Terminale S5

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :
   a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

   c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

   d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :
   a. la médiatrice de [AC].
   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
   c. la médiatrice de [AI].
   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que :
$$\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$
   est :
   a. la médiatrice de [AC].
   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
   c. la médiatrice de [AI].
   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Exercice 2

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Exercice 3

On considère la suite (I_n) définie par : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$, $I_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt, \ldots, I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt$.

1. Montrer que $I_0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

2. Comparer t^n et t^{n+1} lorsque $0 \leq t \leq 1$, en déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3. Grâce à un encadrement de $\sqrt{1+t}$ lorsque $0 \leq t \leq 1$, établir que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

En déduire la limite de I_n.

4. Soit n strictement positif, en procédant à une intégration par parties et en remarquant que $(1+t)^{\frac{3}{2}} = (1+t)\sqrt{1+t}$, établir que : $I_n = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2n}{3}(I_{n-1} + I_n)$.

5. En déduire la relation $I_n = \frac{1}{3+2n}(4\sqrt{2} - 2nI_{n-1})$, $n \geq 1$. Calculer I_1 et I_2.