EXISTE-IL UNE MASSE VOLUMIQUE ÉQUIVALENTE ?

permettant le calcul de l'Altitude Balistique de Culmination d'une fusée au moyen de la formule analytique classique relatant la projection verticale d'un corps à ρSCx constant ?

Ceci est la première version de ce texte
datée du 04/04/2008

Faites-nous part de vos remarques…

Lorsqu'une fusée s'élève verticalement sur son élan après la fin de sa phase propulsive, son Altitude de Culmination (mesurée au-dessus de son point de Fin de Propulsion) est calculable analytiquement.

La formule donnant cette hauteur *balistique* de culmination est :

Formule (1)

$$\boxed{\mathbf{H}_{BalCulm} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{Bal}\,\mathbf{Ln}\left[\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{V}_{FinProp}^{\;2}}{\mathbf{U}^2}\right)\right]}$$

expression où :

→$\mathbf{H}_{BalCulm}$ est l'altitude *balistique* de culmination, c-à-d l'altitude mesurée au-dessus de l'altitude de Fin de Propulsion,

→$\mathbf{D}_{Bal}$ est la Distance Balistique, définie :

— soit comme l'inverse du coefficient balistique du *Vol de la Fusée* (à savoir : $\mathbf{D}_{Bal} = \dfrac{\mathbf{M}}{\tfrac{1}{2}\,\rho\,\mathbf{SCx}}$)

— soit comme la distance qu'il faudrait à la fusée pour voir sa vitesse divisée par **e = 2,718** (base des logarithmes naturels) sous l'action de la seule traînée atmosphérique (sans effet de la gravité, à l'occasion d'un tir horizontal, par exemple, ou dans une bulle d'atmosphère en orbite) (voir notre texte *La fusée en Vol Balistique*),

→$\mathbf{V}_{FinProp}$ est la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée,

→**U** est la Vitesse Limite (ou Vitesse de Chute Stabilisée) de la fusée.

Comme cette Vitesse Limite **U** admet également la formulation :

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{g}\mathbf{D}_{Bal}}$$

…on peut également utiliser la relation :

Formule (2)

$$\boxed{\mathbf{H}_{BalCulm} = \frac{1}{2}\,\mathbf{D}_{Bal}\left\{\mathbf{Ln}\left[\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{V}_{FinProp}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{Bal}}\right)\right]\right.}$$

expression où :

→$\mathbf{H}_{BalCulm}$ est l'altitude *balistique* de culmination, c-à-d l'altitude mesurée au-dessus de l'altitude de Fin de Propulsion,

→$\mathbf{D}_{Bal}$ est la Distance Balistique, définie, soit :

— comme l'inverse du coefficient balistique du Vol de la Fusée (à savoir : $\mathbf{D}_{Bal} = \frac{\mathbf{M}}{\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{SCx}}$)

— comme la distance qu'il faudrait à la fusée pour voir sa vitesse divisée par **e = 2,718** sous l'action de la seule traînée atmosphérique (sans effet de la gravité, à l'occasion d'un tir horizontal, par exemple, ou dans une bulle d'atmosphère en orbite)

→$\mathbf{V}_{FinProp}$ est la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée,

→et **g** l'accélération de la pesanteur

Pour mémoire, nous donnons en fin de texte un abaque permettant le calcul rapide de cette fameuse Distance Balistique en fonction de la Masse Balistique **M** de la fusée [1] et en fonction de son diamètre.

Cependant, les formulations que nous venons de présenter sont le fruit d'une intégration de l'équation différentielle du mouvement basée sur la constance de la Masse Volumique de l'air traversé [2] .

La raison en est qu'il n'est pas possible, à notre connaissance, d'intégrer analytiquement les équations différentielles de la projection verticale d'un corps (comme de sa chute aérienne [3]) en considérant la Masse Volumique de l'air traversé comme variable.

Pour les fusées que leurs performances projètent haut dans l'espace, on est donc en droit de s'interroger sur l'erreur que l'on commet en utilisant ces formules à **ρ** constant… [4]

Gil Denis note en effet, dans Le Vol de la Fusée, qu'à une altitude de **1000 m**, la Masse Volumique de l'air a déjà diminué de **10 %**. Bien sûr, cette diminution ne

[1] c-à-d la masse de la fusée lorsqu'elle s'est allégée de son carburant.

[2] Ainsi, évidemment, que sur la constance du SCx.

[3] Voir nos différent textes à ce sujet.

[4] Dans ce texte, lorsque nous utiliserons le symbole **ρ** ce sera toujours pour qualifier la Masse Volumique de l'air traversé par la fusée…

concerne que la partie haute de la trajectoire balistique, mais elle n'est pas négligeable [5] …

Est-il alors possible de déterminer une Masse Volumique Équivalente de l'air traversé, Masse Volumique constante qui, utilisée dans les formules analytiques ci-dessus, donnerait une Altitude Balistique de Culmination égale à l'altitude réellement atteinte par la fusée au-dessus de son Point de Fin de Propulsion ?

Teneur de ce texte :

Dans ce texte, nous montrerons que oui.

Nous dégagerons en effet une loi donnant, avec une précision suffisante, la Masse Volumique Aérienne Équivalente recherchée ; nous montrerons également que la fusée traverse un air possédant cette Masse Volumique Équivalente aux alentours des **40 %** de son Altitude de Culmination (cette altitude au-dessus du pont de Fin de Propulsion étant calculée analytiquement d'après la Masse Volumique de l'air en ce point)…

Limitation de cette étude

Nous ne nous intéresserons qu'aux fusées animées d'un mouvement vertical (ou assimilé). La recherche d'une Masse Volumique Aérienne Équivalente pour un vol oblique serait d'une autre complication. Nous caressons l'espoir que le présent texte serait utile lors de cette recherche…

Nous limiterons également cette étude aux fusées (ou mobiles) de **SCx** constant… En subsonique bas, le **Cx** des fusées connaît une petite diminution liée à l'évolution de la friction de l'air sur sa paroi, laquelle friction est primordiale dans l'établissement de ce **Cx**… (voir notre texte Le Cx des fusées).

[5] Nous reviendrons sur le fait que la fusée brûle quand-même la plus grande part de son capital de vitesse dans la première moitié de son trajectoire Voir à ce sujet notre texte : *Existe-il un Cx équivalent pour les fusées ?* …

Résolution par la moyenne

La première proposition de Masse Volumique Aérienne Équivalente qu'on peut imaginer est celle d'une Masse Volumique *moyenne* entre celle de la Fin de Propulsion de celle de Culmination (et par *moyenne*, nous entendons ici le moyenne arithmétique).

Par exemple, une telle Masse Volumique moyenne serait diminuée de quelque **5 %** par rapport à celle de Fin de Propulsion pour une culmination à **1000 m**, si l'on en croit la remarque ci-dessus de Gil Denis.

De fait, cette moyenne est fréquemment proposée dans les textes fuséistes.

Ce raisonnement par la moyenne constitue une première approche ; mais on peut espérer trouver une Masse Volumique Aérienne Équivalente un peu plus précise…

Pour ce faire attachons-nous à comprendre comment l'atmosphère (et surtout sa Masse Volumique) évolue avec l'altitude…

Expression de l'Atmosphère Standard en fonction de l'Altitude :

Dans la pratique, la masse Volumique de l'air rencontré par nos engins d'amateurs ne varie pas énormément au cours de leur vol. Néanmoins, elle varie.

Le Vol de la Fusée, de Gil Denis, propose par exemple une loi d'évolution *hyperbolique* de la Masse Volumique Aérienne $\boldsymbol{\rho}_{(h)}$ en fonction de l'altitude **h** exprimée en **m** :

Formule (3)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\mathbf{20\,000 - h}}{\mathbf{20\,000 + h}}}$$

Gil Denis précise qu'on peut se contenter de cette ‘‘formule simplifiée’’ pour les altitudes inférieures à **11 000 m**.

Le paramètre $\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique de l'air mesurée au sol [6] : elle est évidemment variable selon la pression atmosphérique régnant sur les lieux du lancement…

Étendons-nous un instant sur la représentation mathématique de la Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude.

L'atmosphère qui nous entoure (et qui nous surplombe) est terriblement variable. Selon la situation météorologique, la loi d'évolution de la Masse Volumique de l'air selon l'altitude sera très différente. À moins de posséder des relevés

[6] On peut prendre également comme Masse Volumique initiale la Masse Volumique à l'altitude de Fin de Propulsion. Nous y revenons un peu plus loin…

altimétriques des différents paramètres en jeu (température, taux d'humidité, vitesse des vents), on ne pourra donc que proposer une modélisation d'un état moyen de l'atmosphère. On nomme l'atmosphère supposée dans cet état moyen **Atmosphère Standard**, ou **Atmosphère Moyenne**.

Planète-Sciences et le CNES proposent ainsi une table de l'Atmosphère Moyenne, à l'usage des lanceurs de ballons expérimentaux :

Altitude (m)	Accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$)	Température (°K)	Nombre Volumique (m^{-3})	Masse Volumique ($kg.m^{-3}$)	Rapport des masses volumiques	Célérité du son ($m.s^{-1}$)	Rapport des viscosités cinématiques	Rapport des conductivités thermiques	Rapport des pressions
0	9,8066	288	2,54e25	1,22	1	340	1	1	1
1000	9,8036	281	2,31e25	1,11	0,90	336	1,08	0,979	0,887
2000	9,8005	275	2,09e25	1,00	0,82	332	1,17	0,959	0,784
3000	9,7974	268	1,89e25	0,90	0,74	328	1,27	1,270	0,938
4000	9,7943	262	1,70e25	0,82	0,66	324	1,38	0,918	0,608
5000	9,7912	255	1,53e25	0,73	0,60	320	1,51	0,897	0,533
6000	9,7882	249	1,37e25	0,66	0,53	316	1,65	0,876	0,466
7000	9,7851	242	1,22e25	0,59	0,48	312	1,81	0,855	0,405
8000	9,7820	236	1,09e25	0,52	0,42	308	1,98	0,834	0,351
9000	9,7789	229	9,70e24	0,46	0,38	303	2,18	0,813	0,303
10000	9,7759	223	8,50e24	0,41	0,33	299	2,41	0,790	0,261
11000	9,7728	216	7,58e24	0,36	0,29	295	2,66	0,770	0,224
12000	9,7697	216	6,48e24	0,31	0,25	295	3,11	0,770	0,191
13000	9,7667	216	5,54e24	0,26	0,21	295	3,65	0,770	0,163
14000	9,7636	216	4,73e24	0,22	0,18	295	4,27	0,770	0,139
15000	9,7605	216	4,04e24	0,19	0,15	295	4,99	0,770	0,119
16000	9,7575	216	3,46e24	0,16	0,13	295	5,84	0,770	0,102
17000	9,7544	216	2,95e24	0,14	0,11	295	6,83	0,770	0,087
18000	9,7513	216	2,52e24	0,12	0,09	295	8,00	0,770	0,0746
19000	9,7483	216	2,16e24	0,10	0,08	295	9,35	0,770	0,0638
20000	9,7452	216	1,84e24	0,08	0,07	295	10,9	0,770	0,0545

Source Cahier CNES Planète-Sciences

Cette table constituera notre référence, en particulier pour ce qui est du seul paramètre qui nous intéresse dans cette étude, la Masse Volumique Aérienne.

Il est aisé de reporter ces valeurs sur un graphe et de les confronter à diverses formulations mathématiques souvent proposées.

Parmi celles-ci, nous avons déjà cité celle préconisée par Gil Denis. Elle se rapproche de façon satisfaisante des caractéristiques énoncées par le tableau précédent :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho_0} \frac{\mathbf{20\,000 - h}}{\mathbf{20\,000 + h}}$$

avec $\boldsymbol{\rho_0}$ la Masse Volumique de l'air au sol et **h** l'altitude en mètres.

D'une façon générale, on pourra donner à cette Masse Volumique Aérienne de référence $\boldsymbol{\rho_0}$ la valeur de **1,225 kg/m³** pour de l'air à **15 K** au niveau de la mer.
Si l'on n'est pas au niveau de la mer, il conviendra d'effectuer une correction…

Une deuxième loi provient de l'intégration analytique du poids de la colonne d'air au-dessus du sol, cette colonne d'air étant supposée *isotherme*, c-à-d à température constante. Les mathématiques ont voulu cette loi exponentielle :

$$\rho_{(h)} = \rho_0 \, \mathrm{Exp}\left(\frac{-h}{8430}\right)$$

avec ρ_0 la Masse Volumique Aérienne au sol et **h** l'altitude en mètres.

Nous expliquons la façon d'obtenir cette loi dans une note , en fin de texte.

Mais cette représentation de l'atmosphère ne prend pas en compte l'évolution de la température avec l'altitude (c'est pourquoi on l'appellera *loi isotherme*). Or la température de l'air diminue à un rythme moyen de **6,5 K** par kilomètre d'altitude. [7]

Par chance, une modification du coefficient **8430** en **9700** rapproche de façon très satisfaisante cette loi des caractéristiques attribuées à l'Atmosphère Moyenne :

Formule (4)

$$\boxed{\rho_{(h)} = \rho_0 \, \mathrm{Exp}\left(\frac{-h}{9700}\right)}$$

avec ρ_0 la Masse Volumique Aérienne au sol et **h** l'altitude en mètres.

Il est très profitable de remarquer ici que ce coefficient **9700** possède la dimension d'une altitude (ici en mètres) : Cette altitude de **9700 m** a une signification physique : c'est celle où la Masse Volumique de l'air se trouve divisée par **e** par rapport à la Masse Volumique ρ_0 existant au sol…

Nous appellerons cette loi : *Exponentielle corrigée.*

Reconnaissons cependant que cette correction est une correction ''à vue'' (elle n'est pas argumentée mathématiquement). Mais elle est particulièrement conforme aux données de l'Atmosphère Moyenne jusqu'à **8000 m**.

Un jeu limité de formulations exponentielles de ce type permet d'ailleurs de décrire de façon satisfaisante l'évolution de la Masse Volumique Aérienne jusqu'à de très hautes altitudes : cela constitue le modèle de Chapman qu'utilisent les pratiquants de l'activité *Ballons à hélium…*

Il est cependant possible d'établir mathématiquement une loi d'évolution de la Masse Volumique moyenne de l'air en se basant sur le taux de variation moyen de

[7] On peut l'observer dans la *Table de l'atmosphère moyenne* présentée ci-dessus.

6,5 K par kilomètre d'altitude dont nous avons fait état ci-dessus. Cette démarche est détaillée également dans la note annexée en fin de texte. Elle conduit à la loi d'évolution de la Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude :

$$\boxed{\rho = \rho_0\left(1 - \frac{6{,}5\,h}{1000\,T_0}\right)^{4{,}255}}$$

expression où :

ρ est la Pression de l'air à l'altitude **h** ,
ρ_0 et T_0 la Masse Volumique et la Température Absolue de l'air à l'origine des altitudes (à **h = 0**, donc),
6,5 un taux moyen d'évolution de la température avec l'altitude, en **K/Km**,
h est l'altitude en **m**
T_0 est la température à l'origine des altitudes,
4,255 un exposant lié au taux moyen **6,5**.

Cette loi est tout à fait conforme aux Masses Volumique que l'on peut relever, en moyenne, en fonction de l'altitude.

Une autre tentative de formulation prend comme base de départ l'égalité :

$$\rho_{(h)} = \rho_0\ \mathrm{Exp}\left(\frac{-h}{8400}\right)$$

… en considérant que les particules d'air évoluent, non pas isothermiquement mais adiabatiquement (càd sans échange avec l'extérieur).

Cette nouvelle intégration produit la formulation :

Formule (5)

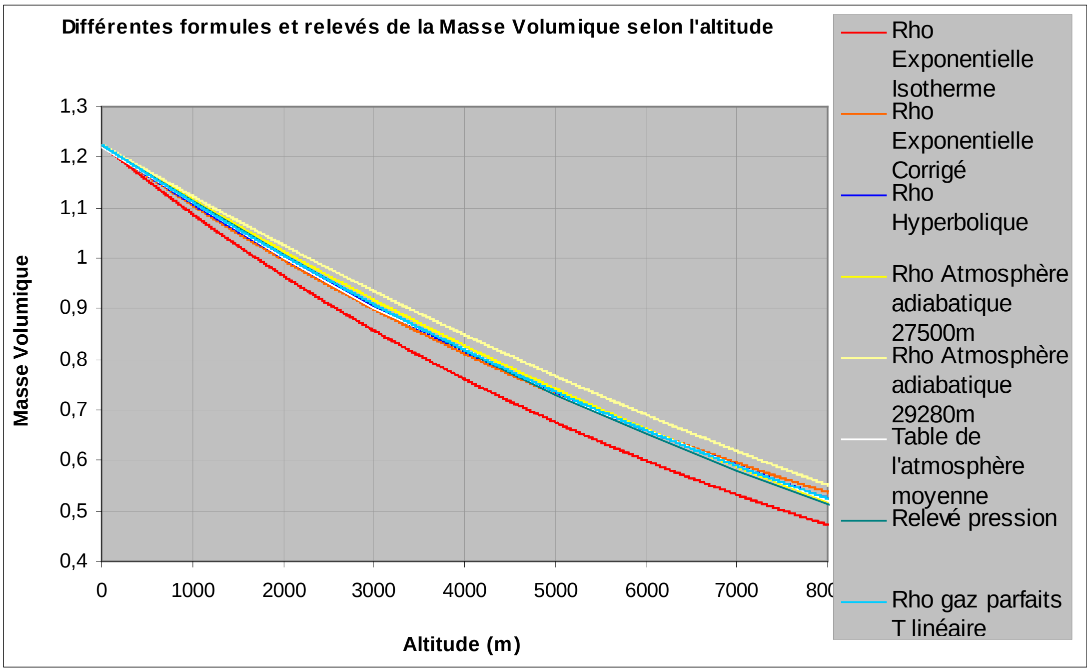
$$\boxed{\rho = \rho_0\left(1 - \frac{h}{H_0}\right)^{1/(\gamma - 1)}}$$

avec H_0 une altitude caractéristique qui est fixée, pour l'air sec, à **29 280 m**.

Toutefois, cette représentation de la Masse Volumique Aérienne calque beaucoup mieux avec celle des tables de l'Atmosphère Moyenne lorsqu'on utilise une altitude caractéristique de **27 500 m** . [8] Nous n'avons pas explicité cette intégration dans nos notes de fin de texte puisqu'elle donne un résultat moins satisfaisant.

[8] Ceci est peut-être dû, entre autre, au fait que l'air est, de façon moyenne, rarement sec.

Voici une représentation de ces différentes formulations de la Masse Volumique Aérienne :



On voit que ces représentations sont vraiment entrelacées les unes dans les autres, à part la courbe rouge inférieure (qui représente la Masse Volumique Exponentielle Isotherme) ainsi que la courbe jaune pâle supérieure (qui représente la Masse Volumique Adiabatique non corrigée, à savoir calculée à partir d'une altitude caractéristique de **29 280 m**, alors que la courbe jaune plus franc (entrelacée dans les autres) est basée sur une altitude caractéristique de **27 500 m**).

La courbe blanche (à peine visible sous les autres) provient de la table des caractéristiques moyennes présentée plus haut. Le manque de chiffres significatifs de cette table fait qu'elle sinue légèrement.

La courbe de couleur glauque [9] (nommée P gaz parfaits T linéaire) représente d'autres relevés de la pression en altitude, traités par nous sur les bases d'un gaz parfait et d'un taux de diminution de la température avec l'altitude de **6,5 K par Km**…

L'intrication des courbes *Exponentielle Corrigée, Rho Hyperbolique* et *Rho Atmosphère adiabatique 27500m* et *Rho gaz parfaits T linéaire* avec les courbes *Relevé pression* et *Table de l'Atmosphère Moyenne* montre bien que nous disposons, pour ces altitudes limitées, de formules mathématiques suffisamment représentatives des caractéristiques de l'Atmosphère Moyenne, surtout si l'on songe à la grande variabilité de ladite atmosphère…

[9] Glauque : « D'un vert qui rappelle l'eau de mer » (Petit Robert)

Ceci étant, en complément de ces courbes nous pouvons également donner une régression polynomiale parabolique assez précise de l'expression hyperbolique de Gil Denis ; il serait stupide de ne pas en faire mention (pour les facilités d'intégration analytique qu'elle recèle) :

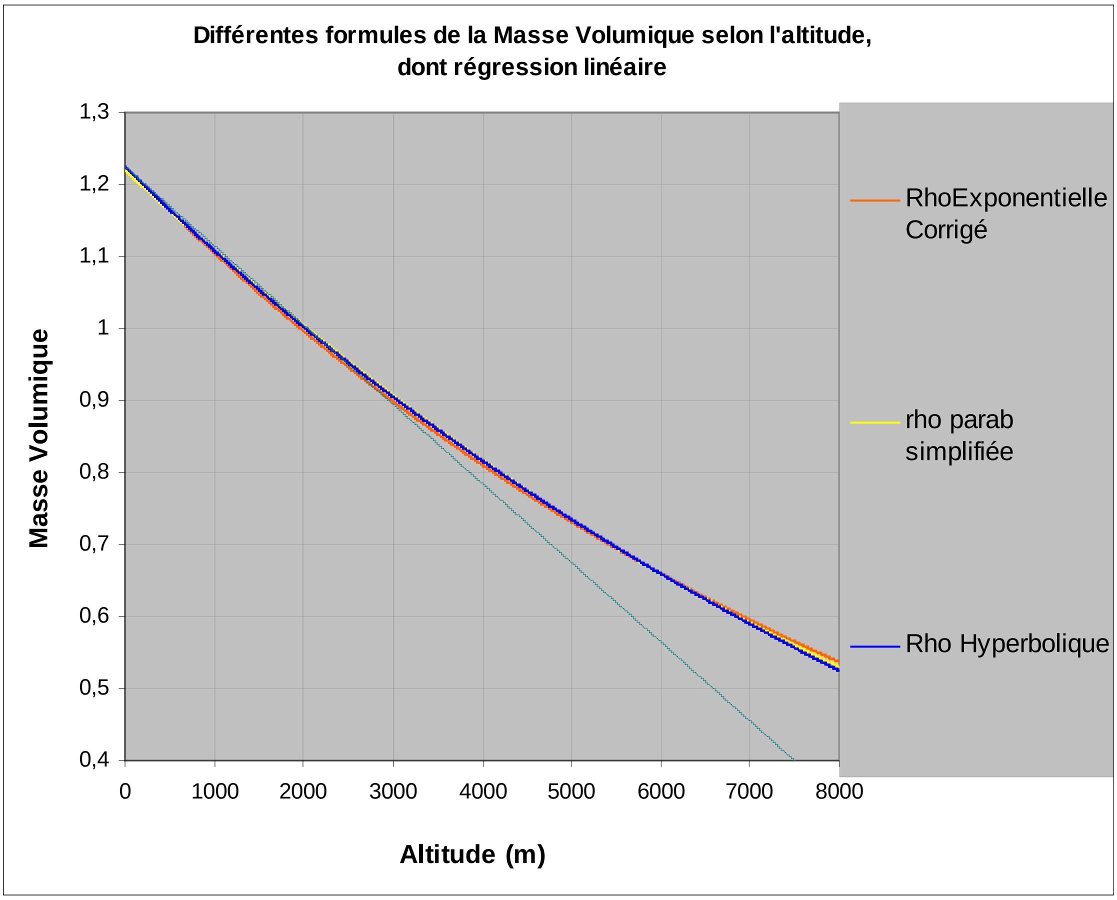
Formule (6)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_{(h)} = 0{,}0000000035\ h^2 - 0{,}000116\ h + \rho_0}}$$

Remarquons simplement que , contrairement aux expressions hyperboliques et exponentielles qui précèdent, celle-ci n'arbore pas en facteur commun général $\boldsymbol{\rho_0}$, la Masse Volumique au sol (ou au point de Fin de Propulsion [10]). [11]

Nous représentons cette régression parabolique ci-dessous, ainsi que, pour les altitudes inférieures à **3000 m**, une simple régression linéaire (en couleur *glauque*) :

$$\boldsymbol{\rho_{(h)} = \rho_0 - 1{,}1\ 10^{-4}\ h}$$



Comme la régression parabolique précédente, cette régression linéaire n'arbore cependant pas $\boldsymbol{\rho_0}$ en facteur commun général… [12]

[10] Voir notre note de fin de texte sur la ''transportabilité'' de la Masse Volumique de référence.
[11] Une rapide réécriture permettrait de satisfaire à cette condition.
[12] Il est facile de l'adapter pour qu'elle satisfasse à cette condition.

Bien qu'elle diverge nettement des courbes de l'Atmosphère Standard, une telle régression linéaire gardera pourtant sa valeur pour des altitudes de culmination supérieures à **3000 m** puisque, au cours du vol balistique d'une fusée, c'est bien dans les parties basse et moyenne de ce vol que se produit le gros des pertes par Traînée Atmosphérique (nous y reviendrons).

Pour cette raison, il convient d'ailleurs de caler toute éventuelle régression de la courbe originale de la Masse Volumique Aérienne pour se rapprocher de celle-ci aux faibles et moyennes altitudes (et donc aux fortes vitesses), ce calage pouvant d'ailleurs entraîner l'abandon du très mnémotechnique reliquat $\boldsymbol{\rho_0}$ (qui vaut en moyenne **1,225** à **15°C** au niveau de la mer) pour une valeur un peu différente…

Au gré des nécessités, il sera donc possible de choisir l'une ou l'autre de ces représentations de la Masse Volumique de l'Atmosphère Moyenne.

<u>Expression de la Masse Volumique de l'air traversé par un mobile par rapport à sa Vitesse Instantanée :</u>

Une autre forme d'expression de la Masse Volumique Aérienne est recevable : il s'agit de son expression par rapport à la Vitesse Instantanée du Projectile.

Cette expression sera approchée, mais l'erreur qu'on commettra en l'utilisant sera minime…

Expliquons-nous : Le Vol de la Fusée donne incidemment une expression de l'altitude instantanée d'un mobile projeté verticalement :

Formule (7) [13]

$$\boxed{\mathbf{h}_{(t)} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{Bal}\left\{\mathbf{Ln}\left[\mathbf{g}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{V}_{FinProp}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{U^2}}\right)\right] - \mathbf{Ln}\left[\mathbf{g}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{v}_{(t)}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{U^2}}\right)\right]\right\}}$$

expression où :

- $\mathbf{h}_{(t)}$ est l'altitude *balistiquement gagnée*, c-à-d l'altitude mesurée au-dessus de l'altitude de Fin de Propulsion,
- $\mathbf{D}_{Bal}$ est la Distance Balistique précédemment définie (voir à ce sujet notre texte *La fusée en Vol Balistique*)
- $\mathbf{V}_{FinProp}$ est la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée,
- **U** est la Vitesse Limite (ou Vitesse de Chute Stabilisée) de la fusée.
- et $\mathbf{v}_{(t)}$ la vitesse instantanée de la fusée.

Bien sûr, cette expression est donnée <u>pour une Masse Volumique Aérienne constante</u>. Mais la Masse Volumique variant assez peu avec l'altitude, on peut imaginer

[13] Nous avons cependant aménagé cette expression pour respecter les conventions symboliques qui nous sont habituelles.

que la loi de vitesse sur laquelle est basée cette expression sera peu modifiée lors d'un vol où la Masse Volumique serait variable.

Mettons nous en devoir d'estimer l'erreur qu'entraînera cette application quelque peu cavalière de la formulation de l'altitude.

La véritable erreur est assez difficile à déterminer, mais il est assez simple de construire un tableau Pas à Pas Excel permettant la simulation du vol balistique d'un mobile traversant un air de Masse Volumique variable.

En poussant au maximum les choses, c-à-d en faisant calculer à ce simulateur l'Altitude de Culmination [14] pour une fusée de **2250 m** de Distance Balistique [15] projetée à **350 m/s** [16], il se dégage que l'altitude réelle [17]atteinte est de **2114 m** alors qu'un calcul analytique basé sur la Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion promet seulement une altitude de **2208 m**.

Les deux Masses Volumiques rencontrées par la fusée à ces deux d'altitudes de culmination (**2114** et **2208 m**) diffèrent alors de moins de **1 %**. [18]

La modicité de cette erreur nous semble donc légitimer un calcul de la Masse Volumique Aérienne basé sur l'Altitude Analytique du Vol de la Fusée citée plus haut (Altitude Analytique basée sur la Masse Volumique Aérienne constante et prise au point de Fin de Propulsion).

[14] Mesurée au-dessus de son point de Fin de Propulsion.

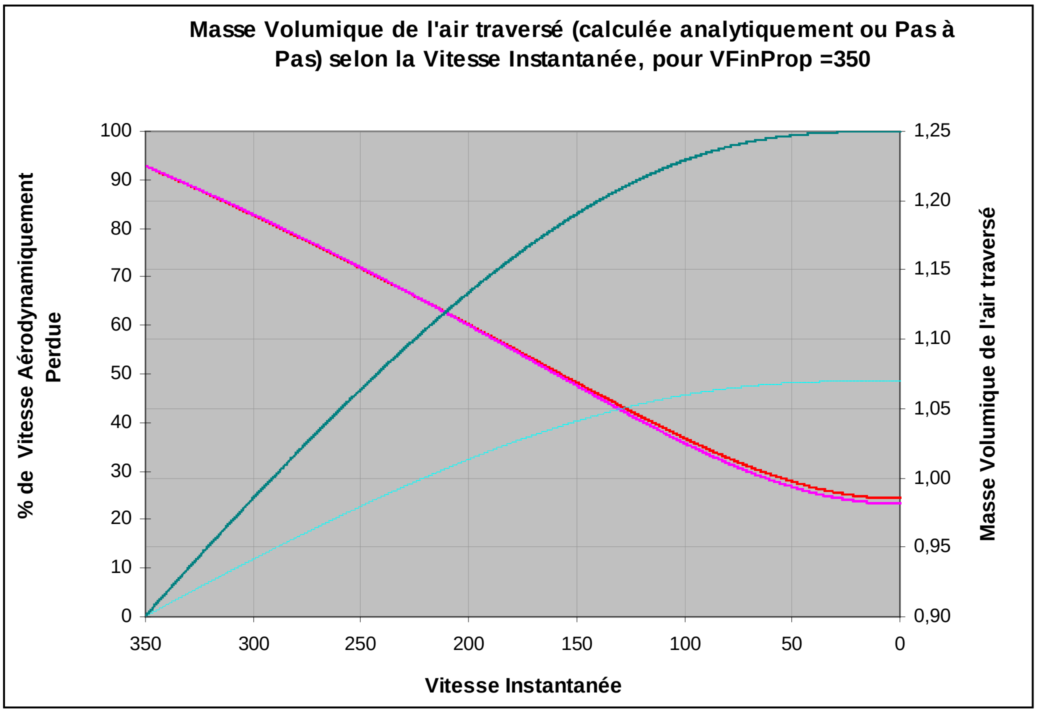
[15] Soit une fusée de 500 g d'un diamètre de 45 mm et d'un Cx de 0,4.

[16] Vitesse quelque peu imaginaire dans notre étude réservée aux objet subsonique puisque la vitesse du son est de 340 m/s…

[17] Nous appelons souvent ''réelle'', dans ce texte, l'altitude calculée par notre simulateur. Celui-ci intègre évidemment la variation de Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude.

[18] On peut reprendre également l'ordre de grandeur d'une variation de la Masse Volumique de 1 % par 100 m…

Voici les courbes représentant l'évolution de cette Masse Volumique Aérienne en fonction de la Vitesse Instantanée de la fusée, calculée selon l'expression analytique en **ρ** constant ci-dessus d'un part (en rouge) et calculée par un tableau de simulation Pas à Pas en **ρ** variable d'autre part (en fuchsia), ceci pour la Vitesse de Fin de Propulsion quelque peu virtuelle de **350 m/s** [19] et une Distance Balistique de **2250 m** :



On y lit bien l'erreur relative inférieure à **1 %** que nous annoncions plus haut. Un balayage par notre tableau des Vitesses de Fin de Propulsion et des Distances Balistiques (de **50** à **2250**) nous prouve que cette erreur est ici à son maximum (ce que l'on pouvait subodorer intuitivement, mais il faut se méfier de ses intuitions)…

D'autre part, pour les vitesses instantanées significativement freinantes (supérieures à **200 m/s**), l'écart entre les deux courbes est négligeable. À ce propos, nous avons représenté en turquoise le bilan instantané des pertes de vitesses par Traînée Aérodynamique depuis le début de la phase balistique (en **%** de la Vitesse de Fin de Propulsion).

La courbe de couleur glauque représente le même bilan instantané des pertes de vitesses par Traînée Aérodynamique depuis le début de la phase balistique mais en **%** des pertes totales de Vitesse par Traînée.

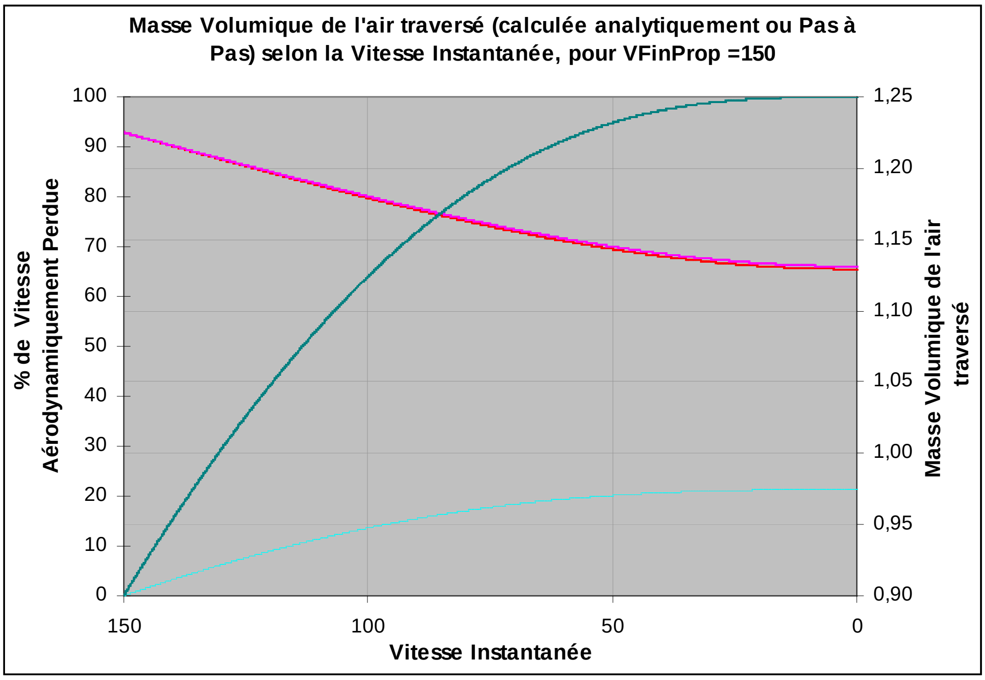
Ce bilan instantané de la courbe turquoise plafonne à un peu moins de **50 %** puisque, durant les **18** secondes que dure la phase balistique, la gravité agit pour **~ g*18**, soit **177 m/s** ce qui est un peu plus de la moitié des **350 m/s** de la Vitesse de Fin de Propulsion.

[19] Virtuelle parce que trop proche de celle du son. C'est néanmoins cette vitesse extrême qui illustre le mieux les limites de notre raisonnement (même si, dans ce texte, nous désirons nous en tenir à une réflexion subsonique)…

La courbe de couleur glauque indique bien qu'à **175 m/s** (moitié de la Vitesse de Fin de Propulsion), la plus grosse part des pertes par Traînée est déjà acquise : **75 %**.

À la vitesse instantanée où nos deux courbes de Masse Volumique divergent (c-à-d au moment où notre erreur sur la Masse Volumique pourrait devenir pénalisante), soit **150 m/s**, plus de **80 %** des pertes de vitesses par Traînée sont déjà acquises.

Pour le même projectile (Distance Balistique de **2250 m**), une Vitesse de Fin de Propulsion de seulement **150 m/s** ramène l'écart entre les deux courbes rouge et fuchsia à presque rien **(0,05 %)** :



On doit noter que la part du capital de vitesse perdu en Traînée Aérodynamique est beaucoup plus faible (**21 %**) et que cette perte est acquise plus tôt durant le vol (**83 %** à une vitesse moitié de celle de Fin de Propulsion), c-à-d que les variations de Masse Volumique Aérienne se feront encore moins sentir que pour le modèle de vol précédent…

Ces réflexions nous confirment dans notre intuition qu'il est recevable de baser un calcul analytique de la Masse Volumique de l'air traversé sur une valeur analytique approximative de la hauteur instantanée (approximative parce que basée sur un calcul analytique de la vitesse prenant la Masse Volumique comme invariable et égale à celle existant au point de Fin de Propulsion).

Nous pouvons donc nous prévaloir, dans le calcul de la Masse Volumique Aérienne instantanée selon la vitesse, de l'expression analytique approchée de l'altitude déjà énoncée :

Formule (7)

$$\boxed{\mathbf{h}_{(t)} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}} \left\{ \mathbf{Ln}\left[\mathbf{g}\left(1 + \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{2}}{\mathbf{U}^{2}}\right)\right] - \mathbf{Ln}\left[\mathbf{g}\left(1 + \frac{\mathbf{v}_{(t)}^{2}}{\mathbf{U}^{2}}\right)\right] \right\}}$$

$\mathbf{h}_{(t)}$ est l'altitude *balistiquement gagnée*, c-à-d l'altitude mesurée au-dessus de l'altitude de Fin de Propulsion,
$\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$ est la Distance Balistique précédemment définie (voir à ce sujet notre texte *La fusée en Vol Balistique*)
$\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}$ est la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée,
U est la Vitesse Limite (ou Vitesse de Chute Stabilisée) de la fusée.
et $\mathbf{v}_{(t)}$ la vitesse instantanée de la fusée.

Dès lors qu'on utilisera cette expression en logarithme de l'altitude dans l'expression exponentielle de la Masse Volumique Aérienne, à savoir :

$$\boldsymbol{\rho}_{(t)} = \boldsymbol{\rho}_{0}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{-\mathbf{h}_{(t)}}{\mathbf{9700}}\right)$$

…expression où $\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion [20]

…on pourra espérer de la co-incidence des logarithmes et de l'exponentielle une appréciable simplification.

Effectivement, il se dégage très vite l'expression suivante :

Formule (8)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{(v)} = \boldsymbol{\rho}_{0} \left(\frac{\mathbf{U}^{2} + \mathbf{v}_{(t)}^{2}}{\mathbf{U}^{2} + \mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{2}}\right)^{(\mathbf{D}\mathrm{Bal}\,/\,\mathbf{19400})}}$$

où $\boldsymbol{\rho}_{(v)}$ est la Masse Volumique Aérienne à la vitesse $\mathbf{v}_{(t)}$
$\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion
$\mathbf{v}_{(t)}$ est la vitesse instantanée du mobile
U sa vitesse limite
$\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}$ sa vitesse de fin de propulsion
et $\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$ sa Distance Balistique calculée d'après une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion.

[20] Nous reviendrons sur la *transportabilité* de cette loi exponentielle aux différentes altitudes…

Si $\mathbf{D}_{Bal}$, la Distance Balistique du mobile, apparaît en tant qu'exposant, elle réside également, de façon implicite, dans la vitesse limite **U**, puisque celle-ci vaut $\sqrt{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{Bal}}$.

Pour plus de limpidité on peut donc réécrire l'expression ci-dessous sous la forme :

Formule (9)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{(v)} = \boldsymbol{\rho}_0 \left(\frac{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{Bal} + \mathbf{v}_{(t)}^{\,2}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{Bal} + \mathbf{V}_{FinProp}^{\,2}} \right)^{(\mathbf{D}Bal\ /\ \mathbf{19400})}}$$

qui est une bonne estimation de la Masse Volumique de l'air rencontré <u>à chaque altitude</u> par la fusée <u>selon sa vitesse instantanée.</u>

Dans cette expression :

$\boldsymbol{\rho}_{(v)}$ est la Masse Volumique Aérienne à la vitesse $\mathbf{v}_{(t)}$
$\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion
$\mathbf{v}_{(t)}$ est la vitesse instantanée du mobile
$\mathbf{V}_{FinProp}$ sa vitesse de fin de propulsion
et $\mathbf{D}_{Bal}$ sa Distance Balistique calculée d'après une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion..

Étant acquis que le carré de la Vitesse Limite $\mathbf{U}^2$ vaut $\mathbf{gD}_{Bal}$ [21], on peut aussi proposer l'expression équivalente :

Formule (8')

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{(v)} = \boldsymbol{\rho}_0 \left(\frac{\mathbf{U}^2 + \mathbf{v}_{(t)}^{\,2}}{\mathbf{U}^2 + \mathbf{V}_{FinProp}^{\,2}} \right)^{(\mathbf{U}^2/\ \mathbf{193140})}}$$

U étant la Vitesse Limite du mobile calculée d'après une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion.

…expression valable uniquement sur notre planète (du fait qu'on a précisé la valeur numérique de **g**)

L'erreur de cette estimation est inférieure à **0,5 %** pour des projectiles de Distances Balistiques allant de **50** à **2250 m** et animés d'une vitesse initiale allant de **50** à **350 m/s**.

Présentons également deux autres expressions simples de la Masse Volumique Aérienne rencontrée par un projectile <u>en fonction du temps ou de sa vitesse instantanée</u>, ces expressions étant toujours fondées sur la même hypothèse simplificatrice d'une indifférence du mouvement à la variation de la Masse Volumique Aérienne. Elles sont démontrées dans une note annexe proposée sur notre page Physique de la fusée :

---

[21] **U** comme $\mathbf{D}_{Bal}$ étant calculés à partir d'une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion.

La première donne un libellé assez simple de la Masse Volumique de l'air traversé en fonction du temps :

$$\rho = \rho_{Culm} \left[\mathbf{Tan}^2\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}_{Bal}}\right) + 1\right]^{\mathbf{D}_{Bal}\,/\,19400}$$

ρ_{Culm} étant la Masse Volumique de l'air à l'Altitude de Culmination
t le temps restant à courir jusqu'à culmination
et $\mathbf{T}_{Bal}$ étant le Temps Balistique, calculé d'après une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion. [22]

La deuxième est :

$$\rho = \rho_{Culm} \left[\left(\frac{\mathbf{v}^2_{(t)}}{\mathbf{U}^2}\right) + 1\right]^{(\mathbf{U}^2/\,193140)}$$

ρ_{Culm} étant la Masse Volumique de l'air à l'Altitude de Culmination
$\mathbf{v}_{(t)}$ la Vitesse instantanée
et **U** étant la Vitesse Limite du mobile calculée d'après une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion.

Les fuséistes férus de calculs pourront donc utiliser ces représentations assez fidèles de la Masse Volumique de l'air traversé par la fusée… Nous en faisons nous-même un usage heureux [23] dans la note annexe déjà évoquée, lors d'un calcul très particulier…

Détermination d'une Masse Volumique Équivalente de l'air en fonction de l'Altitude de Culmination

Intéressons-nous à présent à une représentation de la Masse Volumique *Équivalente* selon l'altitude de culmination atteinte par la fusée.

Rappelons que la Masse Volumique Équivalente est la Masse Volumique constante qui, utilisée dans la formule analytique de l'altitude, donnera une Altitude de Culmination égale à l'Altitude de Culmination *réelle*. [24]

Utilisation de l'approximation précédente :

[22] Comme la Distance Balistique et la Vitesse Limite, le Temps Balistique est une caractéristique du mobile. Il est lié à ces deux autres caractéristiques par des relations très simples ; ainsi le Temps Balistique vaut, par exemple **U/g**. Voir nos autres textes à ce sujet, en particulier Chute Aérienne d'un Corps.
[23] Et que nous croyons justifié (car le bonheur n'est pas toujours justifié)…
[24] Nous écrivons ‘‘réelle’’ pour signifier l'Altitude de Culmination calculée en **ρ** variable.

L'expression de la Masse Volumique Instantanée de la Formule (9) ci-dessus vaut évidemment pour cet instant particulier qu'est la culmination.

À cet instant la vitesse $\mathbf{v}_{(t)}$ se trouve annulée. Il en découle une valeur intéressante de la Masse Volumique de Culmination :

Formule (10)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{\text{culm}} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{0}}\left(\frac{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\text{bal}}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\text{bal}} + \mathbf{V}_{\text{FinProp}}{}^{2}}\right)^{(\mathbf{D}_{\text{bal}}\,/\,\mathbf{19400})}}$$

qui est une estimation à mieux que **0,5 %** près de la Masse Volumique de l'air rencontré par la fusée à l'instant de sa culmination ; dans cette expression :

$\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion
$\mathbf{V}_{\text{FinProp}}$ sa vitesse de fin de propulsion
et $\mathbf{D}_{\text{Bal}}$ sa Distance Balistique.

Certains auteurs recommandant de prendre comme Masse Volumique Équivalente la moyenne arithmétique de celle de culmination et de celle au point de Fin de Propulsion, nous pouvons donc tirer de la formule (10) ci-dessus une première approximation de notre Masse Volumique Équivalente (qui serait d'ailleurs plutôt ici une Masse Volumique moyenne).

Calcul général de la Masse Volumique Équivalente de l'air :

La précédente formulation pourrait nous suffire, mais nous désirons affiner encore nos connaissances.

Nous avons donc bâti à cet effet un tableau Pas à Pas Excel calculant l'altitude de culmination atteinte par une fusée de Vitesse de Fin de Propulsion et de Distance Balistique données (ou d'une façon générale par un projectile à **SCx** constant projeté à une certaine vitesse initiale), cette fusée ou ce projectile s'élevant verticalement dans un air dont la Masse Volumique diminue avec l'altitude.

Parallèlement à ces calculs effectués Pas à Pas, la formulation analytique de l'Altitude de Culmination que nous avons déjà donnée nous permet de calculer l'altitude de culmination atteinte par le même projectile pour toute une plage de Masse Volumique constante [25] :

Nous ouvrons donc un tableau annexe de deux colonnes : dans la première colonne sont les Masses Volumiques de l'air traversé à une altitude donnée [26] et dans la deuxième l'Altitude de Culmination Analytique qu'on pourrait calculer avec chaque

[25] En effet, le calcul analytique de l'Altitude de Culmination se fait en Masse Volumique Aérienne constante et dépend du choix de cette Masse Volumique…

[26] …altitude calculée en **ρ** variable par notre tableau Pas à Pas…

Masse Volumique (Vitesse de Fin de Propulsion et SCx étant toujours considérés comme des paramètres fixes [27]).

Ce tableau de deux colonnes énonce donc la loi :

$\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulmAna}} = \mathbf{f}_{\mathrm{Analytique}}(\boldsymbol{\rho})$

...du moins si l'on appelle $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulmAna}}$ l'Altitude de Culmination Analytique…

Il nous servira à effectuer, à l'aide de la fonction *Recherche* d'Excel, la démarche inverse, à savoir trouver la Masse Volumique constante ayant présidé à la détermination d'une certaine Altitude de Culmination Analytique : ce recours à la fonction Recherche d'Excel nous a été imposé par le fait que nous n'avons pu écrire analytiquement l'inverse de la fonction $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulmAna}} = \mathbf{f}_{\mathrm{Analytique}}\ (\boldsymbol{\rho})$ à savoir :

Formule (2)

$$\boxed{\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulmAna}} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}} \left\{ \mathbf{Ln}\left[\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}{}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{g}\ \mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}}\right)\right]\right.}$$

…fonction où $\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$ vaut $\dfrac{\mathbf{M}}{\tfrac{1}{2}\ \boldsymbol{\rho}\ \mathbf{SCx}}$

L'inverse de la fonction $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulmAna}} = \mathbf{f}_{\mathrm{Analytique}}\ (\boldsymbol{\rho})$ s'écrirait :

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}^{-1}{}_{\mathrm{Analytique}}\ (\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}})$

Nous ignorons si une telle extraction de **ρ** est possible, mais en tout état de cause, l'extraction « à vue » utilisant la fonction recherche d'Excel est extrêmement simple à mettre en œuvre…

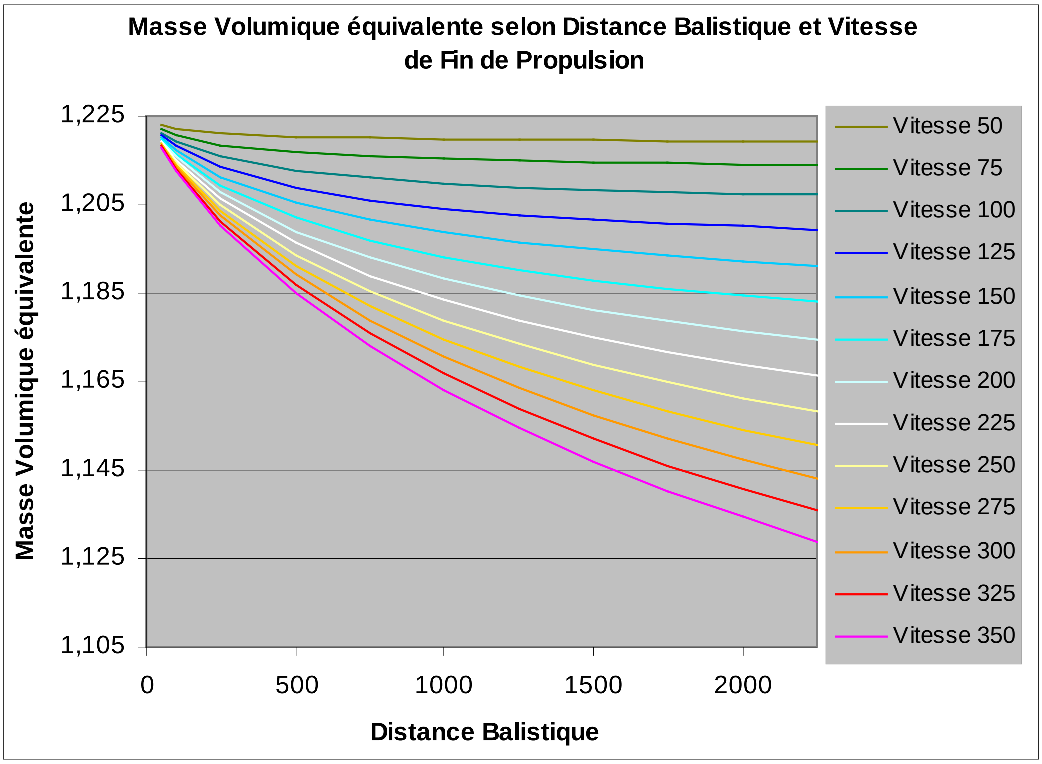
Ces deux approches nous permettront alors de dégager la Masse Volumique Équivalente que nous recherchons :

Une fois l'altitude de Culmination déterminée Pas à Pas en **ρ** variable, nous rechercherons la Masse Volumique constante donnant analytiquement la même Altitude de Culmination ; cette Masse Volumique constante est bien sûr la Masse Volumique Équivalente.

Nous réalisons une macro de balayage soumettant à notre tableau une certaine plage de Distances Balistiques (allant de **50** à **2250 m**) et une autre plage de Vitesses de Fin de Propulsion (allant de **50** à **350 m/s**).

[27] Nous pouvons quand-même faire évoluer ''manuellement'' ces paramètres, à moins que ce ne soit sous la commande d'une *macro*.

Voici la famille de courbe qu'il dessine alors quand nous lui demandons de nous fournir la Masse Volumique Équivalente des mobiles situés dans ces deux plages :



Comme on pouvait s'y attendre, à Vitesse de Projection égale [28], la Masse Volumique Équivalente diminue à mesure qu'augmentent les capacités de pénétration de la fusée (sa Distance Balistique) puisqu'alors la fusée traverse des couches d'air de Masse Volumique diminuées par l'altitude.

Sur les deux courbes supérieures (figurant la Vitesse de Fin de Propulsion atteinte par des fusées à eau, **50** ou **75 m/s**), la Masse Volumique Équivalente de l'air traversé est la plus proche de la Masse Volumique au point de Fin de propulsion (les altitudes atteintes par ce genre de fusées étant très faibles).

D'autre part, pour les mêmes engins, on tirera peu de bénéfice d'une trop grande amélioration des capacités de pénétration : il y a fort à parier que, dans la partie droite des courbes vertes, leur vol soient assimilables à la projection d'une masse dans le vide.

<u>Utilité de cette réflexion sur la Masse Volumique Aérienne Équivalente :</u>

Reposons ici le problème général de l'utilité de notre réflexion :

Réaliser le calcul de l'Altitude de Culmination en **ρ** constant à partir d'une Masse Volumique Équivalente de **1,16 Kg/m^3** par exemple, au lieu de **1,225** (Masse Volumique standard près du sol), modifiera-t-il beaucoup le calcul analytique de l'Altitude de Culmination ?

[28] La Vitesse de Fin de Propulsion n'est autre qu'une vitesse de projection…

Alors que pour **1,225 Kg/m³** l'altitude atteinte (en **ρ** constant) par une fusée de **1400 m** de Distance Balistique et **300 m/s** de Vitesse de Fin de Propulsion est de **1415 m** , pour **1,16 Kg/m³** de Masse Volumique (soit **5,3 %** de moins) elle est, toujours en **ρ** constant, de **1460 m**, soit **45 m** (ou **3 %**) de différence.

Ceci pour cette forte vitesse de projection. Pour une vitesse de **250 m/s**, la différence est un plus faible : **978 m** contre **954** soit **24 m** (**2,5 %**) pour la même diminution de **5,3 %** de la Masse Volumique supposée constante.

D'une façon générale, si l'on désire d'ailleurs connaître l'influence du choix d'une Masse Volumique constante dans la formule analytique, à savoir :

$$\mathbf{H}_{\text{BalCulm}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{M}}{\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{SCx}} \left\{ \mathbf{Ln}\left[\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{SCx}\,\mathbf{V}_{\text{FinProp}}^{2}}{\mathbf{Mg}}\right)\right]\right.$$

…on doit remarquer que **ρ**, la Masse Volumique constante de l'air, agit de deux façons opposées sur l'Altitude Balistique de Culmination :

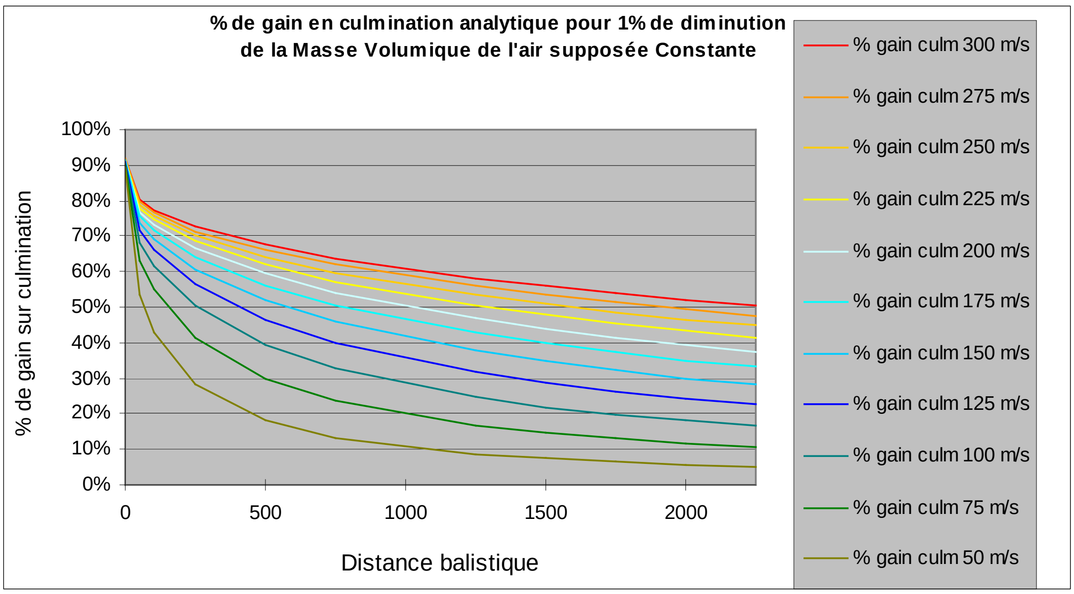
→ d'une part comme diviseur général

→ d'autre part comme numérateur sous l'égide du logarithme.

Ces deux influences de **ρ** se compensent donc mutuellement.

En conséquence : une diminution de **n %** de la Masse Volumique de l'air traversé produira une augmentation relative de l'altitude de culmination moins forte que **n %** .

Voici d'ailleurs l'influence d'une diminution de **1 %** de la Masse Volumique de l'air (supposée constante) sur l'Altitude Analytique de Culmination calculée en en **ρ** constant :



Cette influence, exprimée ici en **%** , dépend évidemment de la Vitesse de Fin de Propulsion et de la Distance Balistique de la fusée.

Sur la gauche du graphique, pour les très faibles Distances balistiques (mobiles très *traînants*, c-à-d doués de peu de capacité de pénétration dans l'air) l'influence de la Masse Volumique est totale : chaque **%** de diminution de Masse Volumique de l'air créera une augmentation de **1 %** de l'altitude de culmination : l'altitude atteinte par le mobile est essentiellement fonction de ses capacités aériennes, c-à-d que la gravité est de peu d'influence sur cette altitude (cas de la plume projetée en l'air).

Cela ressemble à un régime essentiellement aérien et peut d'ailleurs donner lieu à une étude intéressante : y a-t-il ou non une Masse Volumique Équivalente dans cette configuration ?

Rappelons (une fois de plus) la définition de la Masse Volumique Équivalente que nous utilisons dans toute cette étude ; c'est la Masse Volumique supposée constante qui, utilisée dans la formule analytique de l'Altitude de Culmination donnera la même altitude que l'Altitude de Culmination Réelle (ou considérée comme telle parce que calculée par un tableau Pas à Pas prenant en compte une Masse Volumique variable avec l'altitude).

L'étude du régime purement aérien que nous ferons en fin de texte nous laissera d'ailleurs contrarié car il n'existe pas d'altitude de culmination : il n'en existe pas, non pas parce qu'en l'absence de gravité la verticale n'est plus définie (on pourrait la définir artificiellement comme la direction de la projection) mais parce que le mouvement du mobile se poursuit jusqu'à l'infini des temps et des distances, sa vitesse ne s'annulant qu'à cette inaccessible limite…

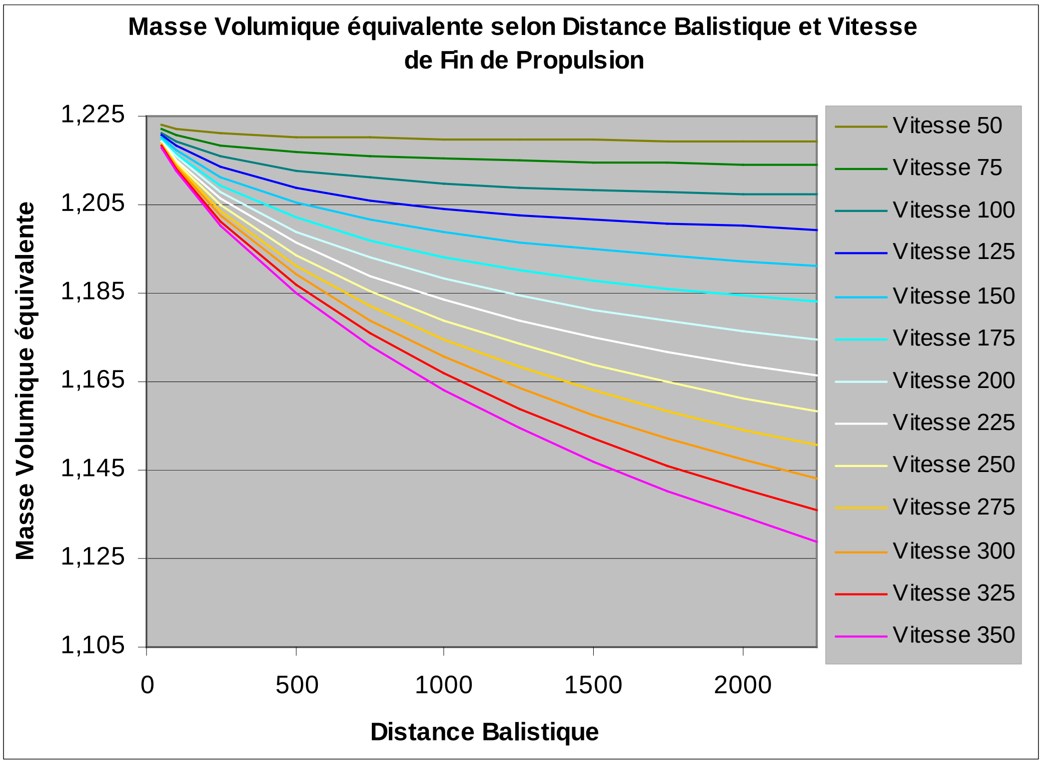
Mais revenons au graphique ci-dessus.
Sur la droite de celui-ci, l'influence des variations de Masse Volumique de l'air sur le gain en altitude diminue notablement. Elle tend à la nullité pour les faibles vitesses de Fin de Propulsion (régime essentiellement gravitaire, cas de l'enclume projetée en l'air à faible vitesse [29])…

Cette interrogation de la formule analytique par notre tableur nous confirme donc dans l'opinion que le choix d'une Masse Volumique de l'air n'est pas indifférent et qu'un choix judicieux de la Masse Volumique supposée constante améliorera, avec peu de complication, le calcul de l'Altitude de Culmination Analytique

[29] Nous prenons cette exemple de l'enclume car cet objet est celui qui symbolise les corps de forte densité pour la jeunesse nourrie aux dessins animés…

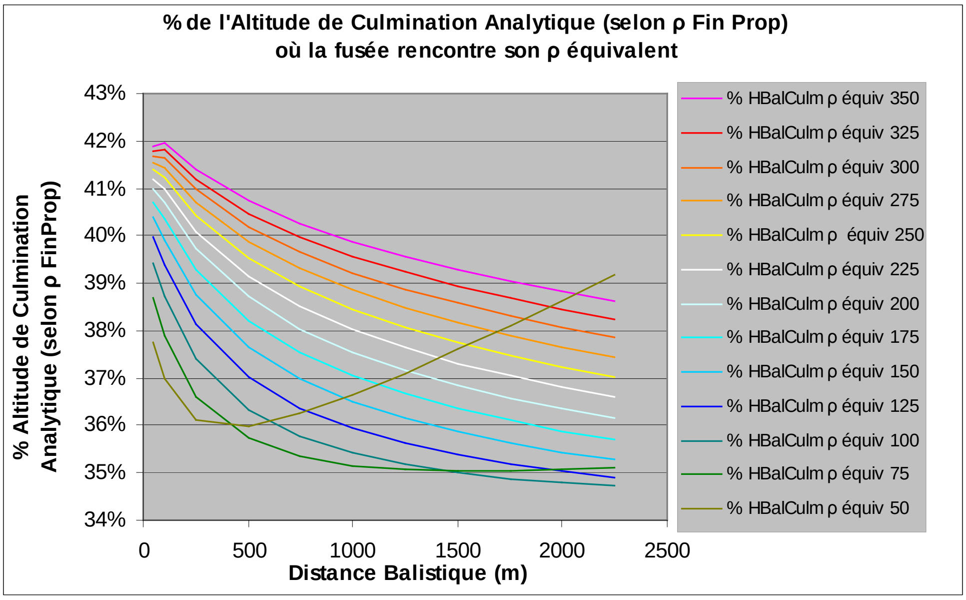
Reprenons donc notre recherche d'une Masse Volumique Équivalente.

L'observation du graphique illustrant cette Masse Volumique Équivalente (déjà présenté), pour de mobiles d'une Distance Balistique allant de **50** à **2250 m** et animés d'une vitesse initiale allant de **50** à **350 m/s** :



…nous donne l'idée d'examiner le pourcentage d'Altitude de Culmination à laquelle la fusée rencontre un air de Masse Volumique Équivalente.

Voici ce pourcentage, pour les mêmes plages de Vitesse de Fin de Propulsion et de Distance Balistique :



La remontée des courbes basses (vert sombre et kaki) sur la droite est peut être un artefact [30] . Les variations de Masse Volumique rencontrées par ces fusées de faibles Vitesses de Projection sont si infimes que notre tableau peut tout à fait s'en trouver aux limites de ses possibilités.

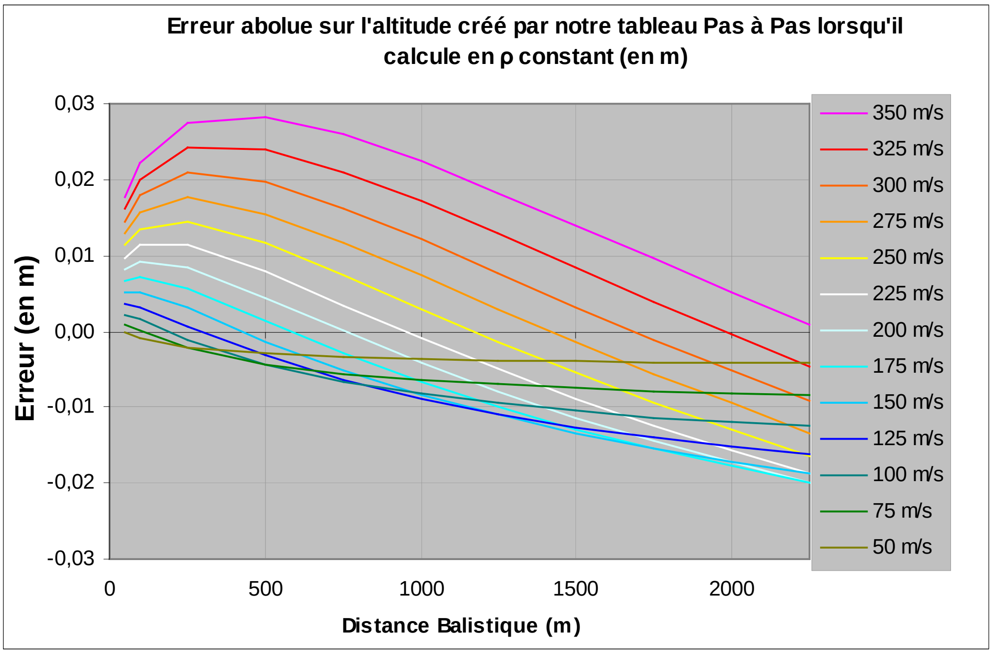
Cette remontée des courbes basses nous intrigue fortement : Nous décidons alors de réaliser une estimation de l'erreur que peut commettre notre tableau Excel.

Il existe en effet un procédé permettant l'estimation de l'erreur que commet notre tableau (qui aligne quand-même **30 000** lignes ou Pas de Calcul) dans son intégration de la Masse Volumique variable : par principe nous l'avons doté d'une commande annexe lui enjoignant de réaliser ses calculs en Masse Volumique constante (celle de Fin de Propulsion).

Lorsqu'on choisit ce mode de calcul Pas à Pas en **ρ** constant, l'on demande somme toutes à notre tableau de réaliser graphiquement une intégration dont nous connaissons le résultat analytique (voir plus haut) : Les deux méthodes devraient donc aboutir au même résultat. S'il n'en est pas ainsi, c'est notre tableau qui sera le fautif.

[30] Artefact : Phénomène d'origine humaine (dans l'étude de faits naturels). Signal parasite. Prononciation : Artéfact.

Voici alors l'erreur (en mètres) dont notre tableau se rend coupable dans son calcul de l'Altitude de Culmination en **ρ** constant, toujours selon dans les mêmes plages de Vitesses de Fin de Propulsion et de Distances Balistiques :

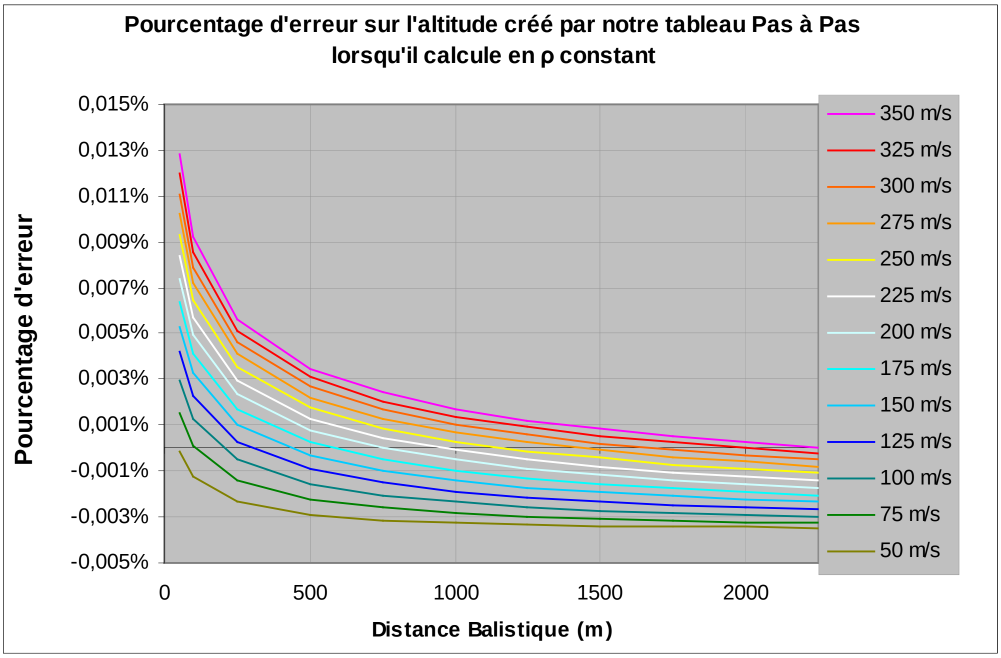


Nous avons la satisfaction de constater que cette erreur n'est pas forte (de l'ordre de **3 cm**, au plus).

Il est d'ailleurs compréhensible que l'erreur s'accroisse avec la vitesse de Fin de Propulsion des fusées et donc leurs performances. [31]

[31] Si l'on bâtissait un tableau du même nombre de pas pour calculer des distances astronomiques en millions de Km, ce tableau génèrerait forcément des erreurs de plusieurs milliers de Km…

On pense alors à dessiner plutôt l'erreur relative de notre tableau :



Dans les cas usuels de fusées, on est donc en droit de dire que cette erreur est toujours inférieure au **0,01 %** .

Toutefois, il faut garder en mémoire que ce constat d'erreur est lié au calcul de l'Altitude de Culmination en **ρ** constant : on ne peut être sûr que l'erreur commise par notre tableau en **ρ** variable soit la même.

Nous nous berçons quand-même de l'espoir qu'elle est du même ordre : l'erreur constatée ici provient en effet plus probablement des problèmes d'extrémités que génèrent souvent les tableaux d'intégration graphique ainsi que de la simplification consistant à intégrer des courbes de formes quelconques en les décomposant en trapèzes élémentaires (même si ceux-ci sont très nombreux)…

On peut noter sur la famille de courbe des erreurs absolues (en **m**) que l'erreur du tableau pour les basses vitesses de projection (courbes vertes) est un peu plus faible mais qu'elle n'est pas nulle.

Il est d'ailleurs profitable de songer que pour ces basses vitesses et pour des fusées de grande Distance Balistique, la Masse Volumique de l'air est plus ***visitée*** que **subie** comme source de freinage [32] . Nous établissons d'ailleurs dans une note de fin de texte que, pour ce régime essentiellement gravitaire, la Masse Volumique Équivalente

[32] Un peu comme si on s'intéressait à l'évolution de la réception de rayons cosmiques au cours du vol : cette évolution n'a pas d'influence sur le vol, mais on peut néanmoins en calculer la moyenne au cours du vol…

Nous recherchons d'ailleurs un autre terme que celui de *visiter*, car il y a quand-même des visites qui modifient le comportement du *visiteur*.

(bien qu'inefficiente du point de vue de son freinage) se *visite* pourtant autour des **40 %** de l'altitude atteinte…

Cette estimation de l'erreur commise par notre tableau dans son calcul *graphique* de l'Altitude de Culmination Analytique nous donne alors l'idée de réaliser une approche de l'erreur commise par notre tableau dans son calcul de la Masse Volumique Équivalente.

En premier lieu, il faut observer les conséquences de notre utilisation de la formule de l'Altitude de Culmination Analytique :

Formule (1)

$$\boxed{\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\,\mathbf{Ln}\Big[\Big(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{U}^{2}}\Big)\Big]}$$

… formule que nous avons déjà transformée pour que la Masse Volumique Équivalente de l'air y apparaisse explicitement :

$$\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mathbf{M}}{\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}\,\mathbf{SCx}}\Big\{\mathbf{Ln}\Big[\Big(\mathbf{1} + \frac{\tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}\,\mathbf{SCx}\,\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{Mg}}\Big)\Big]$$

Pour plus de facilité de lecture, on peut d'ailleurs faire référence à la Distance Balistique calculée sur la base de la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion. La formule devient alors :

Formule (11)

$$\boxed{\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{0}}{\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\Big\{\mathbf{Ln}\Big[\Big(\mathbf{1} + \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}\,\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{g}\,\boldsymbol{\rho}_{0}\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}}\Big)\Big]}$$

$\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$ étant la Distance Balistique du mobile pour une Masse Volumique Aérienne prise au point de Fin de Propulsion

Si l'on appelle $\mathbf{f}_{\mathrm{Analytique}}$ cette fonction donnant $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}}$ pour chaque $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}$ et ceci pour chaque couple {Vitesse de Fin de Propulsion ; Distance Balistique}, la fonction réciproque $\mathbf{f}^{-1}_{\mathrm{Analytique}}$ donnera $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}$ pour chaque $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}}$.

Autant dire que pour chaque couple {Vitesse de Fin de Propulsion /Distance Balistique} il existe une loi $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}} = \mathbf{f}^{-1}_{\mathrm{Analytique}}(\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}})$.

Ainsi que nous l'avons dit, cette fonction réciproque n'a cependant pas pu être dégagée par nous. Mais ce qui nous intéresse surtout c'est, toujours pour chacun de ces couples, le Taux de variation de $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{équiv}}$ selon $\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}}$. Ce taux de variation n'est autre que la dérivée de $\mathbf{f}^{-1}_{\mathrm{Analytique}}$, à savoir :

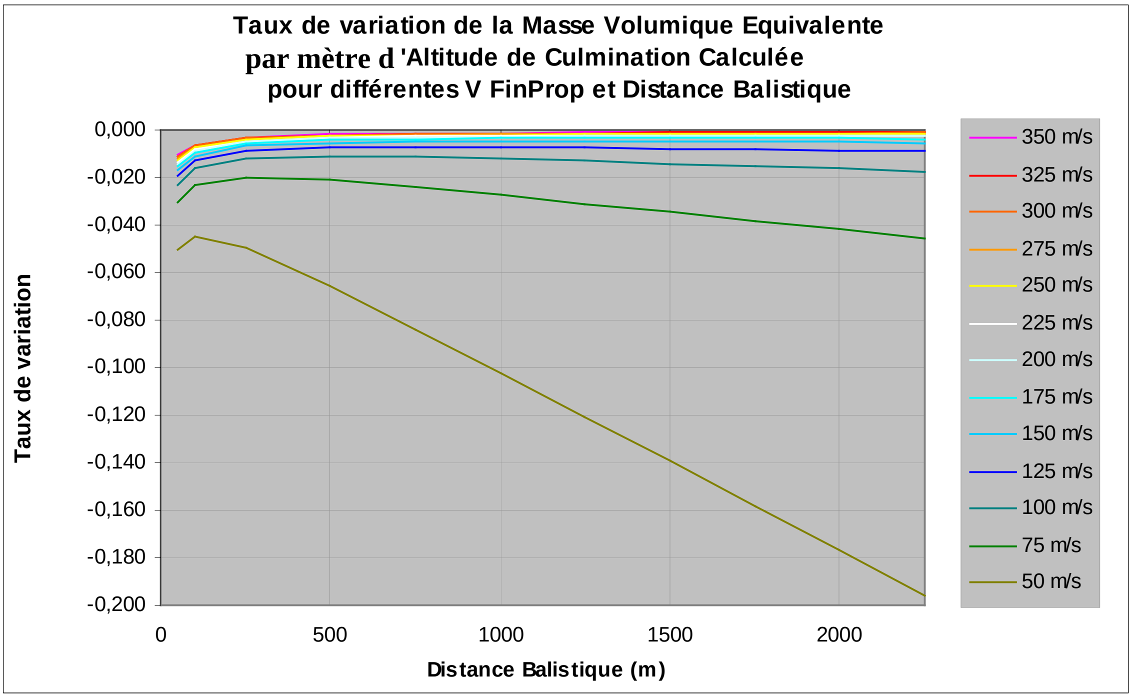
$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}}{d\mathbf{H}_{\text{BalCulm}}}$$

…qui sera bien sûr l'inverse de :

$$\frac{d\mathbf{H}_{\text{BalCulm}}}{d\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}}$$

Nous n'avons pas réalisé analytiquement cette dérivation de l'expression de la Hauteur Balistique de Culmination [33] ; mais il n'y a rien de plus simple, dans Excel que d'en opérer la saisie *graphique* pour chaque cas de mouvement.

Cette saisie nous donne donc une famille de courbe illustrant le Taux de variation de $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}$ selon $\mathbf{H}_{\text{BalCulm}}$., en **Kg/m³** par **mètre** d'Altitude de Culmination :



Il saute aux yeux que, pour les petites vitesses de projection (courbes kaki, vert d'herbe et glauque), ce Taux de variation de la Masse Volumique Équivalente selon l'Altitude de Culmination devient très important en valeur absolue, spécialement lorsque la Distance Balistique croît.

Donc, pour ces faibles Vitesses de Projection et fortes Distances Balistiques les erreurs sur l'Altitude de Culmination auront de grandes conséquences sur la détermination de la Masse Volumique Équivalente.

<u>Or ces courbes sont un *résultat analytique* [34]</u> : elles sont donc exemptes d'erreur.

[33] Avec de la méthode, elle est réalisable assez facilement…
[34] Même si la saisie en a été effectuée graphiquement par notre tableur.

Cette plongée des courbes vertes vers le bas a-t-elle une explication physique ?

Oui… Cette explication est celle-ci :

Chaque couple {Distance Balistique ; Vitesse de Fin de Propulsion} projette dans l'air réel (en $\boldsymbol{\rho}$ variable) un mobile jusqu'à une certaine Altitude Balistique de Culmination.

Du fait que la Masse Volumique de l'air diminue légèrement avec l'altitude, cette Altitude de Culmination $\mathbf{H}_{BalCulm\ \rho variable}$ atteinte en $\boldsymbol{\rho}$ variable est un peu plus grande que l'Altitude de Culmination Analytique qui aurait été calculée sur la base de la Masse Volumique constante $\boldsymbol{\rho}_0$ prise au point de Fin de Propulsion.

Puisque le mobile a été légèrement plus haut en $\boldsymbol{\rho}$ variable que s'il était demeuré dans un air de Masse Volumique constante égale à $\boldsymbol{\rho}_0$, on peut tirer de son altitude $\mathbf{H}_{BalCulm\ \rho variable}$ une Masse Volumique Équivalente selon la loi analytique (qui ne fonctionne qu'en $\boldsymbol{\rho}$ constant) :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}} = \mathbf{f}^{-1}_{\text{Analytique}}(\mathbf{H}_{BalCulm\ \rho variable}).$$

Analytiquement, cette relation est la réciproque de la formule (11).

On peut démontrer assez facilement que l'altitude à laquelle le mobile rencontre un air de Masse Volumique égale à la Masse Volumique Équivalente est située entre **0** et **100 %** de son altitude de culmination réelle (nous montrerons plus loin que ce pourcentage est assez proche de **40 %**).

Lorsqu'un mobile de forte Distance Balistique (un boulet de plomb, par exemple) est animé d'une faible Vitesse de Projection, le freinage par Traînée qu'il subit dans son mouvement est extrêmement faible. Même si la Masse Volumique de l'air est prise comme constante (et égale à $\boldsymbol{\rho}_0$), ce freinage est très faible. Il existe, mais on pourrait le qualifier de symbolique.

Appelons $\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0)$ l'Altitude de Culmination calculée analytiquement en $\boldsymbol{\rho}$ constant.

Admettons à présent que la Masse Volumique de l'air traversé diminue avec l'altitude. Cette atténuation augmente très légèrement l'altitude atteinte par le mobile, mais ne peut constituer un grand réservoir de progrès pour cette altitude d'apogée : même réduire cette Masse Volumique à zéro (mouvement dans le vide) ne produira qu'un très faible gain en altitude (appelons ce gain $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide}$).

Si l'on utilise la formulation $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}} = \mathbf{f}^{-1}_{\text{Analytique}}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0) + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide})$, on doit donc trouver, selon nos hypothèses une $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}$ <u>nulle</u>.

Rappelons-nous que $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide}$ est très faible.

Rappelons-nous également que $(\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0) + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide})$ est une altitude qui ne saurait être dépassée, même dans le vide.

Supposons à présent que notre tableau commette une erreur de calcul qui, quoique faible, place l'Altitude de Culmination au-dessus de ($\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0) + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide}$)[35] … Si l'on demande à notre fonction $\mathbf{f}^{-1}_{Analytique}$ de calculer la Masse Volumique Équivalente pour cette altitude erronée supérieure à ($\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}_0) + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide}$), la Masse Volumique Équivalente $\boldsymbol{\rho}_{équiv}$ en deviendra négative (c'est à dire que la Traînée atmosphérique deviendrait motrice).

On voit qu'une utilisation indue de la fonction $\mathbf{f}^{-1}_{Analytique}$ peut conduire à des aberrations en particulier pour des mobiles peu rapides et très pénétrants.

Or notre tableau Pas à Pas Excel produit des erreurs qui, quoique faibles sont néanmoins susceptibles de conduire à ces aberrations.

Il y a donc là un piège *analytique* où nous sommes nous-mêmes tombé !

Et où, pour tout dire, nous nous sommes même débattu durant plusieurs semaines…

Résumons le problème des mobiles peu rapides et très pénétrants en disant que pour ceux-ci la Masse Volumique de l'air est très peu influente (freinante) et donc que pour que ces mobiles gagnent de l'altitude en jouant sur ce seul facteur de la Masse Volumique, il faut diminuer drastiquement celle-ci [36] [37] [38] !

Cette particularité qu'ont les courbes vertes de plonger vers le bas est donc un effet de la logique. On peut d'ailleurs la ressentir intuitivement en lisant le graphe ci-

---

[35] Cela peut arriver facilement puisque $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{H}_{vide}$ est très faible

[36] Si, à l'opposé, la Masse Volumique était très influente, la diminuer un petit peu prolongerait beaucoup l'ascension de notre projectile : ainsi on peut prolonger très substantiellement l'ascension d'une plume en diminuant la Masse Volumique de l'air où elle se déplace (à l'extrême, dans le vide, la plume se comporte comme un caillou projeté à la même vitesse)…

[37] Autre exemple facilitant la compréhension de ce phénomène : Le poids de carburant embarqué par une voiture de tourisme étant de très peu d'influence sur sa vitesse de pointe, si l'on désire augmenter celle-ci en jouant uniquement sur ce seul paramètre, il faudra se démunir de la presque totalité du carburant pour gagner très peu en vitesse de pointe. Et si l'on met en équation ce problème sans expliciter suffisamment ses limites, on en arrivera facilement à ce que, pour gagner par ex. 100 Km/h de vitesse de pointe, il faille embarquer une masse largement négative de carburant…

[38] Soumettons un autre exemple à votre esprit critique : L'air est réputé être constitué de 80 % d'azote. Supposons que cette proportion varie très faiblement avec l'altitude et qu'un augmentation de ce pourcentage influe de façon extrêmement minime sur l'Altitude de Culmination (l'azote étant, par exemple, légèrement plus visqueux que l'oxygène), une augmentation de 1 % de la proportion d'azote produisant un gain en altitude de un micromètre lors du vol d'une certaine fusée.

Une hausse de l'apogée de cette fusée de 2 micromètres pourrait donc, en toute logique, être attribué à une augmentation du taux d'azote de 2 %.

Si notre tableau de calcul de l'Altitude de Culmination commettait une erreur (parfaitement négligeable) de 1 mm vers le haut, on pourrait en être amené à conclure que cette hausse de l'apogée est due à une augmentation du taux d'azote de 1000 % !

On est en droit de calculer le pourcentage dessus comme une représentation de la sensibilité des projectiles à la Masse Volumique de l'air traversé. [39]

C'est d'ailleurs le sens physique de la dérivée :

$\frac{d\mathbf{H}_{BalCulm}}{d\boldsymbol{\rho}_{équiv}}$ qui est l'inverse de $\frac{d\boldsymbol{\rho}_{équiv}}{d\mathbf{H}_{BalCulm}}$ que montrent nos courbes :

On peut donc dire que lorsque le mobile devient lent et pénétrant, son mouvement devient insensible à la Traînée atmosphérique et la dérivée $\frac{d\boldsymbol{\rho}_{équiv}}{d\mathbf{H}_{BalCulm}}$ devient grande en valeur absolue…

Nous sommes donc fondés ainsi à penser que si un projectile se place bas sur le graphe, c'est qu'il est très peu sensible à cette Masse Volumique : il est soit très pénétrant, soit animé de très peu de vitesse de projection. On doit alors s'attendre à ce que les erreurs que commettra notre tableau dans la détermination d'une Altitude Pas à Pas en soit exacerbées…

Prenons un exemple numérique, celui d'un projectile défini par le couple {**50 m/s** ; **2000 m**}, c-à-d un projectile lent mais assez pénétrant.

Intéressons-nous à l'influence de l'Altitude de Culmination sur la Masse Volumique Équivalente :

De la famille de courbe présentée ci-dessus nous pouvons tirer un Taux de variation de la Masse Volumique Équivalente par mètre d'Altitude de Culmination assez proche de **– 0,18 Kg/m^3** par **mètre** d'altitude.

Supposons à présent que notre tableau se trompe de **0,01 m** sur l'Altitude de Culmination : Cette erreur insignifiante produira une erreur relative sur la Masse Volumique Équivalente de **0,01 m*(– 0,18 Kg/m^4)** , soit **– 0,0018 Kg/m^3** .

Or une telle fusée ne culmine qu'à **119,93 m** dans l'air et à moins de **127 m** dans le vide [40] ! Cette Altitude de Culmination ne réduit donc que très peu la Masse Volumique de l'air : Celle-ci n'est diminuée, à l'apogée, que de simplement **1,20 %** [41]soit **1,225*1,20 % = 0,0147 Kg/m^3** : nous avons donc le même ordre de grandeur pour les nombres **– 0,0018 Kg/m^3** et **0,0147 Kg/m^{3}Kg/m^3** (**18** constituant les **12 %** de **147**).

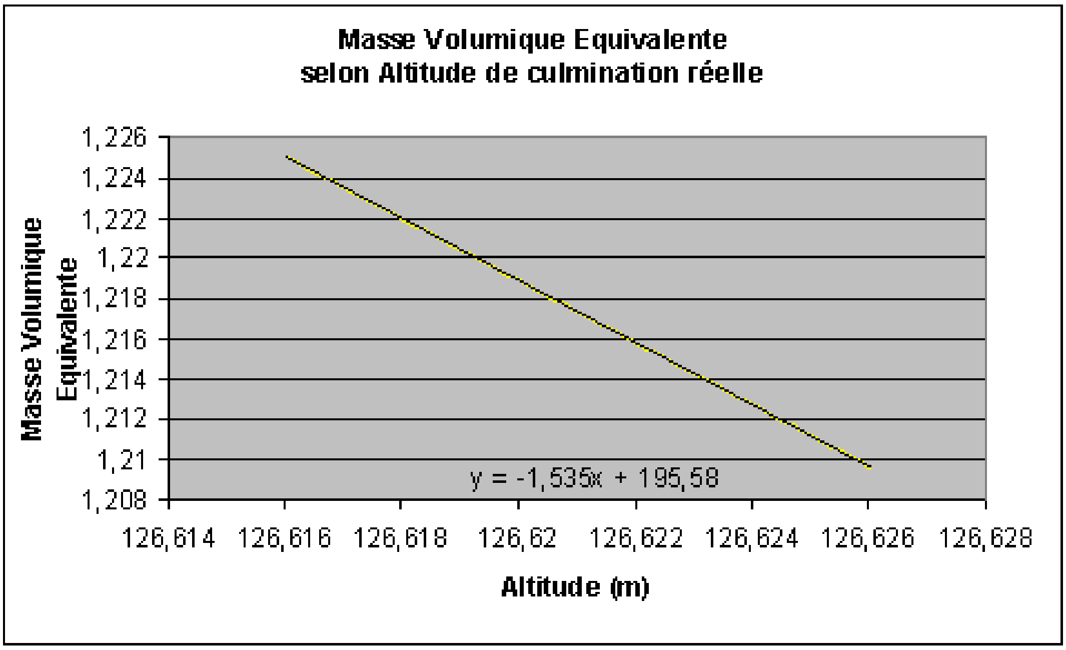
[39] Plus exactement, il faudrait prendre le graphe symétrique de celui-ci par rapport à l'axe horizontal pour lire cette sensibilité.

[40] Ici nous adoptons une loi de vitesse de type **v = gt**. L'altitude de culmination ne dépend alors même plus de la Distance Balistique du mobile, ni de sa Masse.

[41] Nous avons donné ce chiffre au début de ce texte : la variation de la Masse Volumique de l'air est de **1 %** par centaine de mètres de hauteur.

Il apparaît donc que la valeur analytique du Taux de Variation de la Masse Volumique Équivalente par mètre d'altitude de culmination place bien nos calculs en position de produire des aberrations.

Pour un mobile aussi lent mais extrêmement pénétrant, défini par le couple {**50 m/s** ; **20 000 m**}, on peut visualiser l'évolution de la Masse Volumique Équivalente selon l'altitude de Culmination déterminée par la formule (11). C'est la courbe jaune :



L'influence de l'Altitude sur la Masse Volumique Équivalente est ici extrêmement forte : une erreur de **1 m** sur le calcul de l'Altitude de Culmination (qui la ferait passer de **126,614** à **127,614 m**) rendrait la Masse Volumique Équivalente négative : répétons qu'en effet cette Masse Volumique est très peu influente (freinante) et que pour gagner de l'altitude en jouant uniquement sur la Masse Volumique il faut annuler complètement celle-ci !

En noir est une régression linéaire qui exprime cet état de fait :

$$\boldsymbol{\rho_{\text{équiv}} = -1{,}535\, H_{\text{BalCulm}} + 195{,}58}$$

Ce qui donne, dans le sens qui nous intéresse :

$$\boldsymbol{H_{\text{BalCulm}} = -0{,}651\, \rho_{\text{équiv}} + 127{,}41}$$

Il faut bien que la $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}$ devienne négative pour faire passer $\mathbf{H}_{\text{BalCulm}}$ à **127,614 m** . Notons que le coefficient **–0,65** est très proche de l'unité [42] .

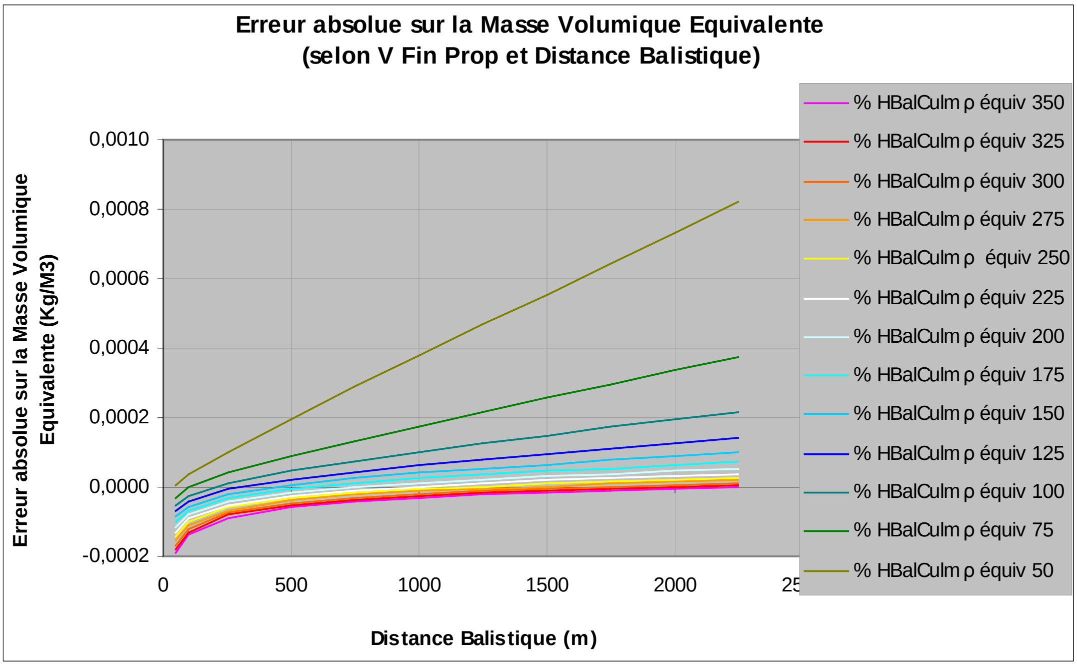
[42] C'est à dire que chaque erreur d'un mètre modifierait la Masse Volumique Équivalente de presque sa valeur au sol. Gardons cependant à l'esprit que ce coefficient est fonction du couple **{**Vitesse de Fin de Prop ; Distance Balistique**}** qui caractérise le projectile et son mouvement !

La chose positive que nous apprend quand-même le graphe du Taux de variation de la Masse Volumique Équivalente selon l'Altitude de Culmination Calculée est que pour les vitesses de projection supérieures ou égales à **125 m/s**, le Taux est inférieur à **0,01 Kg/m^3** : Une erreur dans le calcul de l'Altitude de Culmination de **0,1 m** produira immanquablement une erreur de moins de **0,001 Kg/m^3** sur la Masse Volumique Équivalente, soit une erreur correspondant à **8,3 m** d'erreur de localisation de l'altitude de Masse Volumique Équivalente [43] (alors que des mobiles animés d'une telle vitesse de projection culminent à quelques centaines de mètres).

Calcul de l'erreur de notre tableau pour tous les mouvements de projectiles usuels

Puisque nous possédons un tableau représentant le Taux de variation (par mètre d'erreur sur l'Altitude de Culmination) de la Masse Volumique Équivalente selon l'Altitude de Culmination et que d'autre part nous possédons également un tableau donnant l'erreur *estimée* commise par notre tableau, il nous est possible en multipliant chaque cellule par la cellule homologue de l'autre tableau de proposer une estimation de l'erreur absolue commise par notre tableau sur la **ρ** Équivalente.

Voilà les courbes résultant de ce produit :



Cette erreur est donc assez forte pour les courbes vertes (kaki, vert sombre et glauque). Et ceci est d'autant plus dommageable que pour ces courbes vertes (qui correspondent aux vitesses de projection des fusées à eau) les altitudes atteintes sont faibles et donc la variation de la Masse Volumique entre la Fin de Propulsion et la

[43] Nous revenons un peu plus bas sur le fait que chaque Masse Volumique Équivalente est traversée par nos mobiles à une certaine altitude.

Culmination peu marquée : Par exemple l'erreur de **~ 0,0008 Kg/m^3** commise par notre tableau pour de des projectiles {**50 m/s ; 2000 m** } correspond à un déplacement en altitude de **6,5 m**, ce qui est beaucoup pour ce type de projectiles.

D'une façon générale, en effet, une erreur de **n Kg/m^3** sur la détermination de la Masse Volumique Équivalente correspond à une erreur en mètres sur la détermination de l'Altitude où le mobile rencontre sa Masse Volumique Équivalente assez proche de :

$$\frac{\mathbf{10^4}}{\mathbf{1,225}}\ \mathbf{n}$$

Cette proportion est tirée de la constatation que la Masse Volumique de l'air varie de **10 %** par **1000 m** d'altitude. Mais une règle plus précise peut être tirée de la loi d'évolution hyperbolique de la Masse Volumique de l'air selon l'altitude. Cette règle serait :

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{(20\,000 + H)^2}}{\mathbf{40\,000}\ \boldsymbol{\rho}_0}$$

soit effectivement, pour des **H** faibles :

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{10^4}}{\boldsymbol{\rho}_0}$$

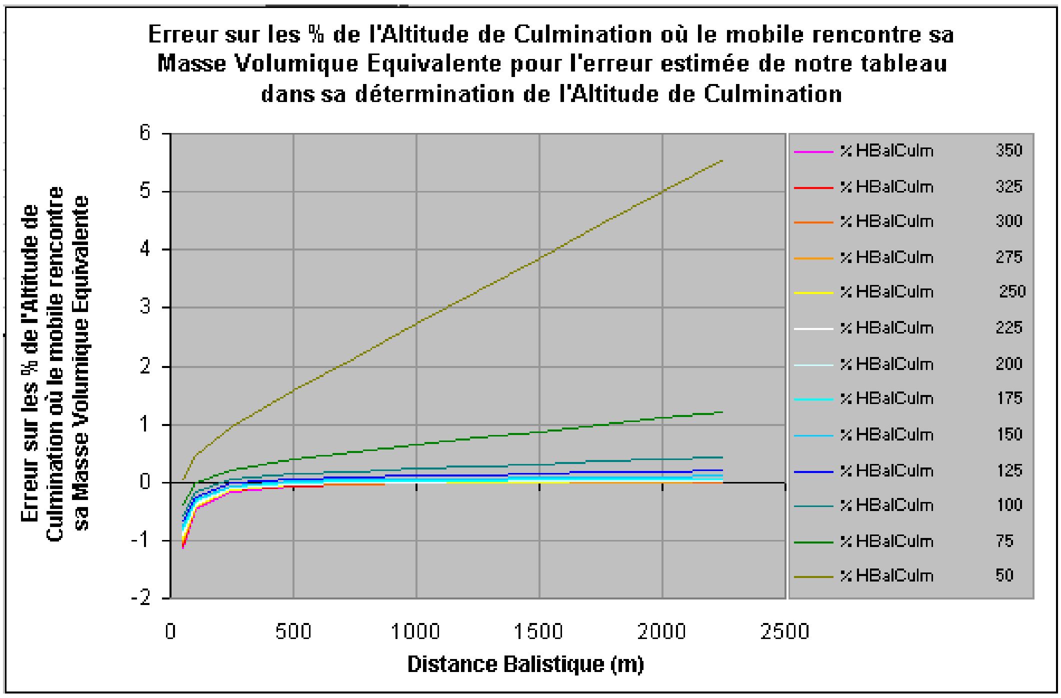
Or le même mobile {**50 m/s ; 2000 m** }possède une altitude de Culmination de près de **120 m** : le déplacement de l'Altitude de **ρ** équivalent de **6,5 m** représente donc plus de **5 %** de l'Altitude de Culmination. C'est trop pour notre goût.

À ce stade de la réflexion, nous décidons de faire produire directement par Excel une estimation de l'erreur sur de l'altitude de Masse Volumique Équivalente (exprimée en **%** de l'Altitude de Culmination), cette erreur étant basée sur l'erreur (estimée) que commet notre tableau dans son calcul de l'altitude de culmination Pas à Pas.

Comme précédemment, il suffira d'effectuer le produit de chacune des cellules de cette erreur estimée par les cellules homologue d'un autre tableau que nous faisons calculer pour la circonstance. Ce dernier tableau reprend les valeurs du Taux d'erreur sur la Masse Volumique Équivalente par mètre d'erreur sur la détermination de l'Altitude de Culmination, mais en transformant cette erreur en une altitude [44] et en exprimant cette altitude en **%** de celle de culmination.

[44] Chaque Masse Volumique se rencontre à une altitude donnée, nous l'expliquions à l'instant…

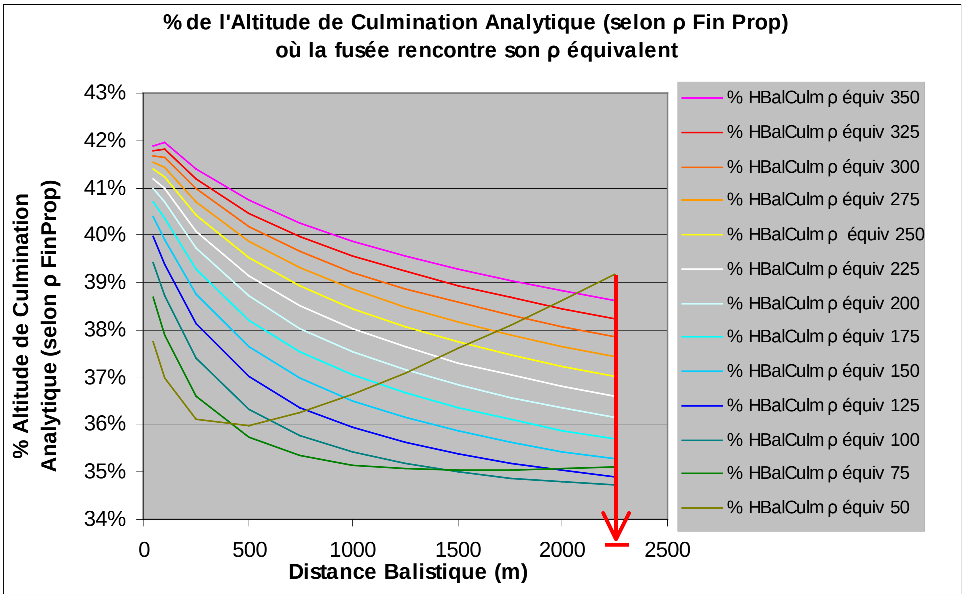
Voici les courbes que dessine le produit final, à savoir l'erreur (en **%**) sur la détermination du pourcentage de l'Altitude de Culmination où le mobile rencontre sa Masse Volumique Équivalente (ce calcul d'erreur étant basé sur l'erreur estimée de notre tableau Pas à Pas dans son calcul de l'Altitude de Culmination) :



Comme on s'y attendait la courbe kaki (et à moindre titre la courbe vert d'herbe) témoigne d'une aberration.

Cette escapade aberrante est évidemment fonction de la divagation du Taux de variation de la Masse Volumique par mètre d'erreur sur l'Altitude de Culmination déjà illustrée par le graphique ci-dessus, mais ici cette divagation est exacerbée par le quotient que l'on fait de ces valeurs par de très faibles Altitudes de Culmination.

Notons d'ailleurs que les **5,60 %** d'erreur que l'on relève sur le graphe précédent pour le couple **{50m/s ; 2250m}** pouvait déjà se soupçonner sur la courbe kaki de la famille de courbe représenté auparavant (ci-dessous) : Le segment rouge (de hauteur **5,6 %**) ramène le point de droite de la courbe kaki en dessous de **34 %**, position beaucoup plus en accord avec l'allure générale des autres courbes :



Cette constatation semble donc légitimer notre calcul de l'erreur commise par notre tableau dans son calcul Pas à Pas de l'Altitude de Culmination.

Par prudence, nous n'en tirons pas pour autant une méthode qui corrigerait la famille de courbes ci-dessus…

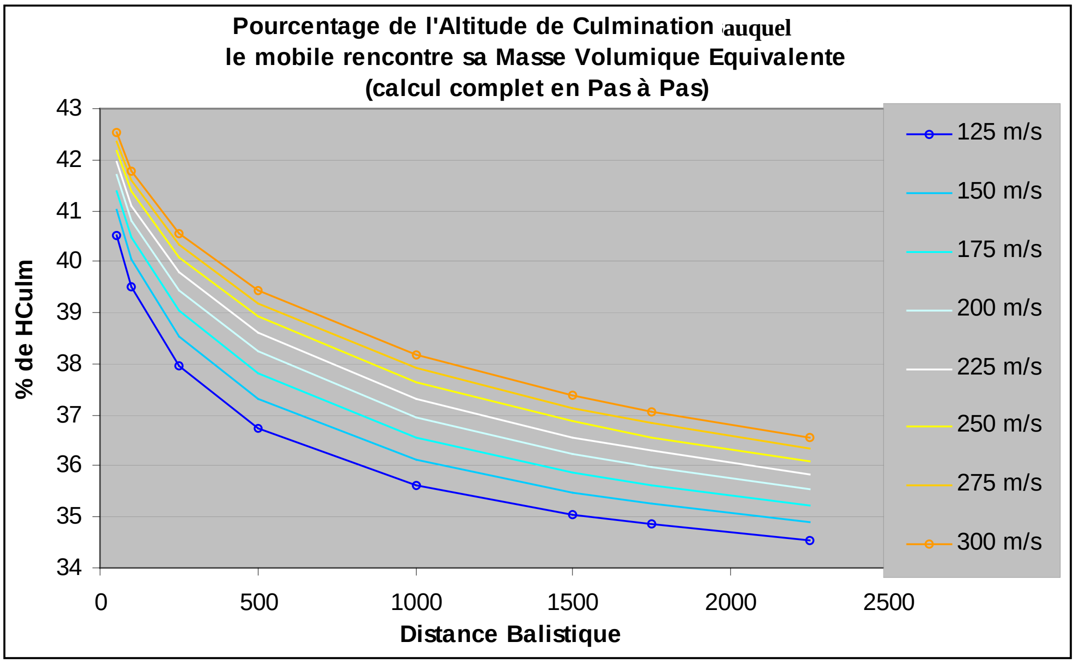
Afin d'entendre un autre son de cloche, nous décidons de faire calculer à Excel, la Masse Volumique Équivalente non pas au moyen de la fonction réciproque de l'Altitude de Culmination analytique mais au moyen de notre tableau Pas à Pas lui-même (en **ρ** constant, bien sûr) : la fonction *Valeur cible* d'Excel incrémentera la Masse Volumique constante jusqu'à ce que le tableau Pas à Pas donne une Altitude de Culmination égale à celle trouvée en **ρ** variable.

Ainsi, nous pouvons caresser l'espoir que certaines erreurs systématiques de notre tableau se compenseront en partie mutuellement par le fait que nous aurons utilisé le même instrument de détermination pour les deux Altitudes de Culmination (en **ρ** variable et en **ρ** constant).

À titre d'exemple, on peut dire que, de la même façon, le calcul du pourcentage de diminution de l'épaisseur d'une congère gagne à être pratiqué avec la même règle graduée, que celle-ci soit graduée en yard ou en mètre : changer de règle entre deux mesures introduirait une erreur relative importante liée à l'écart entre le mètre et le yard : pour la mesure d'une variation relative (ici un pourcentage de diminution d'épaisseur), ce qui compte ce n'est pas la fidélité des graduations de la règle à un quelconque étalon de mesure (le mètre du pavillon de Breteuil, par exemple), mais la régularité de l'espacement desdites graduations.

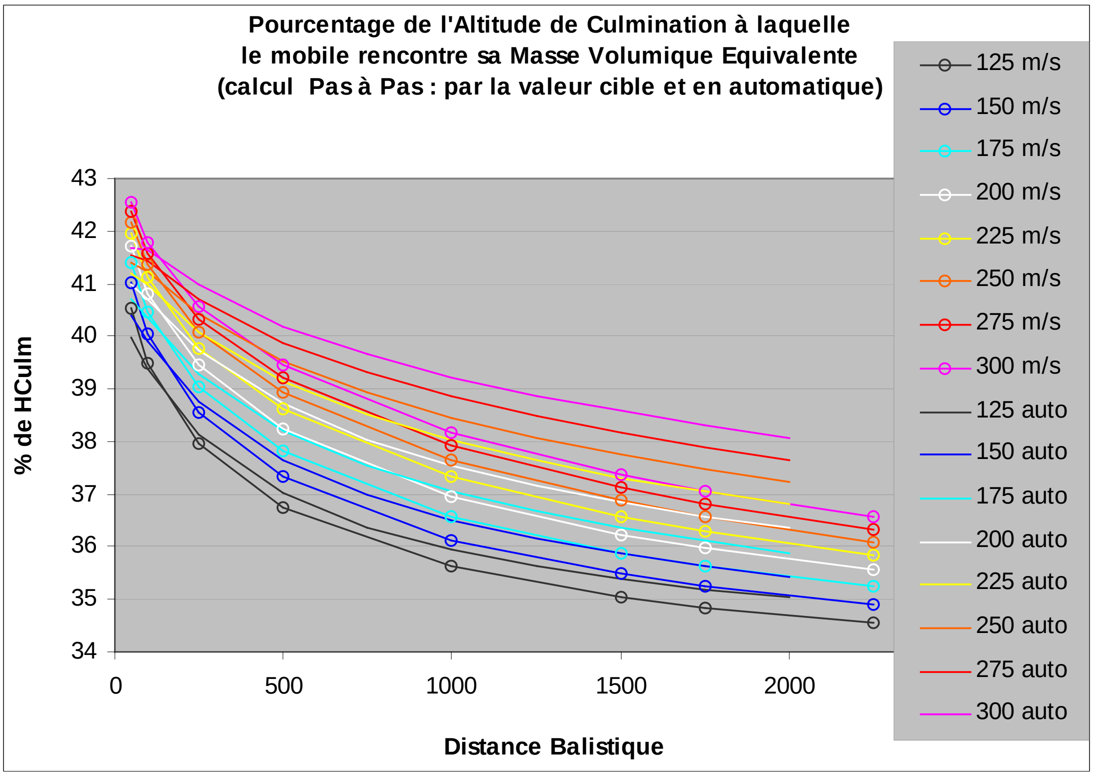
Nous n'effectuons pas ses calculs pour les courbes vertes, convaincu qu'elles peuvent nous conduire à des errements, de par l'importance du Taux de variation du **ρ** équivalent en fonction des erreurs sur l'altitude [45] .

Voici le résultat de ces requêtes de *Valeurs cibles*, à savoir le pourcentage de l'Altitude de Culmination auquel le mobile rencontre sa Masse Volumique Équivalente, ce pourcentage étant calculé uniquement Pas à Pas, c-à-d sans utilisation de la formule analytique de l'Altitude de Culmination :



[45] Nous avons l'espoir que les deux erreurs se compensent mutuellement en partie, mais nous devons penser qu'il peut encore subsister des erreurs aléatoires, le tableau n'étant pas utilisé exactement de la même façon en **ρ** constant et en **ρ** variable

Il est notable que ce pourcentage n'est pas le même que celui donné par le graphe précédent. Voici d'ailleurs une représentation sur le même repère des deux familles de courbes (sans les courbes vertes) :

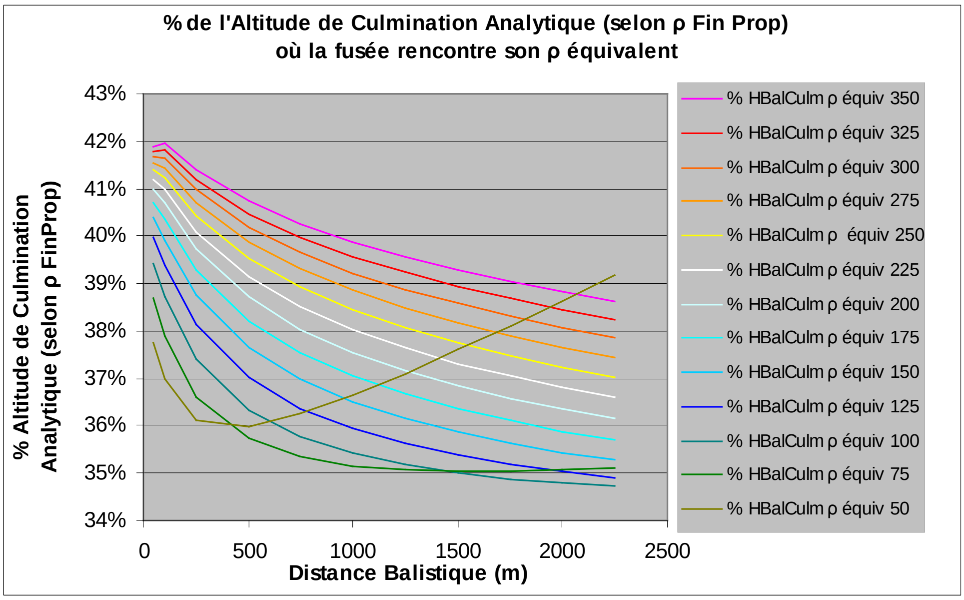


Les courbes avec marques rondes sont issues des calculs avec *valeurs cibles*. Les courbes sans marques sont issues des comparaisons entre l'altitude obtenue avec le tableau Pas à Pas et l'altitude analytique en **ρ** constant.

La comparaison des deux jeux de courbes, couleur à couleur, ne nous enthousiasme évidemment pas.

Et puis nous nous faisons la remarque que l'espace entre les courbes homologues n'est jamais que de 1,2 % de l'Altitude de Culmination : Cet écart ne peut produire qu'une erreur négligeable sur la Masse Volumique Équivalente (qui est le but de notre calcul, ne l'oublions pas)…

Quant aux crochets initiaux des parties gauches et hautes des courbes sans marque, crochets que l'on peut encore remarquer ci-dessus mais mieux sur le graphe ci-dessous (déjà présenté) :



…ils constituent peut-être également des artefacts :

Ces crochets n'apparaissent que dans la partie (gauche et haute), partie qui est consacrée :

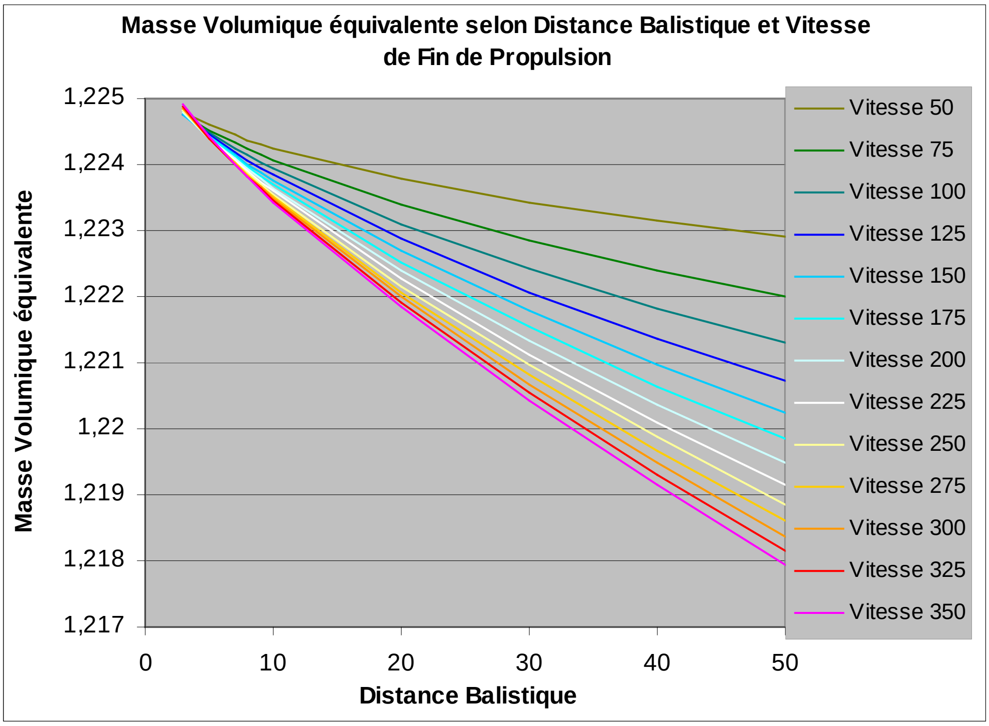
→ par la Distance Balistique aux fusées à eau (**100** et surtout **50 m)**
→ par les Vitesses de Fin de Propulsion (à partir de **125 m/s**) aux fusées à feu.

On pourrait donc ignorer ces crochets comme sans impact sur les fusées usuelles. Mais ils sont peut-être l'indice d'une erreur de notre tableau aussi nous entichons-nous de chercher une explication à leur présence.

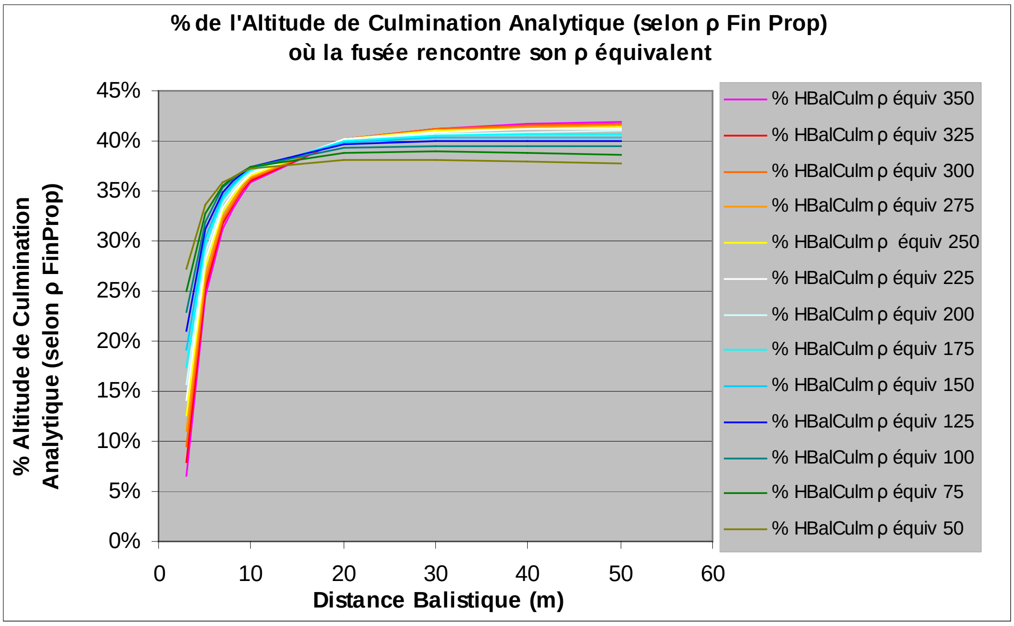
Notre tableau, interrogé en **ρ** constant [46], est pourtant, pour la distance balistique de **50 m** et les fortes vitesses (de **150** à **350 m/s**) d'une précision allait de **0,005** à **0,013 %**…

[46] afin d'opérer une comparaison avec la formulation analytique de l'Altitude de Culmination, formulation dont on sait qu'elle est établie en **ρ** constant.

Pour ces très faibles Distances Balistiques (de **3 à 50 m**), le même tableau prédit sans surprise, comme Masse Volumique Équivalente :



…mais surtout, il prédit pour le pourcentage de l'Altitude de culmination analytique auquel la fusée rencontre sa Masse Volumique Équivalente (les vitesses s'échelonnant toujours de **50** à **350 m/s**) :



La plongée vers le bas de la gauche des courbes est patente.

Bien sûr, elle n'est intéressante que pour notre réflexion <u>théorique</u> puisque dans la pratique des Distances Balistiques si faibles ne sont jamais usitées.

Il reste très possible que cette plongée soit due au cumul d'erreur de notre tableau…

Nous finissons d'ailleurs par nous en convaincre en abandonnant le calcul analytique et reprenant la méthode de la *Valeur Cible* : Nous demandons à Excel de trouver par calcul Pas à Pas la Masse Volumique Équivalente correspondant à une Altitude de Culmination calculée, également Pas à Pas, en **ρ** variable).

Le pourcentage de l'Altitude de culmination à laquelle la fusée rencontre cette Masse Volumique Équivalente, pour la Distance Balistique de **3 m** est, pour les vitesses précisées :

Vitesse :	50 m/s	100 m/s	150 m/s	200 m/s	250 m/s	300 m/s
% Alt Culm	41,79 %	43,15 %	43,76 %	44,13 %	44,36 %	44,62 %
Culmination	6,68154 m	8,74835 m	9,96246 m	10,82462 m	11,4935 m	12,0400 m

Notre tableau Pas à Pas est ici utilisé dans à l'extrême limite de ses possibilités ; mais on note cependant des pourcentages restant assez proche de **40 %** de l'Altitude de Culmination.

La même requête de Valeur Cible pour le seule Vitesse de Projection de **50 m/s** et pour des Distances Balistiques diminuant de **3** à **0,1 m** donne comme résultats :

Distance Balistique	3 m	1 m	0,5 m	0,1 m
% Alt Culm	41,79%	42,90 %	43,49 %	44,72 %
Culmination	6,6815476 m	2,7721925 m	1,5587533 m	0,3920523 m

D'autres requêtes du même type pour la vitesse de 200 m/s pronostiquent des pourcentage au-dessus de 44 % pour les même Distances Balistiques de **3** à **0,1 m**.

La retombée des courbes du Pourcentage de l'Altitude de Culmination à laquelle une fusée rapide et extrêmement peu pénétrante rencontre sa Masse Volumique Équivalente semble donc être un artefact…

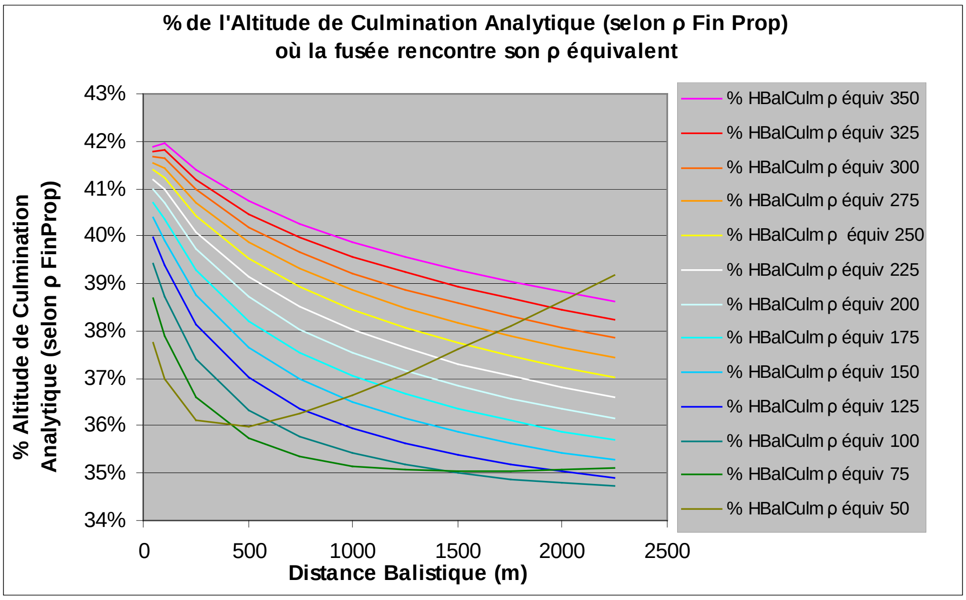
Pourtant, malgré ces résultats, des calculs utilisant des principes différents semblent militer pour la réalité de cette retombée ; nous évoquons une note annexe sur ce sujet, un peu plus bas.

On pourrait penser que la très faible Distance Balistique de ces mobiles les place en régime presque essentiellement aérien : l'intégration mathématique d'un cas idéal où la gravité n'interviendrait plus est d'ailleurs plus aisée que celle du cas général (cas général qu'on pourrait qualifier d'*aéro-gravitaire*). Elle est traitée dans une note de fin de texte . Malheureusement, cette analyse mathématique ne débouche sur aucune conclusion quant à ce problème des crochets étudiés à l'instant.

Sur notre planète, au demeurant, même lorsque la Distance Balistique d'un mobile est très faible, la gravité intervient toujours (à l'approche de la culmination) pour mettre un terme à son mouvement ascendant, mouvement qui, en l'absence de gravité, se poursuivrait indéfiniment (ainsi que le prouve la note de fin de texte évoquée à l'instant) : on ne peut donc pas assimiler le mouvement des projectiles de très faible Distance Balistique à des Mouvements Purement Aériens…

À côté de cette hypothèse du Mouvement Purement Aérien, il peut venir à l'esprit d'étudier le comportement d'un projectile qui n'attendrait que des altitudes si faibles que la variation de la Masse Volumique de l'air ne se ferait sentir sur son mouvement que de façon négligeable : cette dernière insensibilité n'empêche pas, en effet, de calculer sa Masse Volumique Équivalente et l'altitude à laquelle elle la rencontre. Ce travail est effectué dans une copieuse note annexe disponible sur la page Physique de la fusée du site Go Mars ! : Cette note nous a été l'occasion de réaliser de curieuses intégrations mathématiques…

Mais revenons à la partie plus usuelle des pourcentages de l'Altitude de Culmination à laquelle un projectile rencontre sa Masse Volumique Équivalente :



Observons la partie de droite des courbes de **125** à **350 m/s** : il peut être salutaire de remarquer que, pour ces cas de mouvement, la Traînée commence à se faire négligeable (très fortes Distances Balistiques) : on peut imaginer que l'Altitude de Culmination devient alors justiciable des lois simples du mouvement uniformément accéléré.

Dans ces conditions (extrêmes) il est possible de calculer la Masse Volumique Équivalente du vol :

→d'une part en linéarisant l'évolution de la Masse Volumique selon l'altitude

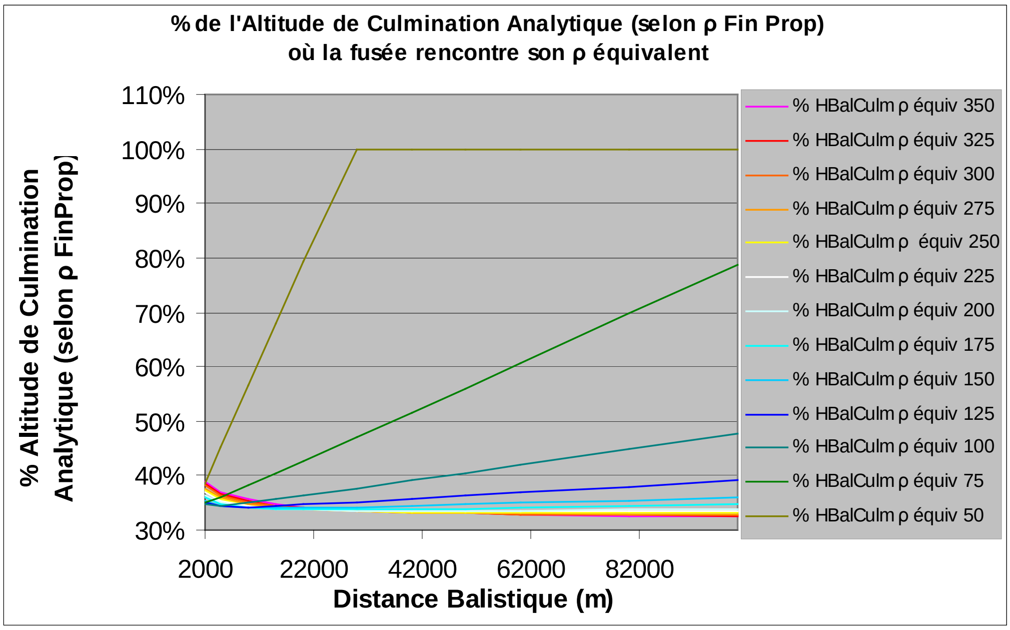
→et d'autre part en s'en tenant, pour la fusée, à une loi de vitesse du type **V = gt** (qui ne vaut que lorsque le freinage de l'air ne se fait pas sentir).

Le résultat que nous trouverons constituera sans doute une asymptote pour les courbes présentées ci-dessus.

L'intégration du problème est présentée dans une note de fin de texte, sous deux variantes.

Cette intégration conduit effectivement à ce que les courbes des Masses Volumiques Équivalentes admettent une asymptote horizontale placée à peu près à la hauteur de **40 %** (**2/5**$^{\text{ème}}$) ou un peu moins (**38 %**)…

Notre tableau, interrogé pour les projectiles rapides de très fortes Distances Balistiques ne fait pourtant apparaître que confusément cette asymptote :



Certains membres de cette famille de courbes sont déjà connus de nous comme faisant état d'une aberration : ce sont les courbes vertes. La courbe kaki, en particulier affiche ouvertement sa dissonance puisqu'elle monte résolument vers les **100 %** [47] .

Nous avons déjà étudié cette aberration pour des mobiles lents et beaucoup moins pénétrants : il apparaît ici que les courbes vertes, et même les courbes bleues les moins rapides connaissent le même trouble (réservé heureusement à des mobiles quelque peu virtuels).

Nous présentons ces résultats tels quels pour renseigner le lecteur sur les difficultés qui peuvent naître d'une interrogation simple…

Quoiqu'il en soit de ces deux problèmes, nous voyons pourtant se dessiner une règle sur les graphes, du moins pour les fusées de plus de **500 m** de Distance Balistique animées d'une Vitesse de Fin de Propulsion allant de **100** à **300 m/s**.

Cette règle pourrait être :

[47] Le fait qu'elle ne franchit pas cette limite est une conséquence des modalités de fonctionnement de la fonction Recherche d'Excel.

« L'altitude à laquelle une fusée (dotée d'une vitesse de Fin de Propulsion allant de**100** à **300 m/s** et de Distance balistique supérieure à **500 m**) rencontre son air de Masse Volumique Équivalente va de **34,5** à **40 %** de son Altitude de Culmination Analytique (basée sur la Masse Volumique au point de Fin de Propulsion) ». [48]

Ce renseignement nous suffirait pour donner une Masse Volumique Équivalente approchée en fonction de la formule exponentielle de la Masse Volumique, à savoir :

Formule (4)

$$\boldsymbol{\rho_{(h)} = \rho_0 \, \mathrm{Exp}\left(\frac{-h}{9700}\right)}$$

…formule (4) où nous donnerions à **h** **34,5** à **40 %** de sa valeur tirée de la formule classique (2) :

Formule (2)

$$\mathbf{H}_{\mathrm{BalCulm}} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}} \left\{ \mathbf{Ln}\left[\left(1 + \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{2}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}}\right)\right]\right.$$

L'exponentielle annihilant les effets du logarithme, il se dégage bientôt l'expression :

Formule (11)

$$\rho_{\text{équiv}} = \rho_0 \left(\frac{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\mathrm{bal}}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\mathrm{bal}} + \mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{2}}\right)^{(\mathbf{K}\,\mathbf{D}_{\mathrm{bal}} / 19400)}$$

avec **K** valant de **0,345** à **0,40** pour une fusée de Vitesse de Fin de propulsion allant de **100 m/s** à **300 m/s**, la Distance Balistique de la fusée étant supérieure à **500 m**.

Bien que la valeur du coefficient **K** soit variable selon les couples (Vitesse de Fin de Propulsion ; Distance Balistique), la variation de cette valeur ne se fait sentir sur le résultat que pour **1,2 %** au maximum (pour une Distance balistique de **2250 m**). On peut donc accepter de lui donner une valeur fixe moyenne.

Dans ces conditions, pour les vitesses de Fin de Propulsion allant de **100** à **300 m/s**, la Masse Volumique Équivalente peut être approchée par :

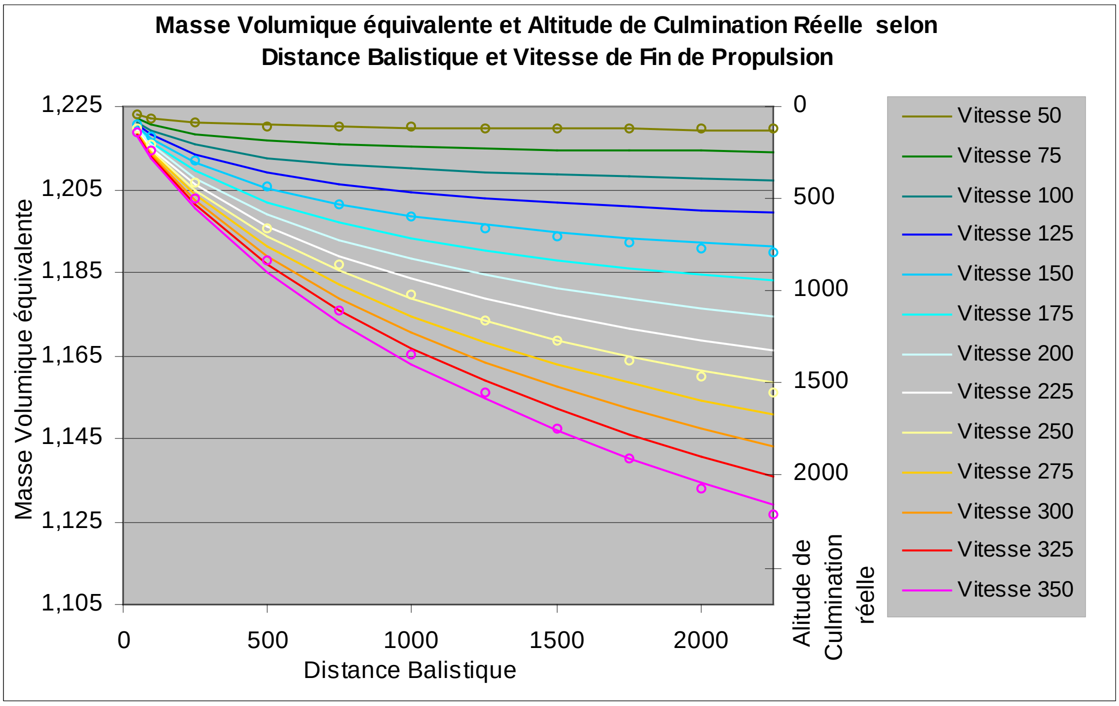
$$\rho_{\text{équiv}} = \rho_0 \left(\frac{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\mathrm{bal}}}{\mathbf{g}\,\mathbf{D}_{\mathrm{bal}} + \mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}^{2}}\right)^{(\mathbf{D}_{\mathrm{bal}} / 52000)}$$

la Distance Balistique de la fusée étant supérieure à **500 m**.

Cette valeur est précise à moins de **0,6 %** près.

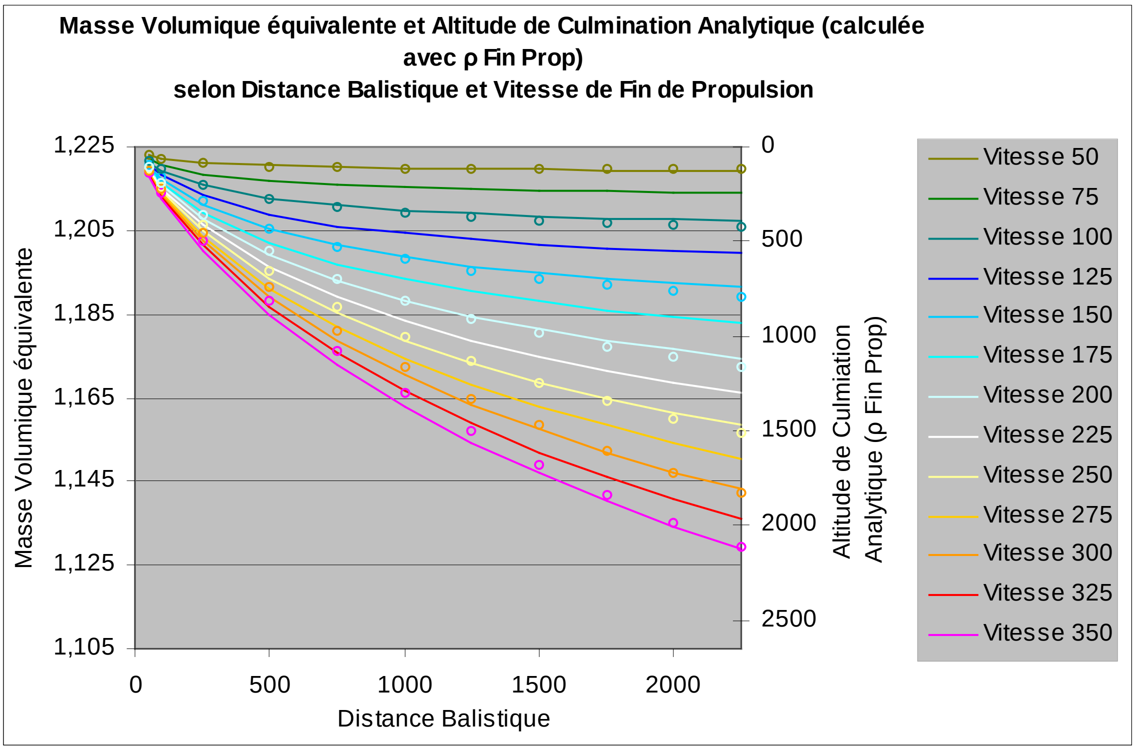
[48] Nous avons exclu de cette appréciation les vitesses de 325 et 350, trop proches du son.

Cette première formulation nous encourage et nous donne l'idée d'opérer, sur les plages usuelles de Distances Balistiques et de Vitesse de Fin de Propulsion, une comparaison entre la Masse Volumique Équivalente, d'une part et l'Altitude de Culmination calculée en **ρ** variable d'autre part :



Il y a bien une similitude des courbes en trait plein (Masse Volumique Équivalente) avec les courbes symbolisées par les petites marques rondes (Altitude réellement atteinte en mètres, référencée à l'échelle de droite). Nous avons d'ailleurs évidemment recherché cette similitude en choisissant une échelle appropriée pour la représentation de ces altitudes.

Mais l'Altitude de Culmination calculée en **ρ** variable n'est pas particulièrement facile à déterminer : il faut pour ce faire disposer d'un tableur. Voyons plutôt si l'on peut rapprocher profitablement la Masse Volumique Équivalente de l'Altitude de Culmination analytique (celle-ci étant calculée à partir de la Masse Volumique au point de Fin de Propulsion) :



Nous avons toujours de la chance : on remarque que, pour une échelle correctement choisie, la similitude des courbes existe toujours !

Une optimisation de l'échelle de représentation de l'Altitude de Culmination Analytique par rapport à celle de la Masse Volumique Équivalente permet alors d'édicter les règles suivantes qui constitueront les résultats finaux de cette recherche :

Pour les fusées de Vitesse de Fin de Propulsion s'étageant de **150** à **300 m/s**. [49], la Masse Volumique Équivalente peut être donnée par :

Formule (12)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}} = \boldsymbol{\rho_0} - \mathbf{4{,}52\ 10^{-5} * H}_{\text{BalCulmAna}}}$$

approximation donnant la Masse Volumique Équivalente <u>à **0,20 %** près</u>, pour des fusées de Vitesse de Fin de Propulsion allant de **150** à **300 m/s**.,

$\mathbf{H}_{\text{BalCulmAna}}$ étant l'Altitude de Culmination <u>Analytique</u> (basée sur la Masse Volumique au point de Fin de Propulsion),

$\boldsymbol{\rho}_0$ étant la Masse Volumique de l'air au même point de Fin de Propulsion.

Nous avons vu que pour les fusées de Vitesse de Fin de Propulsion s'étageant de **50** à **125 m/s** notre calcul de la Masse Équivalente produisait des aberrations.

Nous n'osons donc proposer une formulation de la Masse Volumique Équivalente qui serait sujette à caution. Tout au plus peut-on frapper du bout des doigts et pour la seule Vitesse de Fin de Propulsion de **125 m/s**, la formulation :

Formule (13)

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}} = \boldsymbol{\rho_0} - \mathbf{4{,}3\ 10^{-5} * H}_{\text{BalCulmAna}}}$$

approximation donnant la Masse Volumique Équivalente <u>à **0,07 %** près</u>, pour des fusées de Vitesse de Fin de Propulsion de **125 m/s**.,

$\mathbf{H}_{\text{BalCulmAna}}$ étant l'Altitude de Culmination <u>Analytique</u> (basée sur la Masse Volumique au point de Fin de Propulsion),

$\boldsymbol{\rho}_0$ étant la Masse Volumique de l'air au même point de Fin de Propulsion.

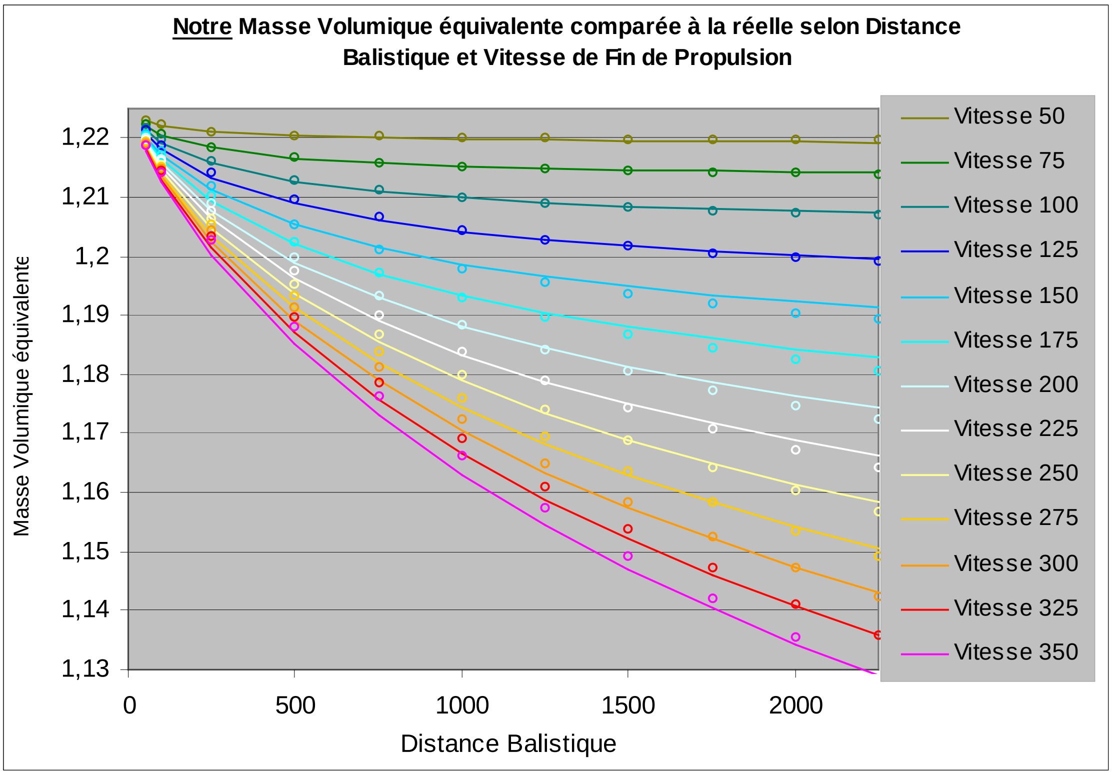
Il est satisfaisant de remarquer que, si l'on compare les coefficients **4,52** et **4,3 $\mathbf{10^{-5}}$** au coefficient de notre régression linéaire :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho_0} - \mathbf{1{,}1\ 10^{-4}\ h}$$

…que nous avons déclaré valable jusqu'à **3000m**, on note des proportions de **41** et **39 %** proches du rapport que nous avons souvent rencontré entre l'altitude de Masse Volumique Équivalente et l'Altitude de Culmination…

[49] Nous excluons les Vitesses de projection supérieures, comme trop proches de celle du son. Un adaptation du coefficient à 4,65 est cependant envisageable.

Voici la comparaison de notre proposition de Masse Volumique Aérienne Équivalente avec la réelle (calculée par notre tableur) :



Les marques rondes représentent notre Masse Volumique Équivalente (la courbe bleue dense naissant de notre formulation en **4,3 10^{-5}** propre à la vitesse **125 m/s**, et les autres naissant de notre formulation en **4,52 10^{-5}** propre aux vitesses de **150** à **300 m/s**).

Il est évidemment possible d'améliorer la précision de ces formulations. Par exemple, pour les vitesses de Fin de Propulsion de **150** à seulement **200 m/s**, une nette amélioration découle du choix du coefficient **4,42 m/s** (précision : **0,12 %**).

Rappelons pour conclure que c'est cette Masse Volumique Équivalente $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}$ qui sera la base d'une détermination améliorée de l'Altitude de Culmination $\mathbf{H}_{\text{BalCulm}}$ d'une fusée (c-à-d l'altitude mesurée au-dessus de l'altitude de Fin de Propulsion) selon la formule analytique classique :

Formule (2)

$$\boxed{\mathbf{H}_{\text{BalCulm}} = \ \mathbf{½}\ \mathbf{D}_{\text{Bal}} \left\{ \mathbf{Ln}\left[\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{V}_{\text{FinProp}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{g}\ \mathbf{D}_{\text{Bal}}}\right)\right]\right.}$$

expression où :

$\mathbf{D}_{\text{Bal}}$ est la Distance Balistique, définie comme l'inverse du coefficient balistique du Vol de la Fusée (à savoir : $\mathbf{D}_{\text{Bal}} = \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{½}\ \boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}\ \mathbf{SCx}}$), $\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}$ étant la Masse Volumique Aérienne Équivalente donnée par le graphe ci-dessus,

$\mathbf{V}_{\text{FinProp}}$ est la Vitesse de Fin de Propulsion de la fusée,

et **g** l'accélération de la pesanteur.

<u>CONCLUSION :</u>

Nous avons dégagé une loi donnant la Masse Volumique Équivalente de l'air traversé par les fusées à feu animées de Vitesse de Fin de Propulsion allant de **125** à **300 m/s**.

Cette loi nous semble suffisamment précise pour constituer un progrès dans le calcul analytique de l'Altitude de Culmination.

Pour les vitesses inférieures (propres aux fusées à eau) nous avons échoué à dégager avec suffisamment de certitude une loi du même type, bien qu'on puisse penser qu'une loi du même type serait pertinente…

Néanmoins les altitudes atteintes par cette catégorie de fusées sont telles que la variation de la Masse Volumique de l'air a très peu d'influence sur leur Altitude de Culmination. C'est pour ces fusées que notre recherche était la moins utile…

Bernard de GO MARS !
le 04/04/2008

(voir les notes de fin de texte ci-dessous)

<u>Abaques donnant la Distance Balistique d'un mobile en fonction de sa Masse Balistique et de son Diamètre :</u>

Rappelons que la Distance Balistique d'un projectile peut être définie soit :

→ comme l'inverse du coefficient balistique du Vol de la Fusée , à savoir :

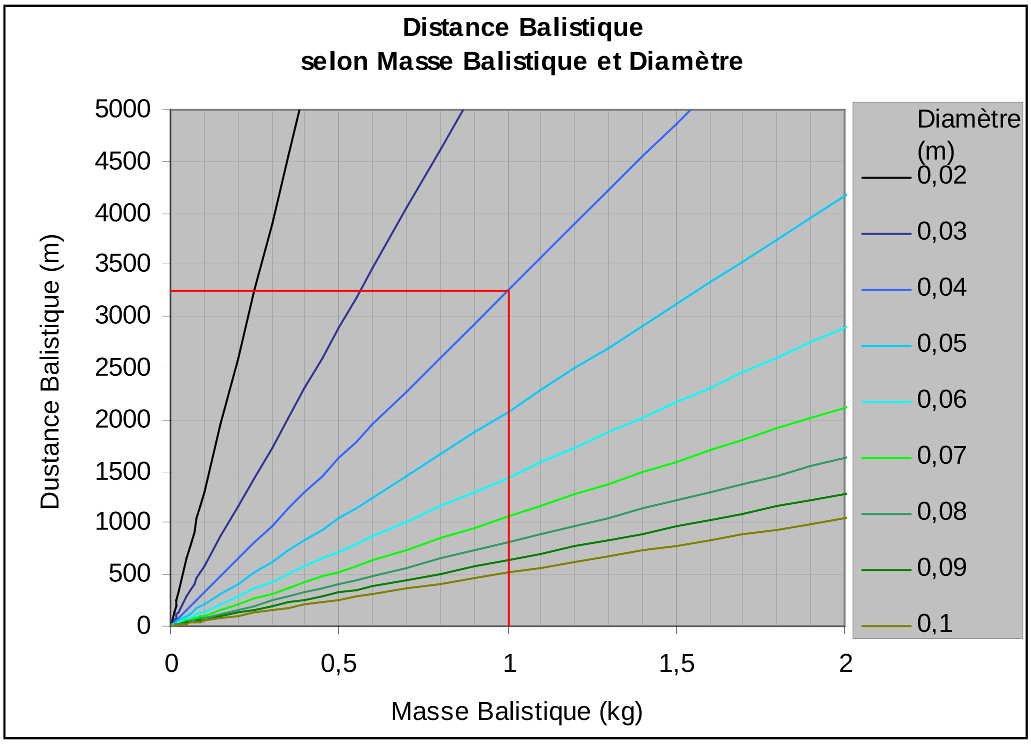
$$\mathbf{D}_{\text{Bal}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{½}\ \boldsymbol{\rho}\ \mathbf{SCx}}$$

→ comme la distance qu'il faudrait à la fusée pour voir sa vitesse divisée par **e = 2,718** (base des logarithme népérien) sous l'action de la seule traînée atmosphérique (sans effet de la gravité, à l'occasion d'un tir horizontal, par exemple, ou dans une bulle d'atmosphère en orbite)

Ces abaques ont donc été établis à partir de la formulation de Distance Balistique d'un projectile ci-dessus. Pour le premier abaque, nous nous sommes basés sur une Masse Volumique Aérienne de **1,225K g/m³** au point de propulsion ainsi que sur un **Cx** de la fusée de **0,4** (référencé à la section frontale de son ogive [50]).

Si un **Cx** ou une Masse Volumique différent est choisi, on peut déterminer la Distance Balistique par le simple jeu des proportions.

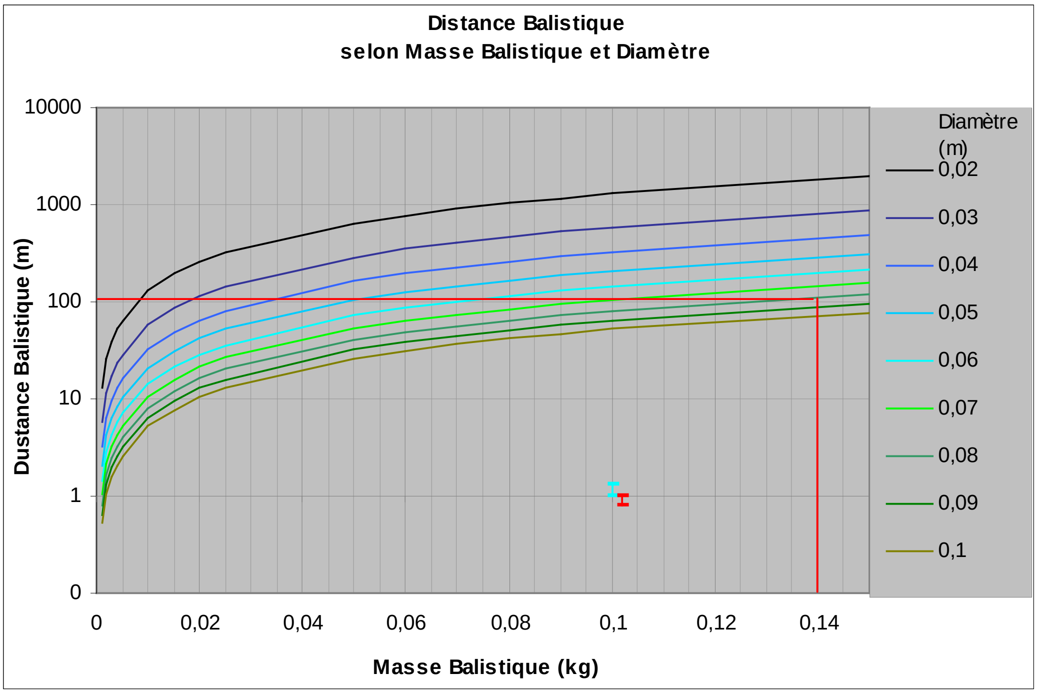
Pour obtenir la Distance Balistique d'une fusée, il suffit de reporter sa Masse Balistique (encore appelée Masse à Vide ou à Sec) sur la courbe correspondant à son diamètre et de lire sa Masse Balistique en regard sur l'axe vertical. À titre d'exemple, la construction rouge prédit à une fusée de **1 Kg** et **40 mm** de diamètre une Distance Balistique de **3250 m** (ceci pour un **Cx** type de **0,4**). Pour un **Cx** quelconque nommé $\mathbf{Cx}_{qq}$, sa Distance Balistique serait de $\mathbf{3250\ m*0,4/Cx}_{qq}$ [51] :



[50] Il convient de prendre ici le diamètre de la section ayant présidé à la détermination du Cx de la fusée, quelle que soit cette section. Voir à ce sujet notre texte ''*Le Cx des fusées*''.

[51] Et même jeu de proportions pour une autre Masse Volumique Aérienne de Fin de Propulsion.

Pour des fusées de type microfusées ou fusées à eau, un zoom sur les Masses Balistiques plus faibles est davantage parlant, surtout si les Distances Balistiques sont exprimées sur une échelle logarithmique :



La construction rouge prédit par exemple à une fusée à eau de **140 g** et **80 mm** de diamètre une Distance balistique d'un peu plus de **100 m** (pour un **Cx** de **0,4**).

L'échelle logarithmique des ordonnées facilite d'ailleurs une adaptation éventuelle de la Distance Balistique en fonction du **Cx** : Pour un **Cx** de **0,3** au lieu du **0,4** ayant présidé à l'établissement de ces courbes, la Distance Balistique lue doit être augmentée d'une valeur correspondant au segment bleu clair représenté au-dessus de la Masse Balistique **0,1**.

Pour un **Cx** de **0,5**, la Distance balistique doit être diminuée d'une valeur correspondant au segment rouge placé à côté du bleu clair [52] .

Note sur l'établissement de formules de la Masse Volumique atmosphérique

A) : Colonne d'air isotherme

On peut assez facilement proposer une première loi d'évolution de la Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude :

Considérons en effet une colonne d'air d'une température uniforme et soumise à une gravité constante [53] .

[52] La hauteur de ces segments n'est pas tout à fait la même, les pourcentages séparant **0,3** de **0,4** et **0,4** de **0,5** n'étant pas les mêmes…

[53] Le champ de pesanteur ne varie que faiblement quand on prend de l'altitude ; ainsi aux altitudes où naviguent les satellites, le champ de pesanteur n'est diminué que de quelques centièmes.

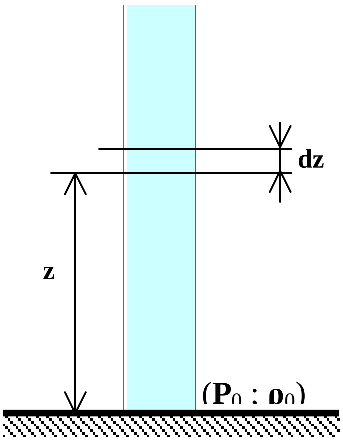


Schéma de la colonne d'air

Cette colonne d'air définie, imaginons momentanément que c'est une colonne d'eau soumise également à une gravité constante. On se souvient qu'en plongée aquatique la pression de l'eau diminue d'environ **981 hPa** lorsque l'on remonte de **10 m** dans de l'eau douce (ce qui fait à peu près une "atmosphère" tous les dix mètres). Le taux de variation de la Pression est donc de **- 98,1 hPa** par mètre lorsque l'on monte.

En notation littérale, on a alors la relation linéaire :

$$\mathbf{-\ 98{,}1\ hPa} = \frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dz}} = -\,\boldsymbol{\rho}_{eau}\,\mathbf{g}$$

(en effet, cette variation de pression est due à la variation de poids de la colonne d'eau $\boldsymbol{\rho}_{eau}$ **S dz** sur la surface **S** de la colonne)

On observe dans cette formule la présence de **g** : elle est due au fait que la pression de l'eau est un effet du champ de gravité terrestre.

La présence de $\boldsymbol{\rho}_{eau}$ est également naturelle puisque, par exemple, une plongée dans une cuve de plomb fondu (densité = **11**) produirait, à profondeur égale, une pression **11** fois plus forte qu'une plongée dans l'eau.

A contrario, dans une bulle d'eau (ou de plomb fondu) satellisée autour de notre planète, aussi grande que soit cette bulle, on ne relèverait aucune pression sur les tympans des plongeurs.

Revenons à présent à notre colonne d'air : De la même façon que dans l'eau, le taux d'évolution de la pression <u>de l'air</u> selon l'altitude est :

$$\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dz}} = -\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{g}$$ (**ρ** étant la Masse Volumique de l'air, que l'on sait variable [54])

C'est à dire que lorsque l'on passe, dans une colonne d'air, de l'élément de volume de hauteur **dz** à l'élément qui lui est supérieur, la pression locale se voit diminuer de :

$$\mathbf{dp} = -\,\boldsymbol{\rho}\,\mathbf{g}\,\mathbf{dz}\ .$$

[54] ce qui n'est guère le cas de l'eau.

Or dans un gaz parfait *isotherme* (c-à-d dont chaque particule est à la même température), la Masse Volumique est proportionnelle à la Pression Absolue. Pression Absolue et Masse Volumique respectent ainsi la loi :

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{p}} = \text{Constante}$$

En particulier, pour la Masse Volumique et la Pression Absolue régnant au sol :

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{p}} = \text{Constante} = \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\mathbf{p}_0}$$

…ce qui implique :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}_0}$$

On peut donc écrire, si $\mathbf{p}_0$ et $\boldsymbol{\rho}_0$ sont la Pression Absolue et la Masse Volumique à l'altitude zéro :

$$\mathbf{dp} = -\boldsymbol{\rho}_0 \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}_0}\,\mathbf{g\ dz}$$

…ou, bien sûr si l'on pratique (en vue de l'intégration) la séparation des variables. :

$$\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{p}} = -\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\mathbf{p}_0}\,\mathbf{g\ dz}$$

Les deux membres de cette dernière égalité étant toujours égaux (par définition), leurs sommations sur un intervalle donné seront également égales. On peut donc écrire, pour l'intervalle de hauteur allant de **0** à **h** :

$$\int_0^h \frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{p}} = -\int_0^h \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\mathbf{p}_0}\,\mathbf{g\ dz}$$

L'intégration du membre de gauche produit un logarithme, celle du membre de droite allant de soi. On est donc conduit à :

$$\Big[\mathbf{Ln(p)}\Big]_0^h = -\frac{\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{g}}{\mathbf{p}_0}\Big[\mathbf{h}\Big]_0^h$$

Après mise en pratique des propriétés fondamentales du logarithme, on obtient :

$$\mathbf{Ln}\left(\frac{\mathbf{p}_{(h)}}{\mathbf{p}_0}\right) = -\frac{\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{g}}{\mathbf{p}_0}\,\mathbf{h}$$

…ce qui revient à écrire :

$$\mathbf{p}_{(h)} = \mathbf{p}_0\ \mathbf{Exp}\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{g}}{\mathbf{p}_0}\,\mathbf{h}\right) = \mathbf{p}_0\ \mathbf{e}^{\left(-\mathbf{h}/\frac{\mathbf{p}_0}{\boldsymbol{\rho}_0\mathbf{g}}\right)}$$

Si l'on donne à $\boldsymbol{\rho}_0$ sa valeur moyenne de **1,225 Kg/M^3** , à **g** sa valeur classique de **9,81 m/s²** et à $\mathbf{P}_0$ sa valeur moyenne de **1013 hPa**, on obtient l'expression classique de la pression d'une atmosphère isotherme selon l'altitude :

$$\mathbf{p}_{(h)} = \mathbf{p}_0\ \mathbf{e}^{(-\mathbf{h}\,/\,8430)}$$

De cette pression, on peut tirer la Masse Volumique, qui, en isotherme, est proportionnelle à la pression :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_0\ \mathbf{e}^{(-\,\mathbf{h}\,/\,8430)}$$

Notons d'ailleurs que nous avons figé, au moment de la création du quotient **8430**, l'une des valeurs de $\mathbf{p}_0$ alors que cette pression atmosphérique absolue *au pied de la colonne d'air* varie selon les conditions météorologiques. Cette libéralité reste à justifier…

Au vu des courbes que nous avons présentées, nous devons admettre que l'expression ci-dessus n'est pas conforme à la réalité. En effet la température de l'air diminuant avec l'altitude, on observe une densification de l'air et donc une augmentation progressive de sa Masse Volumique.

Nous avons cependant vu vers le début du texte que corriger le coefficient **8430** en **9700** rapproche de façon satisfaisante la formulation exponentielle isotherme de la réalité.

Suit, ci-dessous, une méthode permettant d'établir mathématiquement une loi <u>non isotherme</u> de l'évolution de la Masse Volumique avec l'altitude.

<u>B) :Colonne d'air ''gaz parfait''</u>

Des sondages altimétriques ont permis de fixer une valeur moyenne de la diminution de la température avec l'altitude. Elle se produit au taux (moyen) de **- 6,5 K par Km.**

Si la température de l'air diminue avec l'altitude, on ne peut plus poser notre équation isothermique :

$$\mathbf{dp = \rho_0 \frac{p}{p_0} g\ dz}$$

…équation qui était fondée sur une Masse Volumique d'un air à température constante et valant de ce fait $\boldsymbol{\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}}$.

Il faut en revenir à l'expression plus générale de la Masse Volumique des gaz parfaits :

$$\boldsymbol{\rho = \frac{pM}{RT}}$$

expression où :
- **M** la Masse Molaire de l'air
- **R** la Constante Universelle des gaz parfaits
- **T** la Température Absolue de l'air
- **p** sa Pression (absolue également)

Cette expression exprime que la Masse Volumique d'un gaz parfait est proportionnelle à sa Pression et inversement proportionnelle à sa Température absolue.

Le constat d'évolution de la pression avec l'Altitude :

$$\mathbf{dp = \boldsymbol{\rho}\ g\ dz}$$

…est toujours valable ; mais il doit être transformé en :

$$\mathbf{dp = \frac{pM}{RT} g\ dz}$$

Cette égalité peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{\frac{dp}{p} = \frac{M}{RT} g\ dz}$$

À ce stade de la réflexion, le besoin se fait évidemment d'exprimer la Température **T** selon l'altitude **z** .

Or, nous le disions à l'instant, on connaît la loi d'évolution de cette température selon l'altitude grâce aux sondages altimétriques. Cette loi est :

$$\mathbf{T = T_0 - 6{,}5\, z / 1000}$$ [55]

L'équation différentielle en devient :

$$\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{Mg}}{\mathbf{R(T_0 - 6{,}5z/1000)}}\ \mathbf{dz}$$

Cette égalité étant valable sur l'ensemble des altitudes, il y a aussi égalité entre les intégrales réalisées sur l'intervalle de **0** à **h** :

$$\int_0^h \frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{p}} = \int_0^h \frac{\mathbf{Mg}}{\mathbf{R(T_0 - 6{,}5z/1000)}}\ \mathbf{dz}$$

L'intégrale de gauche évoque toujours un logarithme népérien. Celle de droite paraît plus complexe, du fait que son dénominateur est très chargé. Mais elle fait partie des intégrales remarquables [56] . Elle résulte également en un logarithme.

L'intégration produit donc :

$$\Big[\mathbf{Ln(p)}\Big]_0^h = \frac{\mathbf{Mg}}{\mathbf{R}}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6{,}5}}\Big[\mathbf{Ln\ (T_0 - 6{,}5z/1000)}\Big]_0^h$$

Les propriétés de la fonction logarithme permettent alors d'écrire :

$$\mathbf{p = p_0}\left(\mathbf{1 - \frac{6{,}5\,h}{1000T_0}}\right)^{\mathbf{(M\,g\,/\,6{,}5\,R)}}$$

[55] Évolution linéaire au taux de **6,5 K** par **1000 m** à partir de la température $\mathbf{T_0}$ existant à l'altitude de référence.

[56] Dès lors que l'on songe que **d (R(T**$_0$**– 6,5 z /1000)** vaut, à un facteur près, **dz**, on comprend que l'intégration va donner également un logarithme par changement de variable.

Les valeurs numériques de **M** , **g** et **R** confèrent la valeur **5,255** à l'exposant. On obtient donc l'équation d'évolution de la Pression Absolue de l'air en fonction de l'Altitude :

$$\boxed{\mathbf{p}_{(h)} = \mathbf{p}_0 \left(1 - \frac{6{,}5\,h}{1\,000 T_0}\right)^{5{,}255}}$$

expression où :

$\mathbf{p}_{(h)}$ est la Pression Absolue de l'air à l'altitude **h** ,
$\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{T}_0$ la Pression Absolue et la Température Absolue de l'air à l'origine des altitudes (à **h = 0**, donc),
6,5 un taux moyen d'évolution de la température avec l'altitude, en **K/Km**,
h est l'altitude en **m**
$\mathbf{T}_0$ est la température à l'origine des altitudes,
5,255 un exposant lié à ce taux moyen.

Mais ce qui nous intéresse est plus particulièrement la Masse Volumique de l'air. On doit à nouveau faire usage de la loi fondamentale des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

…et ceci en utilisant la pression **p** établie au stade :

$$\mathbf{p}_{(h)} = \mathbf{p}_0 \left(1 - \frac{6{,}5\,h}{1000 T_0}\right)^{(M\,g\,/\,6{,}5\,R)}$$

Après expression de **T** selon sa loi linéaire déduite des sondages altimétriques, il vient naturellement :

$$\rho_{(h)} = \rho_0 \left(1 - \frac{6{,}5\,h}{1000 T_0}\right)^{(M\,g\,/\,6{,}5\,R) - 1}$$

Comme **M** la Masse Molaire de l'air, **g** l'accélération de la gravité sur Terre et **R** la Constante Universelle des gaz parfaits sont connus, la loi d'évolution de la Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude est donc:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho_{(h)} = \rho_0\left(1 - \frac{6{,}5\,h}{1000T_0}\right)^{4{,}255}}}$$

expression où :

$\boldsymbol{\rho_{(h)}}$ est la Masse Volumique de l'air à l'altitude **h** ,

$\boldsymbol{\rho_0}$ et $\mathbf{T_0}$ la Masse Volumique et la Température Absolue de l'air à l'origine des altitudes (à **h = 0**, donc),

6,5 le taux moyen d'évolution de la température avec l'altitude mesuré par les sondages altimétriques (**6,5 K** par **1000 m)**,

4,255 un exposant lié à ce taux moyen.

NOTE SUR L'INTÉGRATION DU MOUVEMENT PUREMENT AÉRIEN D'UN MOBILE :

Il peut sembler intéressant d'étudier la projection d'un mobile dans le cas où la gravité est considérée comme n'intervenant plus : on peut espérer alors se servir de cette étude pour approcher le mouvement de mobile de très faible Distance Balistique (comme une plume, par exemple) projeté à une certaine vitesse.

Si l'on se rappelle que la montée vers la culmination d'un projectile n'est rien d'autre que la dissipation complète de son capital de vitesse initiale (ou de Projection, ou de Fin de propulsion) sous l'action de la gravité d'une part et d'autre part par le freinage atmosphérique, il est assez aisé de calculer la part de dissipation qui est due à chacun des deux phénomènes :

Au cours de la montée à Culmination, la perte de vitesse due à la gravité sera **gT** (si **T** est le temps de montée à Culmination).

Comme le capital de vitesse à dissiper est la Vitesse de Fin de Propulsion $\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}$, la perte de vitesse due à la Traînée atmosphérique est le complément, à savoir :

Pertes de vitesse par Traînée = $\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}$ **-gT**

En conséquence, la Fraction de Perte de Vitesse qui est due à la dissipation atmosphérique est :

$$\textbf{Fraction de perte de vitesse par Traînée} = \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}\ \mathbf{-gT}}{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}}$$

Comme le Temps de montée à Culmination **T** se fait minime pour les faibles Distances Balistique (une plume jetée en l'air atteint très vite sa culmination), la Fraction de la Perte de Vitesse par Traînée s'approche alors de l'unité.

Cette primordialité de la dissipation atmosphérique apparaît donc comme une incitation à étudier le mouvement du projectile en négligeant l'action de la gravité.

Nous déclinerons cette étude en deux modes : le mode où la Masse Volumique de l'air traversé par le mobile est considérée comme constante et le mode où cette même Masse Volumique diminue avec l'altitude :

A : Mouvement purement aérien à Masse Volumique de l'air constante :

L'équation différentielle décrivant la course du mobile est :

$$\gamma = \frac{dV}{dt} = -\frac{½\,\rho SCx}{M} V^2$$

Il est ici salutaire de se souvenir que la vitesse **V** peut également s'interpréter comme le quotient **dz / dt** . Ce qui nous autorise à écrire :

$$dt = \frac{dz}{V}$$

L'introduction de cette écriture de **dt** dans l'équation différentielle du mouvement donne :

$$\frac{VdV}{dz} = -\frac{½\,\rho SCx}{M} V^2$$

Ce qu'on peut aussi présenter de façon à ce que les deux variables **z** et **V** soient séparées :

$$dz = -\frac{M}{½\,\rho SCx}\,\frac{dV}{V}$$

On peut reconnaître dans le quotient qui suit le signe égal notre fameuse Distance Balistique D_{Bal}. L'égalité peut alors s'écrire :

$$dz = -D_{Bal}\frac{dV}{V}$$

Cette égalité étant valable à chaque instant, l'intégration de ses deux membres est licite :

$$\int_{0}^{\mathbf{h}} \mathbf{dz} = -\int_{\mathbf{V}_{\text{FinProp}}}^{\mathbf{V}} \mathbf{D}_{\text{Bal}} \frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

Une telle intégration ne présente pas de difficultés. Elle produit l'égalité :

$$\Big[\mathbf{z}\Big]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{h}} = -\mathbf{D}_{\text{Bal}}\Big[\mathbf{LnV}\Big]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{V}_{\text{FinProp}}}$$

La mise aux bornes de cette intégration donne, bien sûr :

$$\boxed{\mathbf{h} = -\mathbf{D}_{\text{Bal}}\ \mathbf{Ln}\Big[\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_{\text{FinProp}}}\Big]}$$

Réciproquement, la vitesse peut s'exprimer sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{FinProp}}\ \mathbf{Exp}\Big[\frac{-\mathbf{h}}{\mathbf{D}_{\text{Bal}}}\Big]}$$

On retrouve d'ailleurs ici la définition de la Distance Balistique : <u>La Distance Balistique d'un projectile est la distance au cours de laquelle ce projectile verra sa vitesse divisée par **e** , base des logarithmes népériens à l'occasion d'une projection non soumise à la gravité</u> [57] .

Ces résultats encadrés prouvent tous deux également que lorsque la vitesse tend vers zéro, la distance parcourue (on ne peut pas à proprement parler d'altitude puisque la gravité est exclue de cette réflexion) tend vers l'infini.

Une intégration de la vitesse par rapport au temps est également possible à partir de l'équation différentielle que nous avons posée en premier, à savoir :

$$\gamma = \frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = -\frac{\mathbf{½\ \rho SCx}}{\mathbf{M}}\mathbf{V}^2$$

[57] Que cette gravité soit compensée du fait d'une satellisation (bulle d'atmosphère en orbite), compensée par la poussée d'Archimède (mobiles sous-marin, dirigeables aériens), compensée par une réaction du sol (train sur voie horizontale ou mobile se déplaçant sur un lac gelé) ou négligée du fait de la modicité de son action (tir d'obus ou de rocket à l'horizontale)…

On peut en effet en tirer :

$$\mathbf{dt = -\frac{M}{\frac{1}{2}\,\rho SCx}\,\frac{dV}{V^2}}$$

soit, comme nous en avons pris l'habitude :

$$\mathbf{dt = -D_{\mathrm{Bal}}\,\frac{dV}{V^2}}$$

L'intégration de cette égalité produit simplement :

$$\mathbf{t = -D_{\mathrm{Bal}}\left[\frac{1}{V_{\mathrm{FinProp}}} - \frac{1}{V_{(t)}}\right]}$$

…de quelle relation on peut tirer :

$$\boxed{\mathbf{V_{(t)} = V_{\mathrm{FinProp}}\,\frac{1}{\left(1 + \frac{t\,V_{\mathrm{FinProp}}}{D_{\mathrm{Bal}}}\right)}}}$$

…qui indique sans équivoque qu'il faut un temps infini pour annuler la vitesse du mobile.

B :Mouvement purement aérien à Masse Volumique de l'air variable :

L'équation différentielle décrivant la course du mobile devient :

$$\gamma = \mathbf{\frac{dV}{dt} = -\frac{\frac{1}{2}\,\rho_{(z)}\,SCx}{M}\,V^2}$$

Notons que malgré l'absence de gravité, nous considérons que l'air se raréfie avec l'altitude(alors que cette raréfaction , en vigueur sur notre planète, est principalement due à la gravité qui écrase les couches inférieures d'air sous le poids des couches supérieures) [58] .

Comme dans la précédente étude, nous allons utiliser la notation :

$$\mathbf{dt = \frac{dz}{V}}$$

Elle nous permet d'écrire :

---

[58] Bien sûr, le nuage de matière d'une nébuleuse perdue dans l'espace génère lui-même une gravité (c'est ce qui a imposé le regroupement de la matière, au début des temps, regroupement qui a créé étoiles et systèmes planétaires)…

$$\frac{\mathbf{VdV}}{\mathbf{dz}} = -\frac{\mathbf{½\,\rho\,SCx}}{\mathbf{M}}\mathbf{V^2}$$

Ce qu'on peut aussi présenter de cette façon :

$$\boldsymbol{\rho}_{(z)}\,\mathbf{dz} = -\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{½\,SCx}}\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

Adoptons comme loi d'évolution de la Masse Volumique de l'air une loi exponentielle de type :

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}) = \boldsymbol{\rho}_0\,\mathbf{exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})$$

loi où $\boldsymbol{\rho}_0$ est la Masse Volumique à l'origine des altitudes qui sera pour nous l'Altitude de la Fin de Propulsion

k est l'altitude de référence présidant à l'évolution exponentielle de la Masse Volumique de l'air (on peut prendre **k = 9700 m**)

Notre équation différentielle est maintenant complète ; nous avons même réussi à séparer les deux variables :

$$\boldsymbol{\rho}_0\,\mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})\,\mathbf{dz} = -\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{½\,SCx}}\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

$\boldsymbol{\rho}_0$, la Masse Volumique de Fin de Propulsion gagne à rejoindre sa place classique sous le **M** :

$$\mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})\,\mathbf{dz} = -\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{½\,\boldsymbol{\rho}_0\,SCx}}\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

…car est recomposée ainsi la Distance Balistique du mobile à l'Altitude de Fin de Propulsion :

$$\mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})\,\mathbf{dz} = -\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

Réalisons l'intégration de l'évolution simultanée de ces deux variables :

$$\int_0^h \mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})\,\mathbf{dz} = -\int_{\mathrm{VFinProp}}^{V} \mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{V}}$$

$$-\mathbf{k}\left[\mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{k}})\right]_0^h = -\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\left[\mathbf{LnV}\right]_{\mathrm{VFinProp}}^{V}$$

La mise aux bornes donne :

$$\mathbf{k}\Big[\mathbf{Exp}(-\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{k}})-\mathbf{1}\Big] = \mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}\ \Big[\mathbf{Ln}\,\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}}\Big]$$

L'observation de ce résultat ne laisse pas de nous surprendre : Il impose en effet une limite à la diminution de la vitesse instantanée **V** !

De fait, lorsque la position **h** du mobile tend vers l'infini, l'exponentielle tend vers zéro (la Masse Volumique de l'air devenant nulle) et le membre de gauche de l'égalité tend vers **– k** : Ceci revient à dire que le logarithme de droite ne peut prendre une valeur inférieure à $-\mathbf{k}\,/\,\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$!

Autant dire que la vitesse doit rester supérieure à une certaine valeur :

$$\boxed{\mathbf{V} > \mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}\ \mathbf{Exp}(\ \frac{-\mathbf{k}}{\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}}\ )}$$

expression où :

$\mathbf{V}_{\mathrm{FinProp}}$ est la vitesse initiale de projection
k est l'altitude de référence présidant à l'évolution exponentielle de la Masse Volumique de l'air (on peut prendre **9700 m**)
$\mathbf{D}_{\mathrm{Bal}}$ est la Distance Balistique du mobile à l'instant initial [59]

Cette <u>vitesse résiduelle</u> [60] est donc celle qui anime encore le mobile lorsqu'il arrive aux frontières de l'infini au terme de ce mouvement idéal non soumis à la gravité dans une atmosphère de Masse Volumique régie par une loi exponentielle d'évolution en fonction de la distance au point de départ.

Puisque jamais la vitesse du mobile n'est annulée (et que donc il n'y a jamais de culmination ou de fin à la progression dans l'espace), on ne peut aucunement concevoir de Masse Volumique Équivalente :
<u>Ces résultats propres au mouvement purement aérien interdisent de dégager une quelconque Masse Volumique Équivalente de l'air traversé.</u>

Cette étude du mouvement purement aérien ne nous aide donc en rien à analyser la partie gauche de nos courbes (correspondant aux très faibles Distances Balistiques).

---

[59] c'est à dire sa Distance Balistique calculée avec la Masse Volumique de l'air au point de Fin de Propulsion.
[60] On pourrait la nommer aéro-cosmique !

Note sur l'existence d'une asymptote *anaérienne* de l'altitude de Masse Volumique Équivalente :

Il peut être tentant de chercher une asymptote aux parties droites des courbes de l'altitude de Masse Volumique Équivalente (exprimée en % de l'Altitude de Culmination). En effet, dans cette partie droite, les Distances Balistiques devenant très importantes (mobiles extrêmement pénétrants), le freinage atmosphérique se fait de moins en moins sentir.

Il est alors envisageable de reprendre le calcul de la Masse Volumique Aérienne Équivalente en se basant sur une loi de vitesse où l'air n'interviendrait plus, c-à-d une loi de vitesse du type $\mathbf{V_{(t)} = V_{FinProp} - g\,t}$ **.**

Il s'agit bien d'une conjecture, puisque l'on va étudier l'évolution d'un paramètre (celle de la Masse Volumique selon l'altitude) en considérant que cette évolution n'a pas d'effet sur le reste du phénomène (puisqu'on adopte comme loi de vitesse une loi essentiellement gravitaire de type $\mathbf{v = gt}$) : on suppose donc encore ici que la Masse Volumique de l'air n'est plus cause de freinage mais qu'elle est quand-même *visitée*…

Or nous savons que, le freinage atmosphérique se faisant plus faible en altitude (par raréfaction de l'air) la loi de vitesse du projectile s'en trouve modifiée.

Notre conjecture consiste donc à poser que pour des fusées extrêmement pénétrantes (possédant une Distance Balistique très grande), la loi de vitesse ne dépend plus de ces Distances Balistiques.

L'évolution de la Masse Volumique selon l'altitude étant représentée par une régression linéaire, on peut tenter de calculer le bilan des pertes de vitesse sur la totalité de la phase balistique montante.

Ce bilan des pertes de vitesse sur la totalité de la phase balistique est :

$$\textbf{Pertes de vitesses} = \mathbf{V_{FinProp}} = \int_0^T \frac{\mathbf{\tfrac{1}{2}\rho_{(h)}SCx}}{\mathbf{M}}\,\mathbf{v^2\,dt} + \int_0^T \mathbf{g\,dt} \quad [61]$$

Comme précédemment, seule la première intégrale nous intéresse (la deuxième produira classiquement **gT**).

Puisqu'une loi de vitesse *anaérienne* [62] et *essentiellement gravitaire* est adoptée, la vitesse instantanée **v** s'écrira :

[61] Il s'agit de l'intégration de l'accélération de la fusée sur l'intervalle de temps de son vol balistique, à savoir de 0 à T. Cette accélération est due à deux forces : la Traînée et le Poids…

[62] Osons ce mot . Il tend à signifier que le mouvement se produit en l'absence d'air. On devrait d'ailleurs dire ''en l'absence de toute atmosphère'', c-à-d dans le vide, mais la construction d'un mot pour signifier cette état de choses est plus difficile…

$\mathbf{v = V_{FinProp} - g\,t.}$

…ou plutôt, si l'on se souvient que le déplacement du mobile se fait en l'absence d'air :

$\mathbf{v = gT - g\,t.}$ (**T** étant la durée de la montée à culmination)

En effet, la symétrie (d'altitude et de vitesse) de la trajectoire *anaérienne* d'un caillou qui culmine avant de retomber au sol nous remémore que la vitesse initiale $\mathbf{V}_{FinProp}$ est égale à **gT** (**gT** étant symétriquement la vitesse de chute à du contact avec le sol).

Adoptons pour la définition de la Masse Volumique de l'air la régression linéaire :

$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{ah}$

…$\boldsymbol{\rho}_0$ étant la Masse Volumique Aérienne à l'instant initial et **a** un coefficient positif.

La loi de vitesse *anaérienne* que nous avons adoptée impose également :

$\mathbf{h = V_{FinProp}\, t - ½\, g\, t^2}$

ou encore :

$\mathbf{h = gTt - ½\, g\, t^2}$

Nous possédons donc une rédaction de la Masse Volumique Aérienne en fonction du temps :

$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_0 - \mathbf{a(gTt - ½\, g\, t^2)}$

Le bilan des pertes de vitesse par Traînée peut donc prendre la forme :

$$\int_0^T \frac{½SCx\,[\rho_0 - a(gT\,t - ½\,g\,t^2)]}{M}\,(gT - g\,t)^2\,dt$$

soit :

$$\frac{½SCx}{M}\int_0^T [\rho_0 - a(gTt - ½\,g\,t^2)](gT - g\,t)^2\,dt$$

Ce travail d'intégration peut apparaître comme fastidieux, mais il ne présente pas de difficultés.

Son résultat (le bilan des pertes de vitesses par Traînée) devra être comparé au même bilan basé sur la Masse Volumique Équivalente qui est , par définition :

$$= \rho_{\text{équiv}} \int_0^T \frac{\mathbf{½SCx}}{\mathbf{M}} \mathbf{v^2\, dt}$$

…soit encore :

$$= \rho_{\text{équiv}} \int_0^T \frac{\mathbf{½SCx}}{\mathbf{M}} \mathbf{(gT - gt)^2\, dt}$$

Après beaucoup de simplifications, et après avoir reconnu dans la cohorte des termes la Masse Volumique Aérienne à la culmination :

$$\boldsymbol{\rho_{(T)} = \rho_0 - ½aT^2}$$

…on est conduit au résultat suivant :

L'altitude à laquelle une fusée régie par une loi de vitesse *anaérienne* rencontre sa Masse Volumique Aérienne Équivalente est aux **2/5**ème (**40 %**) de son altitude de culmination.

…et ceci quelle que soit la valeur qu'on alloue au coefficient **a** de la linéarisation de la Masse Volumique de l'air traversé

Cette insensibilité au coefficient de linéarisation **a** est évidemment très satisfaisante…

Ce pourcentage d'altitude de 40% pourrait donc constituer une asymptote à l'ensemble des courbes dans leur partie droite correspondant aux très fortes Distances Balistiques…

Mais, accessoirement, le fait que de nombreuses simplifications interviennent vers la fin de ce dernier calcul [63] doit nous mettre la puce à l'oreille : il existe probablement un choix de variable qui simplifiera d'entrée la rédaction du bilan de pertes de vitesse par Traînée.

Effectivement, si l'on s'appuie sur le fait que la trajectoire anaérienne du mobile est parfaitement symétrique, il apparaît vite que :

→prendre comme point initial le point de culmination
→s'intéresser à la partie descendante de la phase balistique

…simplifie beaucoup la rédaction.

[63] …calcul que nous avons épargné au lecteur mais que nous l'engageons à reprendre à son compte.

L'altitude du mobile lors de sa redescente est alors comptée depuis ce point de culmination, positivement vers le bas. Elle s'écrit bien sûr :

$$\mathbf{h = ½\, g\, t^2}$$

De même la vitesse commence à croître à partir de zéro selon la loi **v = g t** , du moins si **t** est le temps de redescente, c-à-d le temps compté à partir de la culmination.

La Masse Volumique Aérienne augmente avec le temps (puisque l'on chute) selon l'équation linéaire :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{\text{culm}} + \mathbf{a\,h}$$

Il ressort de la valeur de **h** que cette même Masse Volumique est :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_{\text{culm}} + \mathbf{½\, ag\, t^2}$$

Le bilan des pertes de vitesse est lié à la vitesse instantanée et à la Masse Volumique que l'on vient de définir ; ce bilan s'écrit donc :

$$\int_0^T \frac{\mathbf{½SCx}\left[\boldsymbol{\rho}_{\text{culm}} + \mathbf{½\, ag\, t^2}\right]}{\mathbf{M}} \mathbf{(g\,t)^2\, dt}$$

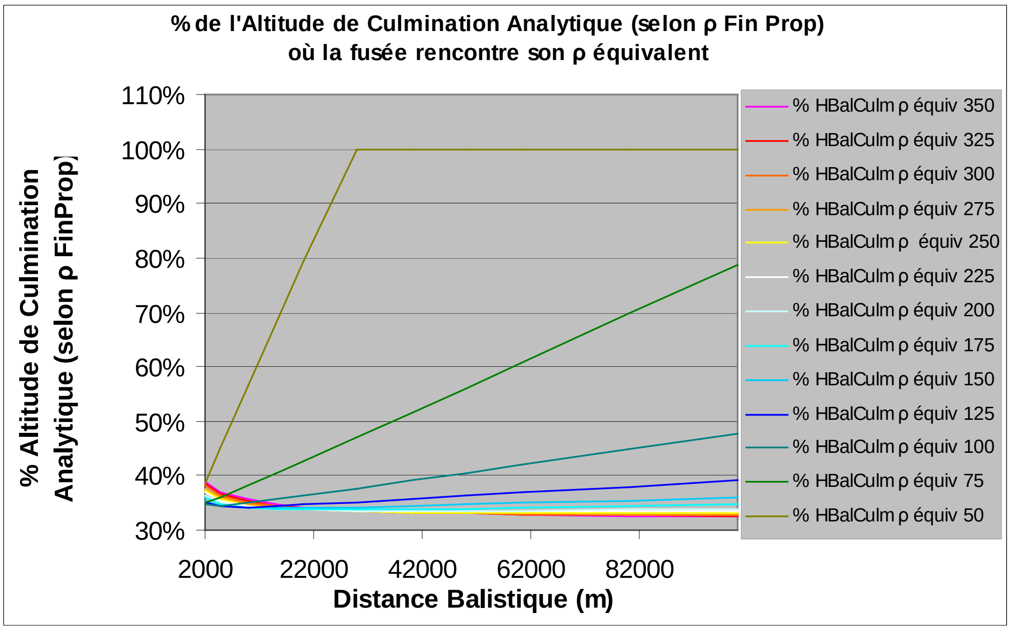
Cette intégration en Masse Volumique variable sera bien sûr à comparer à celle effectuée sur la base d'une Masse Volumique Aérienne Équivalente, à savoir :

$$\text{Pertes par Traînée} = \boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}} \int_0^T \frac{\mathbf{½SCx}}{\mathbf{M}} \mathbf{(gt)^2\, dt} \;=$$

La comparaison des deux intégrations conduit assez facilement à cette valeur de **2/5ème** (**40 %**) de l'Altitude de Culmination [64] .

[64] Ce pourcentage est toujours indépendant de la valeur qu'on alloue au coefficient **a** de la linéarisation de la Masse Volumique de l'air traversé.

Rappelons que, interrogé au sujet à ce sujet des très fortes Distances balistiques (de **2000** à **100 000 m**), notre tableau de calcul Pas à Pas nous a dessiné cette famille de courbes :

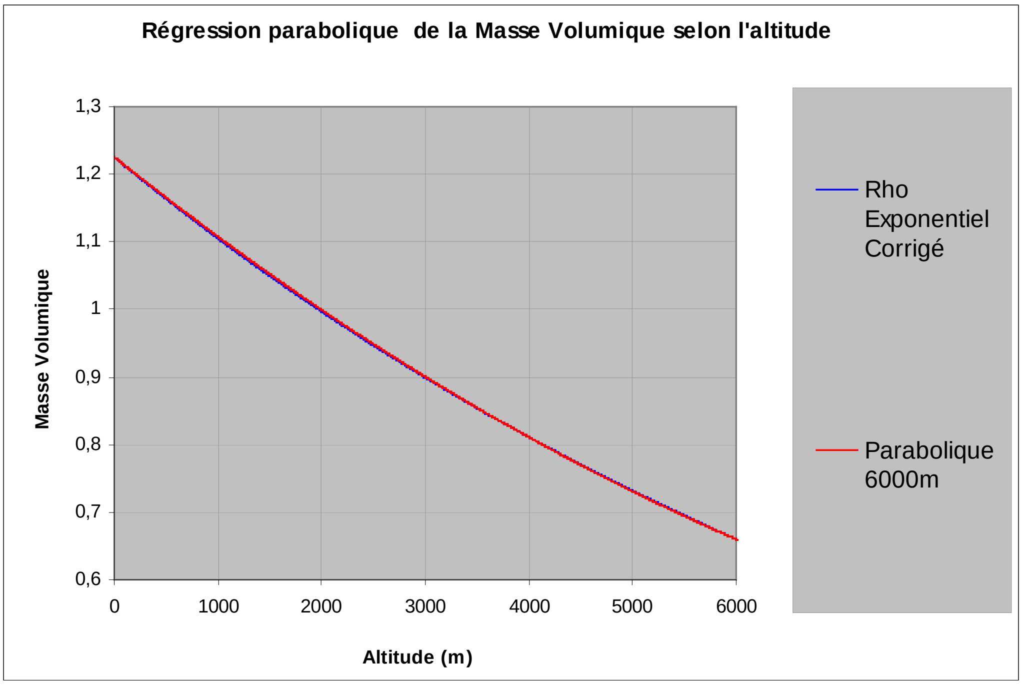


Nous avons expliqué pourquoi il faut exclure de notre réflexion les courbes vertes. Mais les courbes inférieures (fortes vitesses de projection) ne semble pas vouloir se rapprocher des **40 %** définis à l'instant…

Ce désaccord entre le calcul analytique et le calcul Pas à Pas est intrigant…

Il ne peut être exclu qu'il soit dû à la concavité de la courbe de la Masse Volumique Aérienne en fonction de l'altitude, concavité que nous n'avons pas prise en compte dans notre régression <u>linéaire</u> de cette Masse Volumique.

L'intégration effectuée ci-dessus est donc à refaire en partant, par exemple, pour la valeur de la Masse Volumique, d'une régression parabolique type comme celle que nous avons déjà présentée et qui est illustrée ci-dessous :



Cette régression est :

$\rho_{(h)}$ **= 0,66 + 4,7 10^{-9}h² – 6,6 10^{-5}h**

où **h** est la hauteur de retombée depuis **6000 m**.

Elle est ici calée sur la valeur de la Masse Volumique Aérienne à **6000 m**, altitude que n'atteint pas la fusée de Vitesse de Fin de propulsion de **350 m/s** et de Distance Balistique **100 000 m** [65]

D'une façon générale, cependant, la régression n'a pas à être explicitée numériquement. On peut la manipuler sous la forme littérale classique :

$\rho_{(h)} = a\,h^2 + b\,h + \rho_{culm}$

h étant la hauteur de retombée depuis l'apogée, origine des altitudes et point où la Masse Volumique Aérienne vaut ρ_{culm} .

[65] Notre tableau la projète à 5942 m alors que son Altitude de Culmination Analytique (basée sur une Masse Volumique de Fin de Propulsion) est donnée pour 5883.

En nous intéressant, comme précédemment, au mouvement de retombée depuis le point de culmination, nous pouvons rédiger le bilan des Pertes par Traînée :

$$\int_0^T \frac{\tfrac{1}{2}\mathbf{SCx}\left[\mathbf{a\,h^2 + b\,h + \rho_{culm}}\right]}{\mathbf{M}} \mathbf{V^2\,dt}$$

avec bien sûr, comme précédemment $\mathbf{h = \tfrac{1}{2}\,gt^2}$ et $\mathbf{V = gt}$.

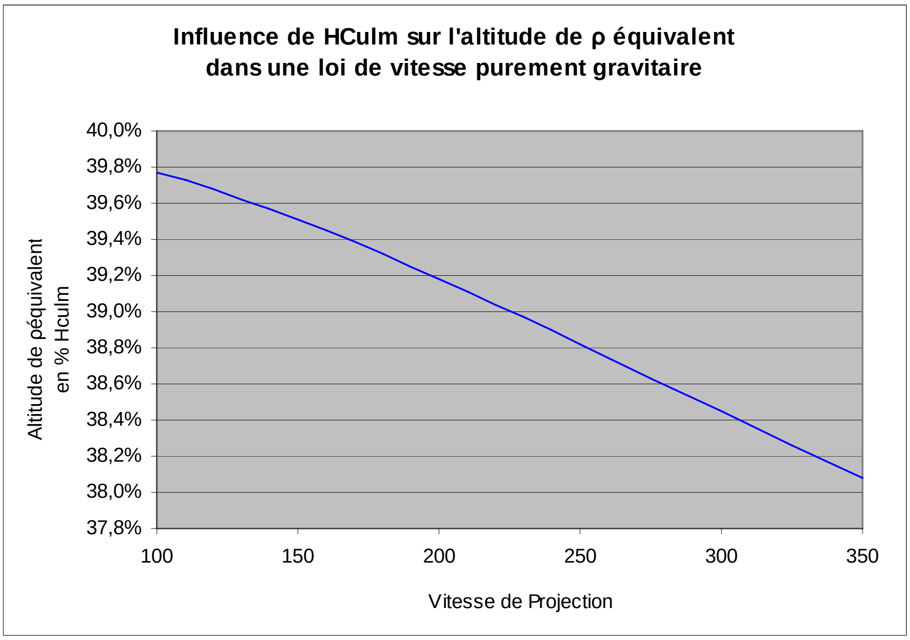
Ce bilan des Pertes par Traînée en **ρ** variable étant à comparer avec le même bilan établi pour une Masse Volumique Aérienne Équivalente (et donc constante) :

$$\int_0^T \frac{\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_{\text{équiv}}\mathbf{SCx}}{\mathbf{M}} \mathbf{V^2\,dt}$$

Cette comparaison conduit à la détermination d'une altitude de Masse Volumique Aérienne Équivalente dépendant de la Hauteur de Culmination purement gravitaire $\mathbf{\tfrac{1}{2}\,g\,T^2}$. [66]

Comme cette Hauteur de Culmination purement gravitaire $\mathbf{\tfrac{1}{2}\,g\,T^2}$ s'écrit également $\mathbf{\tfrac{1}{2}(V_{FinProp})^2/g}$, l'altitude de **ρ** équivalent se trouve dépendre de la Vitesse de Fin de Propulsion.

Cependant l'influence de ladite Vitesse de Fin de Propulsion est assez faible, ainsi que le montre le graphique suivant :



[66] Cette solution passe par la résolution d'une équation simple du second degré. L'une des deux racines en est exclue comme physiquement inadmissible (elle produit des altitudes de Masse Volumique Équivalente supérieur à 300 % de l'Altitude de Culmination)…

On remarque que pour les petites vitesses de projection (et donc les faibles Altitudes de Culmination) le pourcentage d'altitude de culmination auquel la fusée rencontre son **ρ** équivalent est assez proche des **40 %** dégagés à l'aide de la régression linéaire : il est logique de penser que pour ces faibles performances en altitude la concavité de la courbe de régression parabolique ne se fait pas encore sentir.

Lorsque la vitesse de projection et donc les performances en hauteur augmentent [67], l'altitude où une fusée de très forte Distance Balistique rencontre sa Masse Volumique Aérienne Équivalente devient assez proche de **38 %** de l'altitude de culmination purement gravitaire (calculée selon $\mathbf{H = (V_{FinProp})^2/g}$).

La dissonance entre les résultats de notre tableau Pas à Pas et ces réflexions mathématiques reste donc toujours inexpliquée.

Peut-être est-elle due simplement à l'irrecevabilité de nos conjectures sur l'existence d'une asymptote *anaérienne*…

Peut-être également est-elle due au fait que nous avons transformé la Masse Volumique Équivalente en pourcentage d'Altitude de Culmination sur la base de l'Altitude de Culmination purement gravitaire alors qu'une référence à l'Altitude de Culmination *aérogravitaire* banale aurait été préférable…

Note sur la *Transportabilité* de la formulation exponentielle de la Masse Volumique de l'air en fonction de l'altitude :

Nous avons utilisé pour un certain nombre de calculs la représentation exponentielle de la Masse Volumique Aérienne selon l'altitude.

Cette représentation exponentielle possède la propriété très intéressante d'être *transportable en altitude* et en particulier à l'Altitude de Fin de Propulsion.

Expliquons-nous :

Reprenons la formule exponentielle (4) que nous avons souvent utilisée dans les cellules de notre tableur :

$$\boldsymbol{\rho_{(z)} = \rho_0 \,\mathrm{Exp}\left(\frac{-z}{9700}\right)}$$

…avec **z** l'altitude au-dessus du point où la Masse Volumique vaut $\boldsymbol{\rho_0}$

[67] La plage de Vitesse de Projection de ce graphe est limitée à **350 m/s**, vitesse déjà justiciable de considérations transsoniques…

Considérons que $\boldsymbol{\rho_0}$ est la Masse Volumique Aérienne au sol, c-à-d au pied de la rampe de lancement ou du Pas de Tir [68] . Pour plus de clarté notons là $\boldsymbol{\rho}_{Sol}$. La formule exponentielle s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\rho}_{(z)} = \boldsymbol{\rho}_{Sol}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-z}}{\mathbf{9700}}\right)$$

(pour $\mathbf{z = 0}$ on observe donc bien $\boldsymbol{\rho}_{(z=0)} = \boldsymbol{\rho}_{Sol}$)

Calculons sur cette base la Masse Volumique de l'air à l'altitude de Fin de Propulsion. Ce sera :

$$\boldsymbol{\rho}_{FinProp} = \boldsymbol{\rho}_{Sol}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-H}_{FinProp}}{\mathbf{9700}}\right)$$

Ceci est une chose.

Calculons maintenant la Masse Volumique de l'air au cours de la phase Balistique qui va suivre l'extinction du moteur (nous noterons **h** l'altitude de la fusée <u>au-dessus</u> du point de Fin de Propulsion) :

L'altitude **z** au-dessus du sol est $(\mathbf{H}_{FinProp} + \mathbf{h})$. Donc :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_{Sol}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-(H}_{FinProp} + \mathbf{h)}}{\mathbf{9700}}\right)$$

Les propriétés de la fonction exponentielle nous permettent d'écrire :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_{Sol}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-H}_{FinProp}}{\mathbf{9700}}\right)\mathbf{*Exp}\left(\frac{\mathbf{-h}}{\mathbf{9700}}\right)$$

Or $\boldsymbol{\rho}_{Sol}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-H}_{FinProp}}{\mathbf{9700}}\right)$ n'est rien d'autre que la Masse Volumique Aérienne au point de Fin de Propulsion !… On peut donc affirmer :

$$\boldsymbol{\rho}_{(h)} = \boldsymbol{\rho}_{FinProp}\ \mathbf{Exp}\left(\frac{\mathbf{-h}}{\mathbf{9700}}\right)$$

h étant l'altitude <u>au-dessus du Point de Fin de Propulsion</u>…

L'équation exponentielle de la Masse Volumique de l'air possède donc la propriété d'être <u>transportable</u> au point que l'on désire comme origine des altitudes, à

[68] C'est ce qui est fait implicitement, en général.

condition évidemment de prendre comme référence la Masse Volumique Aérienne à ce point.

Cette transportabilité est une propriété particulière de la fonction exponentielle…

Nous n'avons pu démontrer mathématiquement la même transportabilité pour les autres formulations possibles de la Masse Volumique de l'air [69] . Néanmoins, comme ces autres formulations dessinent des courbes très proches de celle de la formulation exponentielle, il est admissible de considérer qu'elles sont pareillement transportables en altitude ; mais ceci à certaines conditions qu'il conviendrait de découvrir (les coefficients de ces formulations devant sans doute s'adapter à ce transport)…

BIBLIOGRAPHIE et LIENS :

LE VOL DE LA FUSÉE, de Gil Denis, document Planète-Sciences :
http://www.planete-sciences.org/espace/basedoc/public/index.php/Vol_de_la_fus%C3%A9e%2C_stabilit%C3%A9_et_performances

Sur le vol balistique en général : notre texte : LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/la_fusee_en_vol_balistique7.doc

consultable à la page Physique de la fusée :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm

du site Go Mars!.

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/

Sur le problème du choix de la surface de référence du Cx :
notre texte : LE CX DES FUSÉES

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/cx_fusees.doc

à la même page *Physique de la fusée* du site GO MARS !

Sur le calcul de la chute d'un corps dans l'atmosphère, notre texte :
Chute Aérienne d'un Corps

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/chute_aerienne.doc

(même page Physique de la fusée)

[69] Cela devrait constituer un amusant problème algébrique…

Masse Volumique de l'atmosphère sur WIKIPÉDIA :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_du_nivellement_barom%C3%A9trique

CARACTÉRISTIQUE DE L'ATMOSPHÈRE ET MÉCANIQUE DU VOL (Cahier CNES - Planète-Sciences, destiné aux ballonnistes) :

http://association.pastel.free.fr/pastel/document_logiciel/ballon/notes_technique/caracteristiques_atmosphere+meca_vol_ballon.pdf

LOGICIELS :

MATHEMATICA : http://integrals.wolfram.com/index.jsp