$\boxed{\textbf{DS 4} \text{ le 12 octobre 2013}}$

Exercice 1 Soit G un groupe.
On appelle centre de G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec G, on le note $Z(G)$.
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

Exercice 2 Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall a \in G,\ a^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Donner un exemple d'un groupe vérifiant cette condition

Exercice 3 On appelle U_n l'ensemble des racines n-ème de l'unité. On appelle $\varphi(n)$ le nombre de générateur de U_n

1. Trouver le sous groupe de U_6 engendré par j.
2. Trouver tous les éléments de U_6 d'ordre 2.
3. Trouver tous les éléments de U_6 d'ordre 3.
4. Trouver tous les éléments de U_6 d'ordre 6.
5. Calculer $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6)$.
6. En généralisant la démarche précédente, calculer

$$\sum_{d|n} \varphi(d)$$

Exercice 4
1. Soit f un morphisme de groupe de G dans G'. Soit x un élément de G d'ordre n. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise n.
2. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$
3. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$
4. Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$
5. Déterminer le nombre de morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}, +)$ en fonction du pgcd de a et b.

Exercice 5 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{3}x + \overline{7}y & = & \overline{3} \\ \overline{6}x - \overline{7}y & = & \overline{0} \end{array} \right.$$

Exercice 6 On pose :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.
2. Déterminer tous les morphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ dans lui-même.

Exercice 7 Anneau des entiers de Gauss
On pose :

$$\mathbb{Z}[i] = a + ib, ;\quad a \in \mathbb{Z}, ;\quad b \in \mathbb{Z}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2. Soit U l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$ on a :

$$z \in U \Leftrightarrow |z| = 1$$

3. Déterminer U. Est-il isomorphe à un groupe connu?

Exercice 8 Anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$
Soit $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $M_n(\mathbb{Z})$ est un anneau.
2. Soit U l'ensemble des éléments inversibles de $M_n(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{Z})$ on a :

$$M \in U \Leftrightarrow |det(M)| = 1$$

3. Déterminer U.

Rappel: si $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors M est inversible (dans $M_n(\mathbb{R})$) si et seulement si son déterminant est non nul et dans ce cas l'inverse est $\frac{1}{det(M)} {}^t com(M)$

Exercice 9 Nombres de Carmichael
On appelle nombre de Carmichael (ou pseudo-premier) tout entier n non premier tel que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \ \ a^n \equiv a \ [n]$$

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^{561} \equiv a \ [3], [11], [17]$.
2. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

561 est le plus petit nombre de Carmichael. Ces nombres sont rares mais il en existe une infinité.

Exercice 10 Morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même
On veut montrer que l'identité est le seul morphismme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même.
Soit φ un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même.

1. En écrivant un nombre positif comme un carré, montrer que $\forall h > 0, \ \ \varphi(h) \geq 0$
2. Montrer que φ est croissant.
3. Conclure.

Exercice 11 1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 + X^2 - 2$ en produit de polynômes irréductibles.

2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles :

$$X^5 - 1, \qquad , \qquad \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

3. Trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\alpha + X\sin\alpha)^n$ par $X^2 + 1$

Exercice 12 Déterminer tous les polynômes tels que

$$P(2) = 6; \quad P'(2) = 1; \quad P''(2) = 4; \quad \forall n \geq 3, \ \ P^{(n)}(2) = 0$$

Exercice 13 Soit x_1, x_2, x_3 les trois racines complexes du polynôme

$$X^3 + pX + q$$

1. Donner les relations entre les coefficients p et q et les racines x_1, x_2, x_3.
2. Trouver le polynôme normalisé de degré 3 dont les racines sont $x_1 + x_2, \ \ x_1 + x_3, \quad x_2 + x_3$.