Exercices : les barycentres.

Exercice 1 : (non corrigé)
Construire s'il existe le point G barycentre des points pondérés (A, α)(B, β).
1. avec $\alpha = 4$ et $\beta = 2$
2. avec $\alpha = 2$ et $\beta = -2$
3. avec $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

Exercice 2 : (non corrigé)
Trouvez les réels α et β tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, α)(B, β).
1. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$
2. $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GA}$
3. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Exercice 3 : (non corrigé)
Construire s'il existe le point G barycentre des points pondérés (A, α)(B, β)(C, γ).
1. avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ et $\gamma = 1$
2. avec $\alpha = 1$ et $\beta = -2$ et $\gamma = -1$
3. avec $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ et $\gamma = 1$

Exercice 4 : (non corrigé)
Après avoir justifié l'existence de G, construire G en utilisant l'associativité du barycentre.
1. ABCD est un rectangle et G le barycentre de (A, -1)(B, 2)(C, 2)(D, 4)
2. ABCD est un rectangle et G le barycentre de (A, 1)(B, 2)(C, 1)(D, 4)
3. ABCD est un rectangle et G le barycentre de (A, -1)(B, 2)(C, -3)(D, 2)

Exercice 5 :
1. Placer les points A(1, 3) et B(2, 1).
2. Calculer les coordonnées des points M, barycentre de (A, -1)(B, 3) et N, barycentre de (A, 2)(B, -1).
3. a) Calculer les coordonnées de I milieu de [AB].
   b) Trouver les réels k tel que $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$.
   c) En déduire deux réels α et β tels que I soit barycentre de (M, α)(N, β).

Exercice 6 :
ABCD est un quadrilatère. I est le milieu de [AC] et J celui de [BD]. Les points K et L sont tels que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, M est le milieu du segment [LK]. Le but de l'exercice est de démontrer que les points M, I et J sont alignés et de préciser la position du point M sur la droite (IJ).
1. a) Justifier l'existence du barycentre G de (A, 1)(B, 2)(C, 1)(D, 2).
   b) Prouver que G appartient à (KL) et à (IJ).
2. Justifier que M est confondu avec G et indiquer la position de M sur (IJ).

Exercice 7 :
ABC est un triangle, M et N sont les points tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ où k est un réel différent de 0 et de 1. On note I le milieu de [AB], J celui de [BC] et G celui de [MN]. Il s'agit de démontrer que G, I et J sont alignés.
1. Exprimer M comme le barycentre de A et B.
2. Exprimer N comme le barycentre de B et C.
3. a) Prouver que le barycentre de (A, $1 - k$)(B, k)(B, $1 - k$)(C, k) est le point G.
   b) En déduire que G est le barycentre de (I, $1 - k$)(J, k). Conclure.

Exercice 8 :
ABCD est un rectangle de centre O. On se propose de trouver l'ensemble Δ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

1. Réduire la somme vectorielle $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ en utilisant l'isobarycentre O de A, B, C et D.
2. Prouver que : « dire que M appartient à Δ équivaut à dire que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ ».
3. En déduire la nature de Δ. Construire Δ.

Exercice 9 :
ABCD est un rectangle. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

1. Prouver que pour tout point M, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{AB}$.
2. Réduire la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
3. a) En déduire que l'ensemble Γ est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
   b) Justifier que les milieux de [BC] et [AD] sont sur Γ. Tracer Γ.

Exercice 10 :
Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie (les carrés sont identiques).