Une classe de nombres complexes comparable à celle des nombres algébriques.

Raoul Charreton*

Résumé

On présente un résultat mathématique qui s'exprime comme une condition pour qu'une fonction réelle d'un nombre entier soit décroissante. Ce résultat est relié aux fonctions ζ de Riemann, et η de Dirichlet. Il induit la définition d'une classe de nombres complexes comparable en un certain sens à la classe des nombres algébriques. La fonction ζ de Riemann est prolongée à l'aide de la fonction η de Dirichlet. Notre résultat repose sur l'analyse des modes d'évolution de la suite dont la limite est la somme de cette fonction η et d'une constante complexe.

1 Notations

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels $0, 1, 2, \cdots$.

$\mathbb{N}^\star$ est l'ensemble $\mathbb{N}$, zéro exclu.

$\mathbb{I}_n$ est l'ensemble des nombres entiers j qui vérifient $0 \leqslant j \leqslant n, n \in \mathbb{N}^\star$

$\mathbb{I}_n^\star$ est l'ensemble $\mathbb{I}_n$, zéro exclu.

$\Re(x)$ désigne la partie réelle du nombre complexe x et $\Im(x)$ sa partie imaginaire.

$|x|$ désigne le module d'un nombre complexe x ou la valeur absolue d'un nombre réel x.

$[x]$ désigne la phase (dite aussi argument) d'un nombre complexe x. Ainsi $x = \Re(x) + i.\Im(x) = |x|.exp(i.[x])$.

2 Convergence de suites $-q+f(n,s)$ lorsque le nombre entier n tend vers l'infini

On retient toujours dans ce qui suit, sauf indication contraire, $s = x + i.y$, x, y, réels, $x > 0$, $i^2 = -1$.

*page personnelle : http ://perso.numericable.fr/raoul.charreton

$f(n,s)$ est une fonction complexe de la variable complexe s et du nombre entier n, $n \in \mathbb{N}$.

On définit comme suit, la fonction $f(n,s)$:

$f(0,s) = 0$;

$f(n,s) = \sum_{j \in \mathbb{I}_n^\star} (-1)^{j-1}.j^{-s}, n \in \mathbb{N}^\star$.

On pose $a(j) = (-1)^{j-1}.j^{-s}$ de sorte que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f(n,s) = \sum_{j \in \mathbb{I}_n^\star} a(j)$.

Cette fonction $f(n,s)$ converge lorsque n tend vers l'infini et on note sa limite $\eta(s)$.

Nota : $|a(j)| = j^{-x}$ tend vers 0 lorsque j tend vers l'infini puisque $x = \Re(s) > 0$. La convergence est assurée par la présence du facteur d'alternance $(-1)^{j-1}$ et parce que le facteur multiplicatif $j^{-i.y}$, *id est* $exp(-i.y.\log(j))$, d'une part est borné en module par 0 et 1, d'autre part ne modifie pas l'alternance, pour j suffisamment grand, ni de $\Re(a(j))$, ni de $\Im(a(j))$, sauf en quelques valeurs de plus en plus espacées lorsque j tend vers l'infini.

Nous disons qu'un nombre complexe $x + i.y$ est rationnel si x et y sont rationnels. Nous disons qu'un nombre complexe est irrationnel s'il n'est pas rationnel. Soit q un nombre complexe rationnel et soit $z(n)$ la fonction complexe $z(n) = -q + f(n,s)$.

Soit $n \geqslant 1$. La fonction $z(n)$ sera dite décroissante en n si $|z(n)| < |z(n-1)|$, croissante en n si $|z(n)| > |z(n-1)|$, stationnaire en n si $|z(n)| = |z(n-1)|$. Elle sera dite décroissante dans l'intervalle n', n'', sous condition $n'' - n' \geqslant 2, n' \geqslant 1$, si, à la fois, elle est croissante ou stationnaire aux extrémités de l'intervalle, *id est* en n' et en n'', et décroissante en $n, n' < n < n''$. Elle sera dite, décroissante à partir de $n_o \geqslant 1$, si elle est croissante ou stationnaire en n_o et décroissante en $n, n > n_o$.

Notre observation est la suivante :

Lemme 1. *Si $\eta(s) \neq q$, il existe N tel que, quelque soit $n > N$,*
$(|z(n)| - |z(n+1)|).(|z(n+1)| - |z(n+2)|) \leqslant 0.$

théorème 1. *$z(n)$ est décroissante à partir de n_o, si et seulement si, $\eta(s) = q$. On indiquera quelle est la valeur approximative du nombre n_o.*

Sauf indication contraire, on retient dans ce qui suit $n \in \mathbb{N}^\star, n' \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $n'' - n'$ la longueur d'un intervalle n', n''. Soit, respectivement, L' et L'', les nombres n' et n'' de l'intervalle le plus long dans lequel $z(n)$ est décroissante ; à égalité de longueur entre plusieurs intervalles, on retient, parmi tous les intervalles candidats, l'intervalle dont le nombre n' est le plus petit. Lorsque $\eta(s) \neq q$, tous les intervalles n', n'' sont de longueurs finies en vertu du théorème 1 de sorte que L' et L'' sont bien définis. On retient $L' = n_o$ si $z(n)$ est décroissante à partir de n_o, *id est* dans le cas $\eta(s) = q$. On notera ℓ la longueur $L'' - L'$ de l'intervalle le plus long dans lequel $z(n)$ est décroissante. Si $\eta(s) = q, \ell$ n'existe pas.

Nota : Le caractère croissant, décroissant ou stationnaire en n de $|z(n)|$ est identique à celui de $z(n)$ puisque $||z(n)|| = |z(n)|$.

Les nombres de la classe S sont les racines en s, notées $\sigma(q)$, des équations $\eta(s) = q$.

De même que les nombres algébriques sont reliés aux nombres rationnels en tant que racines de certaines équations, (les polynomes à coefficients rationnels) de même les nombres de la classe S son reliés aux nombres rationnels q en tant que racines de certaines équations (les équations $\eta(s) = q$). La classe S est comparable, en ce sens,à la classe des nombres algébriques.

On distingue dans les nombres de la classe S, ceux de la classe R, $\sigma(0)$, qui sont les racines en s des équations $\eta(s) = 0$ et ceux, notés $\tau(q)$ de la classe T qui sont les racines en s des équations $\eta(s) = q$, $q \neq 0$.

Le théorème 1 induit une méthode de calcul de tout nombre $\sigma(q)$ à l'aide de quatre suites infinies de nombres rationnels, des suites de Cauchy, définissant, les deux premières, le nombre réel $\Re(\sigma(q))$, et les deux suivantes, le nombre réel $\Im(\sigma(q))$. Le calcul des termes successifs de ces suites est guidé par la recherche de la croissance du nombre entier ℓ associé à chaque valeur de s définie par deux de ces termes, un pour $\Re(s)$ et un pour $\Im(s)$.

Dans le cas particulier $q = 0$, selon l'hypothèse de Riemann, $\Re(\sigma(0)) = 1/2$, il existe une infinité dénombrable de racines $\sigma(0)$, et deux suites de Cauchy suffisent pour définir la partie imaginaire $t = \Im(\sigma(0))$ pouvant exister dans tel intervalle t', t''.

3 Les classes S, R et T de nombres complexes

Toute partition de l'ensemble des nombres q induit une partition de la classe S.

Si $q \neq 0$, l'équation $\eta(s) = q$, soit, n'a aucune racine en s, soit, a un nombre fini de racines en s. Dans le cas particulier $q = 0$, l'équation $\eta(s) = q$ a une infinité dénombrable de racines en s.

Le passage d'une ou plusieurs racines vers une infinité dénombrable de racines n'implique aucune discontinuité des termes de l'équation $\eta(s) = q$. Ceci provient du fait qu'un nombre complexe peut tendre vers 0 en continuité par une infinité de voies continues totalement distinctes jusqu'au point limite, ce dernier non compris, et chaque voie associée à une phase invariante au voisinage du point limite.

Les racines en s de l'équation $\eta(s) = 0$ sont les "zéros", non triviaux, de la fonction ζ de Riemann, *id est* les éléments $\sigma(0)$ de la partition R de la classe S commandée par $q = 0$. Selon l'hypothèse de Riemann, $\Re(\sigma(0)) = 1/2$.

Soit $\zeta(s), s = x + i.y$, la fonction ζ de Riemann et $\eta(s)$ la fonction η de Dirichlet. $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} n^{-s}$ et $\eta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star}(-1)^{n-1}.n^{-s}$. La fonction ζ de Riemann n'est pas convergente pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ mais elle est prolongée analytiquement pour $x > 0, x \neq 1$, à l'aide de la fonction η de Dirichlet par la relation $\zeta(s) = \dfrac{\eta(s)}{1-2^{1-s}}$.

Nota : $x = 1$ n'implique pas $1 - 2^{1-s} = 0$ mais $x \neq 1$ implique $1 - 2^{1-s} \neq 0$.

L'équation $\eta(s) = 0$ n'a aucune racine en s vérifiant $x = 1$.

Ainsi, les "zéros" de ζ, prolongée analytiquement, sont les racines de l'équation $\eta(s) = 0$.

Nous proposons les conjectures suivantes :

1) Il existe un domaine, noté A, du plan d'Argand, tel que, pour tout nombre complexe $q \in A$, il existe une racine en s et une seule de l'équation $\eta(s) = q$. Cette racine en s, $\tau(q)$ de l'équation $\eta(s) = q$, est un nombre dit transformé de q. Ce domaine est de mesure non nulle.

Désignons par B le domaine du plan d'Argand tel que, pour tout nombre complexe $q \in B$, il existe plusieurs racines en s de l'équation $\eta(s) = q$. Ce domaine est de mesure nulle. Le nombre $q = 0$ est un élément de B.

Enfin désignons par C le domaine du plan d'Argand complémentaire de A et B, c'est à dire tel que, pour tout nombre complexe $q \in C$, il n'existe aucune racine en s de l'équation $\eta(s) = q$. Ce domaine est de mesure non nulle.

Il existe $q \in A$ tel que le transformé $\tau(q)$ soit aussi proche que désiré de tout nombre complexe $x + i.y$, $x > 0$.

2) Aucun nombre rationnel n'appartient à S.

4 Valeur approximative du nombre entier n_o

On rappelle que n_o est la désignation de L' dans le cas $\eta(s) = q$.

Selon un relevé statistique sommaire, il semble que, L' et n_o, sont, l'un et l'autre, d'ordre de grandeur $1 + |y|/\pi$ quel que soit x et quelque soit q.

5 Quelques suites de Cauchy définissant un élément $\sigma(0)$ de la classe R

On rappelle d'abord quelques valeurs de t, les plus petites positives, vérifiant sensiblement $\zeta(1/2 + i.t) = 0$, à savoir :

$t \approx 14.\ 134\ 725\ 141\ 734$
$t \approx 21.\ 022\ 039\ 638\ 771$
$t \approx 25.\ 010\ 857\ 580\ 145$
$t \approx 30.\ 424\ 876\ 125\ 859$

Cas $q = 0$. Si on retient l'hypothèse de Riemann, $\Re(\sigma(0)) = 1/2$ et il suffit de calculer $\Im(\sigma(0))$ pour compléter le calcul de $\sigma(0)$. Nous présentons les premiers termes des suites de Cauchy, $y'(k), y''(k), k = 1, 2, ..., 8$ définissant la racine réelle t, dans l'intervalle $y'(1) = 14.13$ à $y''(1) = 14.14$, de l'équation $\eta(1/2 + i.t) = q$, ainsi que les nombres entiers, notés respectivement $\ell(y')$ et $\ell(y'')$ attachés aux fonctions $z(n, 1/2 + i.y'(k)$ et $z(n, 1/2 + i.y''(k)$:

Exemple $14.13 < t < 14.14$

$k = 1$ $y' = 14.13$ $y'' = 14.14$ $\ell(y') = 12$ $\ell(y'') = 10$

$k = 2$ $y' = 14.134$ $y'' = 14.135$ $\ell(y') = 22$ $\ell(y'') = 44$

$k = 3$ $y' = 14.1347$ $y'' = 14.1348$ $\ell(y') = 220$ $\ell(y'') = 93$

$k = 4$ $y' = 14.13472$ $y'' = 14.13473$ $\ell(y') = 556$ $\ell(y'') = 672$

$k = 5$ $y' = 14.134725$ $y'' = 14.134726$ $\ell(y') = 6347$ $\ell(y'') = 2057$

$k = 6$ $y' = 14.1347251$ $y'' = 14.1347252$ $\ell(y') = 15253$ $\ell(y'') = 12213$

$k = 7$ $y' = 14.13472514$ $y'' = 14.13472515$ $\ell(y') = 115508$ $\ell(y'') = 46147$

$k = 8$ $y' = 14.134725141$ $y'' = 14.134725142$ $\ell(y') = 220505$ $\ell(y'') = 430401$

Cas $q = 0$. Si on ignore l'hypothèse de Riemann, il convient de calculer $\Re(\sigma(0))$ et $\Im(\sigma(0))$. Nous présentons les premiers termes des suites de Cauchy, $x'(k), x''(k), k = 1, 2, ..., 10$ définissant $\Re(\sigma(0))$, dans l'intervalle $x'(1) = .49$ à $x''(1) = .51$, puis $y'(k), y''(k), k = 1, 2, ..., 10$ définissant $\Im(\sigma(0))$, dans l'intervalle $y'(1) = 14.13$ à $y''(1) = 14.14$, ainsi que les nombres entiers, notés respectivement $\ell(y')$ et $\ell(y'')$ attachés aux fonctions $z(n, x' + i.y'(k)$ et $z(n, x'' + i.y''(k)$:

$k = 1$ $x' = 0.49$ $x'' = 0.51$ $y' = 14.13$ $y'' = 14.14$ $l' = 8$ $l'' = 6$

$k = 2$ $x' = 0.498$ $x'' = 0.502$ $y' = 14.134$ $y'' = 14.136$ $l' = 14$ $l'' = 15$

$k = 3$ $x' = 0.4996$ $x'' = 0.5004$ $y' = 14.1346$ $y'' = 14.135$ $l' = 31$ $l'' = 30$

$k = 4$ $x' = 0.49992$ $x'' = 0.50008$ $y' = 14.13468$ $y'' = 14.13476$ $l' = 79$ $l'' = 97$

$k = 5$ $x' = 0.499984$ $x'' = 0.500016$ $y' = 14.13472$ $y'' = 14.134736$ $l' = 250$ $l'' = 241$

$k = 6$ $x' = 0.4999968$ $x'' = 0.5000032$ $y' = 14.1347232$ $y'' = 14.1347264$ $l' = 733$ $l'' = 748$

$k = 7$ $x' = 0.49999936$ $x'' = 0.50000064$ $y' = 14.1347248$ $y'' = 14.13472544$ $l' = 2232$ $l'' = 2247$

$k = 8$ $x' = 0.499999872$ $x'' = 0.500000128$ $y' = 14.134725056$ $y'' = 14.134725184$ $l' = 6675$ $l'' = 6868$

$k = 9$ $x' = 0.4999999744$ $x'' = 0.5000000256$ $y' = 14.1347251328$ $y'' = 14.1347251584$ $l' = 20726$ $l'' = 16874$

$k = 10$ $x' = 0.49999998976$ $x'' = 0.50000001024$ $y' = 14.13472513536$ $y'' = 14.13472514816$ $l' = 32434$ $l'' = 32415$

$k = 11$ $x' = 0.499999991808$ $x'' = 0.500000008192$ $y' = 14.13472513792$ $y'' = 14.13472514560$ $l' = 40539$ $l'' = 40516$

6 Quelques suites de Cauchy définissant un élément $\tau(q)$ de la classe T

Cas $q \neq 0, q \in A$. Exemple : $q = 2.15 + (3.27).i$.

On donne les douze premiers termes, x', x'', des suites de Cauchy définissant $\Re(\tau(q))$; les douze premiers termes, y', y'', des suites de Cauchy définissant $\Im(\tau(q))$; enfin les nombres entiers $l(x', y')$ noté l' et $l(x'', y'')$ noté l'', qui tendent vers l'infini lorsque le rang des termes des suites de Cauchy tend vers l'infini. (Les suites de Cauchy ne peuvent être explicitées que pour un nombre limité de termes. Selon un relevé statistique, τ serait défini avec précision dès que l' et l'' sont d'ordre de grandeur 100 fois y'/π).

$k = 1$ $x' = 0.39$ $x'' = 0.40$ $y' = 57.32$ $y'' = 57.33$ $l' = 15$ $l'' = 12$
$k = 2$ $x' = 0.393$ $x'' = 0.395$ $y' = 57.325$ $y'' = 57.327$ $l' = 20$ $l'' = 17$
$k = 3$ $x' = 0.3932$ $x'' = 0.3936$ $y' = 57.326$ $y'' = 57.3264$ $l' = 28$ $l'' = 33$
$k = 4$ $x' = 0.39332$ $x'' = 0.3934$ $y' = 57.32624$ $y'' = 57.32632$ $l' = 76$ $l'' = 59$
$k = 5$ $x' = 0.393336$ $x'' = 0.393352$ $y' = 57.326264$ $y'' = 57.32628$ $l' = 153$ $l'' = 161$
$k = 6$ $x' = 0.3933456$ $x'' = 0.3933488$ $y' = 57.3262688$ $y'' = 57.326272$ $l' = 574$ $l'' = 430$
$k = 7$ $x' = 0.39334688$ $x'' = 0.39334752$ $y' = 57.32626944$ $y'' = 57.32627008$ $l' = 1546$ $l'' = 1644$
$k = 8$ $x' = 0.393347072$ $x'' = 0.3933472$ $y' = 57.32626976$ $y'' = 57.326269888$ $l' = 4646$ $l'' = 5831$
$k = 9$ $x' = 0.3933471232$ $x'' = 0.3933471488$ $y' = 57.3262698368$ $y'' = 57.3262698624$ $l' = 19390$ $l'' = 14041$
$k = 10$ $x' = 0.39334712832$ $x'' = 0.3933471360$ $y' = 57.32626984448$ $y'' = 57.32626985216$ $l' = 39653$ $l'' = 37621$
$k = 11$ $x' = 0.39334712832$ $x'' = 0.393347136$ $y' = 57.326269847552$ $y'' = 57.326269850624$ $l' = 49951$ $l'' = 44392$
$k = 12$ $x' = 0.39334712832$ $x'' = 0.393347136$ $y' = 57.3262698475520$ $y'' = 57.3262698484736$ $l' = 49951$ $l'' = 49926$

7 Valeurs de $f(n, s)$ aux grandes valeurs de n

Remarque : L'écart entre $\Im(\sigma).\log(j+1)$ et $\Im(\sigma).\log(j)$ est sensiblement $\Im(\sigma)/j$ lorsque j est grand ; l'écart entre 1 et $(1 + 1/j)^{\Re(\sigma)}$ est sensiblement $\Re(\sigma)/j$ lorsque j est grand. Quel que soit $f(n, \sigma)$, ces deux écarts gouvernent le procédé de construction des suites de Cauchy définissant le nombre σ, racine en s de l'équation $\eta(s) = q$, valeur limite, lorsque n tend vers l'infini, de la racine en s de l'équation $f(n, s) = q$.

La construction d'un élément σ de la classe S repose sur le principe d'induction, [1] au coeur des mathématiques. En effet les fonctions f de la variable s sont continues. Elles sont aussi convergentes lorsque n tend vers l'infini. En conséquence, pour une valeur grande de n, on peut construire un encadrement de s, $x'(n) < \Re(s) < x''(n)$, $x'(n), x''(n)$, rationnels, vérifiant $x'(j) < x''(k)$, quel que soit $j > N$, quel que soit $k > N$, $j, k, \in \mathbb{N}$, ainsi que $x''(n) - x'(n)$ tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puis, *mutatis mutandis*, $y'(n) < \Im(s) < y''(n)$. Les suites $x'(n), x''(n)$, ainsi que $y'(n), y''(n)$, sont des suites de Cauchy définissant le nombre complexe réel σ.

De même qu'on peut définir différentes classes de nombres algébriques par un tri préalable des polynomes à coefficients rationnels, de même on peut définir différentes classes de nombres σ par un tri préalable d'équations $\eta(s) = q$, c'est à dire un tri selon les nombres q. Evariste Galois a ouvert la voie pour les nombres algébriques.

8 Démonstration du théorème 1

La démonstration du lemme 1 et du théorème 1 résulte d'une analyse élémentaire détaillée de l'évolution de la fonction $z(n, s)$ aux grandes valeurs de n. Nous avons exposé ceci dans une note séparée que nous communiquerons volontiers à ceux qui nous la demanderons.

9 Remarque

Les fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet ont retenu l'attention de nombreux mathématiciens.

Nous renvoyons, d'une part, à Titchmarsh [5] pour un traité sur la fonction Zeta un siècle après l'article fondateur de Riemann, d'autre part, au traité tout récent des "contributions à la théorie des fonctions zeta" de Kanemitsu et Tsukada, [3].

La proposition qui constitue le théorème 1 est restée ignorée jusqu'à présent. On ne trouve aucune mention relative à ce sujet ni dans l'ouvrage de Titchmarsh [5], ni dans le traité qui nous vient du Japon [3].

L'origine lointaine de notre propre intérêt envers la fonction ζ est un résultat publié fin 2007 relatif à la convergence en loi de variables aléatoires associées à certaines intégrales de chemins. [1], [2].

1. Le principe d'induction est le suivant : Soit une proposition, dépendante du nombre entier n positif, vraie pour $n = 1$. Si la proposition, supposée vraie pour $n - 1$, est vraie pour n, alors la proposition est vraie quel que soit n. Toutes les tentatives de démonstration de ce principe sont restées vaines. Les nombres entiers, existent-ils autrement que comme des objets abstraits ? La philosophie des mathématiques met en oeuvre des trésors d'imagination et de virtuosité pour donner un statut aux nombres, mais elle reste encore sans réponse à cette question, du moins si on suit Marco Panza et Andrea Sereni dans leur très savant, et tout récent, exposé. [4]

La physique quantique fait largement appel aux fonctions de Green, désignées "propagateur" par Feynman, pour résoudre l'équation aux dérivées partielles de Schrœdinger. Tel a été, initialement, notre fil conducteur.

Je dois à Paul Deheuvels l'observation suivante : L'alignement des racines complexes d'une équation sur un axe, tel que l'alignement des racines de l'équation $\eta(s) = 0$ sur l'axe $x = 1/2$, fait penser à l'alignement sur l'axe réel des racines de l'équation aux valeurs propres d'une matrice définie positive, elle même associée à un opérateur de Fredholm, à une fonction de Green, à un espace de Banach. On peut penser que, l'hypothèse de Riemann, et peut-être aussi le lemme 1 et le théorème 1, sont en rapport avec le caractère, définie positive, ou non, d'une telle matrice. Ce lemme 1 et ce théorème 1 sont peut-être relatifs, à la fois, à la théorie des nombres et à l'analyse fonctionnelle.

Le Mas Capel, le 16 Août 2015

Références

[1] Charreton R. L., *Une loi limite pour les marches aléatoires avec des applications physiques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Ser. I 345 (2007) Nota : Une version détaillée de cette note aux Comptes Rendus est le chapitre V du livre *Révision des fondements de la mécanique quantique et de la gravitation*, R. Charreton, 2009, L'Harmattan, Paris

[2] Charreton R. L. Revisions of the Foundations of Quantum Mechanics suggested by Properties of Random Walks, Journal of Quantum Information Science, September 2011, Published Online http ://www.scirp.org/Journal/Home.aspx ?IssueID=1081

version en Français : Révision des fondements de la mécanique quantique et de la gravitation, chapitre I.

[3] Kanemitsu Shigeru, Tsukada Haruo, *Contributions to the Theory of zeta Functions, The Modular Relation Supremacy*, 2015, Vol. 10 de "Series on Number Theory and its Applications", World Scientific Publishing Cy.

[4] Panza Marco, Sereni Andrea, *Introduction à la philosophie des mathématiques*, 2013, Flammarion

[5] Titchmarsh, Edward *The zeta function of Riemann*, 1930, *The Theory of the Riemann zeta function*, 1951, second edition revised by Heath Brown, 1986, Clarendon Press Oxford, (on line)