déduire le calcul de I.

Exercice 2. On veut calculer $I=\int_0^1 e^{-x}(x+2)dx$.

1. Chercher une primitive de $x\mapsto e^{-x}(x+2)$ sous la forme $F(x)=e^{-x}(ax+b)$ où a et b sont deux réels à déterminer.
2. En déduire le calcul de I.

Exercice 3. On pose $I=\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx$.

1. Calculer $I+J$ et $I-J$ sans calculer I et J.
2. En déduire I et J.

Exercice 4. On considère les fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$. Soit C_f et C_g les courbes respectives dans un repère orthogonal.

Montrer que l'aire, en u.a., du domaine entre les deux courbes sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ vaut $\frac{49}{24}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n=\int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Calculer $u_0=\int_0^1 e^t dt$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et h la fonction définie, pour tout t, par $h(t)=t^{n+1}e^t$.

a. Montrer que, pour tout t, $h'(t)=(n+1)t^n e^t+t^{n+1}e^t$.

b. En déduire que, pour tout n, $(n+1)u_n+u_{n+1}=e$.

3. Calculer u_1, u_2 et u_3.
4. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 0$.

En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq\frac{e}{n+1}$.

La suite admet-elle une limite ?

Exercice 6. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\int_0^1 (x-1)^{2n}e^{-x}dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq(x-1)^{2n}e^{-x}\leq(x-1)^{2n}$.
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{2n+1}$.
4. Conclure que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.