Chute verticale dans l'huile-méthode d'Euler

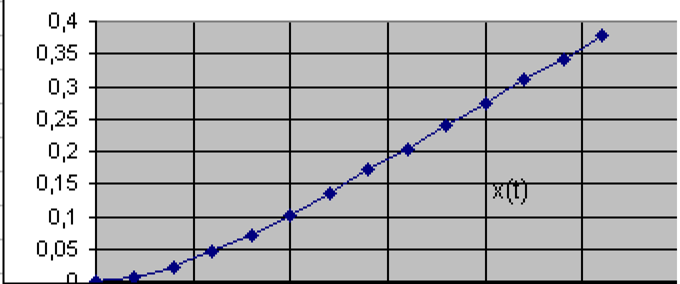
A-Enregistrement

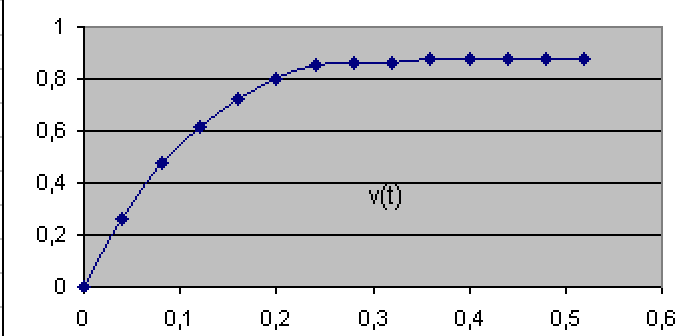
Une bille d'acier de masse m= 0,90g et de diamêtre d= 6,3 mm est abandonnée sans vitesse initiale à la surface d'un tube vertical transparent contenant une solution huileuse.

Une web-cam enregistre la chute x et un logiciel approprié fournit le tableau de valeurs suivant [t (s) ; x (m)]qui est exporté vers le logiciel EXCEL. Les valeurs de x sont issues des images successives enregistrées par la web-cam. La colonne C ainsi que les courbes ne seront pas considérées à ce stade de l'énoncé.

Pour information :viscosité de l'air 18.10^{-6} eau : $1,1.10^{-3}$ huile d'olive :0,1 Huile moteur :0,3 Glycérol :1,5 $N.s.m^{-2}$

	A	B	C
1	t(s)	x(m)	v(m/s)
2	0	0	0
3	0,04	0,007	0,2625
4	0,08	0,021	0,475
5	0,12	0,045	0,6125
6	0,16	0,07	0,725
7	0,2	0,103	0,8
8	0,24	0,134	0,85
9	0,28	0,171	0,8625
10	0,32	0,203	0,8625
11	0,36	0,24	0,875
12	0,4	0,273	0,875
13	0,44	0,31	0,875
14	0,48	0,343	0,875
15	0,52	0,38	0,875
16	0,56	0,413	





1- Quel a été le nombre d'images par seconde choisi dans les paramètres de la web-cam ?

2-On obtient alors les courbes du document : préciser et commenter les différentes phases observées.

3-A l'aide du logiciel on a calculé la vitesse de chute en tout instant v(t)

a-En quoi la courbe v(t) confirme-t-elle qualitativement et quantitativement les résultats de la question A-2 ?

b- Pour remplir la colonne C on a utilisé une formule itérative :la préciser dans la cellule C3 en donnant l'expression de C3 en fonction du contenu des cellules Ai et Bi (Ai représente le contenu de la cellule Ai)

4- Interpréter physiquement l'allure finale de la courbe v(t).

B- Equation différentielle du mouvement-modélisation

La bille de rayon R est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède (de valeur égale au poids du volume de liquide déplacé) ,et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse que l'on tiendra pour proportionnelle à la vitesse et donnée par : $f=6\pi R\ \eta\ v$

Données :$g=9,8\ m.s^{-2}$ $\eta=1,4\ N.s.m^{-2}$ =viscosité m=0,90 g R=3,125 mm

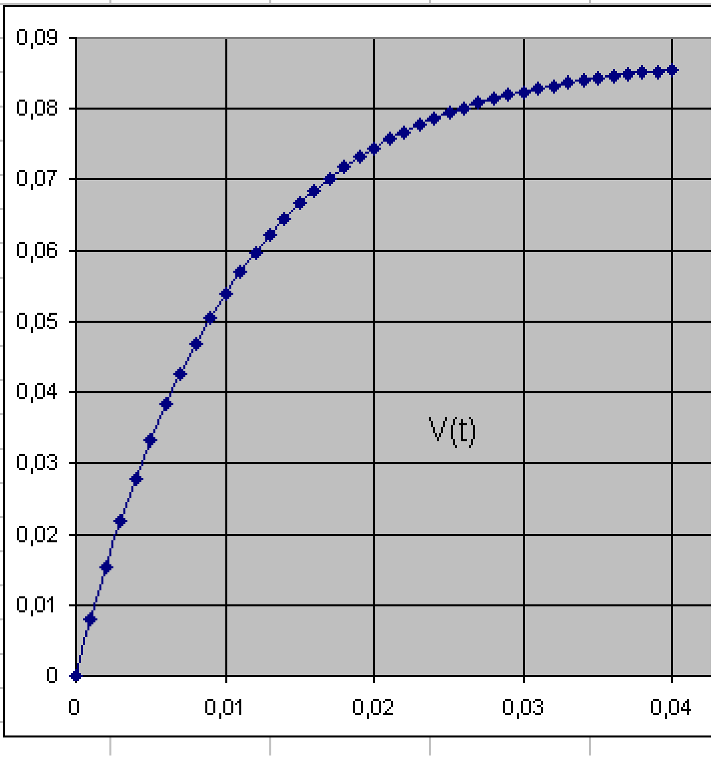
$\rho_f = 1,3.10^3\ kg.m^{-3}$ (masse volumique de l'huile volume de la sphère : $4\pi R^3/3$

Montrer comment la deuxième loi de Newton permet d'écrire l'équation différentielle suivante : $7,99 - 91,6\ v = dv/dt$

C- Résolution de l'équation différentielle

Résoudre cette équation différentielle c'est déterminer au sens physique (et philosophique) du terme la valeur de la vitesse de la bille en tout instant et en particulier sa vitesse finale.
La méthode utilisée, très générale, dite méthode d'Euler, procède par itération :
les valeurs initiales de x et de v déterminent par l'équation différentielle la valeur de a=dv/dt.Or a= $\Delta v/\Delta t$ soit
$v_{i+1} - v_i = a_i \Delta t$;ainsi v_i et a_i étant connus v_{i+1} est déterminé ;il ne reste plus qu'à recommencer pour obtenir toutes les valeurs de v_i
Remarque : on n'obtient pas par ce procédé de solution sous forme d'une expression mathématique explicite mais il suffit à envoyer une fusée dans l'espace (cf. logiciel fusée.exe).
Le tableau suivant,volontairement incomplet au début et qu'il faudrait prolonger jusqu'à t=0.04 s est agrémenté de la courbe v(t)

	A	B	C
1	t(s)	a(m/s2)	v(m/s)
2	0		0
3			
4			
5			
6			
7			
8	0,006	4,49258569	0,03822311
9	0,007	4,0815141	0,04271569
10	0,008	3,70805556	0,04679721
11	0,009	3,36876847	0,05050526
12	0,01	3,06052616	0,05387403
13	0,011	2,78048801	0,05693456
14	0,012	2,52607336	0,05971505
15	0,013	2,29493765	0,06224112
16	0,014	2,08495085	0,06453606
17	0,015	1,89417785	0,06662101
18	0,016	1,72086058	0,06851518
19	0,017	1,56340183	0,07023605
20	0,018	1,42035057	0,07179945
21	0,019	1,29038849	0,0732198
22	0,02	1,17231794	0,07451019
23	0,021	1,06505085	0,0756825



La cellule A3 contient la formule « = A2 + 0.001 »
la cellule B3 « 7,99- 91,5C3 »
a-Quelle valeur inscrire dans les cellules C3 et B2 ?
b-On peut constater que la courbe obtenue est très proche de celle observée par l'expérience : si celà n'avait pas été le cas comment aurait il fallu reconsidérer le problème ? En déduire un aspect intéressant de la méthode d'Euler.

Réponses
A1-25 i/s .
A2 -x(t) phase accélérée qui rappelle une parabole) /suivi d'une phase où x est une fonction linéaire du temps et où, par suite, la vitesse est constante et l'accélération nulle.
A3.a- v(t) confirme qualitativement l'existence d'une vitesse limite et quantitativement en faisant une régression
A3b- C3 --> (B4-B2) / 0.08
A4- $\sum$**F=0** principe de l'inertie…..
B - $\sum$**F** = m$\mathbf{a_G}$

$m\mathbf{g} - \rho_f.(4\pi R^3/3)\mathbf{g} - 6\pi R\ \eta\ \mathbf{v} = m d\mathbf{v}/dt$

En projetant sur l'axe Ox et en divisant par m

$g - \rho_f.(4\pi R^3/3)g/m - (6\pi R\ \eta/m)\ v = dv/dt$

On trouve bien une expression du type $A - B\ v = dv/dt$

AN: on retrouve bien les valeurs indiquées

Ca-C3 : $v_3 - v_2 = a_2\ \Delta t$ soit C3=B2+A2*0.001 attention le pas est beaucoup plus petit que le pas expérimental ,c'est un pas de calcul !

B2 -> 7,99 car la vitesse est nulle 7,99 - 91,6 v = dv/dt devient 7,99 = dv/dt

Cb- il aurait fallu changer le coefficient de viscosité ou l'expression de la puissance de v dans la résistance du fluide par exemple

Aspects intéressants : étude de la viscosité-des différents paramêtres en proposant un modèle qui correspond au mieux à la courbe expérimentale.