RÉDUCTION - NORMES

Partie I

Pour tout nombre réel λ, on désigne par T_λ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ notée (e_1, e_2).

1. Construire une base $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$ de $\mathbb{C}^2$ telle que les $f_{\lambda,i}$ ait une composante sur e_1 égale à 1 et, en outre, ayant les propriétés suivantes :

   (a) Si $|\lambda| > 2$, il existe un réel μ_λ de module > 1 tel que :
   $$T_\lambda(f_{\lambda,1}) = \mu_\lambda f_{\lambda,1} \quad \text{et } T_\lambda(f_{\lambda,2}) = \mu_\lambda^{-1} f_{\lambda,2}$$

   (b) Si $|\lambda| < 2$, on a une formule analogue, mais où μ_λ est un nombre complexe de module 1 et de partie imaginaire > 0, que l'on précisera.

   (c) Si $\lambda = 2$, on a :
   $$T_\lambda(f_{\lambda,1}) = f_{\lambda,1} \quad \text{et } T_\lambda(f_{\lambda,2}) = f_{\lambda,1} + f_{\lambda,2}$$

   (d) Si $\lambda = -2$, on a :
   $$T_\lambda(f_{\lambda,1}) = -f_{\lambda,1} \quad \text{et } T_\lambda(f_{\lambda,2}) = f_{\lambda,1} - f_{\lambda,2}$$

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des suites de nombres complexes $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ **indexées par** $\mathbb{Z}$ et par A l'endomorphisme de E défini par
$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (Ax)_k = x_{k-1} + x_{k+1}$$
On s'intéresse au noyau de l'endomorphisme $A - \lambda\,\mathrm{Id}_E$, où λ est un nombre **réel**.

2. (a) Vérifier qu'un élément $x \in E$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si on a :
   $$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

3. On suppose $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ et on note $\alpha_{\lambda,1}$ et $\alpha_{\lambda,2}$ les composantes, dans la base $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$, du vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Démontrer les assertions suivantes :

   (a) Si $|\lambda| \neq 2$, on a : $x_k = \mu_\lambda^k \alpha_{\lambda,1} + \mu_\lambda^{-k} \alpha_{\lambda,2}$.

   (b) Si $\lambda = 2$, on a : $x_k = \alpha_{2,1} + (k+1)\alpha_{2,2}$.

   (c) Si $\lambda = -2$, on a : $x_k = (-1)^k(\alpha_{-2,1} + (1-k)\alpha_{-2,2})$.

4. On fixe un entier $N \geq 2$ et on désigne par P_N l'ensemble des $x \in E$ tels que $x_{k+N} = x_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   (a) Justifier que P_N est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer pour quelles valeurs de λ le sous-espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \cap P_N$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et dans ce cas, en donner une base.

Partie III

Dans ce problème, on utilisera la définition suivante : Si $x \in E$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ est dite **convergente** ssi la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (x_k + x_{-k})$ est convergente, et *par définition* :
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k + x_{-k})$$
(*sommation symétrique*.)

5. On définit deux sous-espaces vectoriels de E de la manière suivante :
   – E_1 est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$ est convergente.
   – E_∞ est l'ensemble des éléments bornés de E.

(a) Montrer que la relation $\|x\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|$ définit une norme sur E_1.

(b) Montrer que la relation $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$ définit une norme sur E_∞.

(c) Justifier que $E_1 \subset E_\infty$.

(d) On note ϵ la suite définie par $\epsilon_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, δ^n la suite définie par $\delta^n_k = 0$ si $k \neq n$ et $\delta^n_n = 1$.
Vérifier si ces suites appartiennent à E_1 et/ou à E_∞ et donner leurs normes dans chaque cas.

6. (a) Montrer que $A(E_1) \subset E_1$. Justifier : $\forall x \in E_1$, $||A(x)||_1 \leq 2.||x||_1$ et montrer que cette inégalité est la meilleure possible.
   (b) On note A_1 la restriction de A à E_1. Montrer que A_1 est continue sur E_1, c'est-à-dire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'éléments de E_1 qui converge vers $X \in E_1$, alors $AX_n \to AX$ dans E_1.
   (c) Montrer que $A(E_\infty) \subset E_\infty$. Justifier : $\forall x \in E_\infty$, $||A(x)||_\infty \leq 2.||x||_\infty$ et montrer que cette inégalité est la meilleure possible.
7. On fixe $u \in E_\infty$.
   (a) Montrer que l'application f :
$$x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k x_k$$
   est une forme linéaire bien définie sur E_1.
   (b) Montrer qu'il existe $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in E_1$, $|f(x)| \leq C||x||_1$.
   (c) Déterminer la meilleur constante C possible (on pourra utiliser 6.c.)
8. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in E_1$, on a :
$$||A^n(x)||_1 \leq 2^n ||x||_1$$
   (b) Montrer que si $|\lambda| > 2$ alors, pour tout $x \in E_1$, la série : $\sum ||\lambda^{-n} A_1^n x||_1$ est convergente. On *admet* qu'on peut en déduire que la série : $\sum \lambda^{-n} A_1^n x$ est convergente dans E_1. Pourquoi n'est-ce pas évident ?
   (c) Soit $x \in E_1$. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de
$$(\mathrm{Id}_{E_1} - \lambda^{-1} A_1) \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} {A_1}^k x \right)$$
   (d) À l'aide des questions précédentes, montrer que, si $|\lambda| > 2$, la formule :
$$B_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k} {A_1}^k x$$
   définit un automorphisme de E_1, dont on précisera l'inverse.
9. Soit λ un nombre réel.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \cap E_1$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \cap E_\infty$.