Leçon N° 1 : Taux d'évolution et indices

En premier un peu de calcul :
Si nous cherchons $t \in [0\,;+\infty[$ tel que
$x^2 = 0{,}25$, nous trouvons une solution unique $x = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

Nous allons utiliser cette année une autre notation pour $\sqrt{\ }$, nous écrirons $\mathbf{x = (0{,}25)^{\frac{1}{2}} = 0{,}5}$.
Cette notation s'explique aisément :

soit $a \geq 0$, nous avons $(\sqrt{a})^2 = a$ et bien $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$.

De même la racine cubique $\mathbf{\sqrt[3]{a}}$, $a \geq 0$, se notera $\mathbf{a^{\frac{1}{3}}}$.

Définition
*On appelle **taux d'évolution moyen T_M** de n évolutions successives, le nombre réel T_M tel que n évolutions à ce taux T_M donnera le même résultat que l'évolution globale constatée.*

Sur une grandeur y et n évolutions cela donne ($y_0 \neq 0$) :

$$\underbrace{y_0 \xrightarrow{T_M} y_1 \xrightarrow{T_M} y_2 \xrightarrow{T_M} \text{etc……} \quad y_{n-1} \xrightarrow{T_M} y_n}_{\text{Taux d'évolution } T}$$

$y_1 = y_0(1 + T_M)$; $y_2 = y_1(1 + T_M) = y_0(1 + T_M)(1 + T_M) = y_0(1 + T_M)^2$; etc…..
$y_n = y_0(1 + T_M)^n$

T_M est un pourcentage ($T_M = \dfrac{t_M}{100} = t_M\%$). **$(1 + T_M)$ est un coefficient multiplicateur**.
Pour calculer T_M, nous allons utiliser un exposant fractionnaire en effet, T_M vérifie

l'équation : $\mathbf{y_0(1 + T_M)^n = y_0(1 + T)}$ donc $\mathbf{(1 + T_M)^n = 1 + T}$ **et donc** $\boxed{\mathbf{1 + T_M = (1 + T)^{\frac{1}{n}}}}$

On dit aussi que le coefficient multiplicateur $1 + T_M$ est la moyenne géométrique de tous les coefficients multiplicateurs successifs $1 + T_1$; $1 + T_2$; … etc… ; $1 + T_n$.
Un exemple s'impose :
Soit un prix P_0, nous constatons sur 3 ans, une baisse de 10% puis une hausse de 20% et enfin une baisse de 10%. Déterminer le taux moyen d'évolution.
Nous avons en suivant les variations successives :
$P_1 = P_0(1 - 0{,}1) = 0{,}9\,P_0$; $P_2 = P_1(1 + 0{,}2) = 1{,}2P_1 = 1{,}2(0{,}9)P_0 = 1{,}08P_0$ (remarque une augmentation de 8%) puis enfin $\mathbf{P_3} = P_2(1 - 0{,}1) = 0{,}9P_2 = 0{,}9(1{,}08)P_0 = \mathbf{0{,}972P_0}$.
Sur les trois années, nous constatons une baisse : **0,972 = 1 – 0,028**, **donc une baisse de 2,8%** au total . $\mathbf{T = -0{,}028}$.

Nous aurons $1 + T_M = (1 - 0{,}028)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 1 + T_M = (0{,}972)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 1 + T_M \approx 0{,}9905$ donc :
$\mathbf{T_M \approx -0{,}0095}$. Soit en terme clair, **une baisse moyenne d'environ 0,95%**.

Les indices

Définition

L'indice de la grandeur Q par rapport à Q_R (la quantité de référence est $I = \frac{Q}{Q_R} \times 100$.

Nous pouvons apprendre à utiliser les indices et à les comprendre dans un tableau :

Quantités	Q_R	Q_1	Q_2
Valeurs	8	9,5	7,22
Indices	**100**	?	?

Comment calculer les indices ? Il faut en premier lieu repérer <u>la quantité de référence</u>, il s'agit de la quantité qui reçoit l'indice 100. Puis, on applique la formule donnée :

$I_1 = \frac{9,5}{8} \times 100 = 118,75$ et $I_2 = \frac{7,22}{8} \times 100 = 90,25$.

Quantités	Q_R	Q_1	Q_2
Valeurs	8	9,5	7,22
Indices	**100**	**118,75**	**90,25**

Nous pouvons calculer les taux d'évolution :

$T_1 = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{Q_1 - Q_R}{Q_R} = \frac{9,5-8}{8} = \mathbf{0,1875}$ **soit +18,75%** mais on peut aussi faire :

$T_1 = \frac{I_1 - 100}{100} = 0,1875$ soit 18,75%.

Attention au taux d'évolution entre Q_1 et Q_2 : $T = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = \frac{7,22 - 9,5}{9,5} = \mathbf{-\ 0,24}$ **soit – 24%**.

Ici aussi, nous pouvons faire : $T = \frac{90,25 - 118,75}{118,75} = -\ 0,24$ soit – 24%.

Deux remarques importantes :

Entre Q_R et Q_2, le taux d »évolution est de : $T_2 = \frac{Q_2 - Q_R}{Q_R}$ ou $\frac{I_2 - 100}{100} = -0,0975 = \mathbf{-\ 9,75\%}$.

Et nous ne pouvons pas additionner T_1 et T : 18,75 + (– 24%) = **– 5,25% ≠ – 9,75%.**

- **On ne peut additionner deux pourcentages de quantités différentes.**
  (T_1 est calculé par rapport à Q_R et T est calculé par rapport à Q_1)
- Au point de vue du langage, **entre I_1 et I_2, nous disons il y a une perte de 20,5 de points d'indice**, cela ne veut pas dire – 20,5% car en fait, le calcul montre une baisse de 24%.

(Pour entraînement, calculer le taux moyen d'évolution sur les deux évolutions ci-dessus)

(Réponse : $1 + T_M = (1 - 0,0975)^{\frac{1}{2}}$ ceci donnera $\mathbf{T_M = -\ 0,05 = -\ 5\%}$)

(Vérification : 8(1 – 0,05) = 7,6 et 7,6(1 – 0,05) = **7,22**)

Enfin le lien entre le taux d'évolution et l'indice : $\mathbf{T = \frac{I}{100} - 1}$ **ou** $\mathbf{I = 100(1 + T)}$.

TERMINALE STG	FICHE TAUX D'EVOLUTION - INDICES

Exercice 1

Compléter le tableau suivant :

Taux d'évolution de y_1 à y_2	Evolution entre y_1 et y_2	Coefficient multiplicateur de y_1 à y_2
–5%	baisse	
0,04%		
–40%		
120%		

Calculer le taux moyen d'évolution si on considère maintenant que les 4 évolutions ci-dessus sont des évolutions successives d'une même quantité Q.

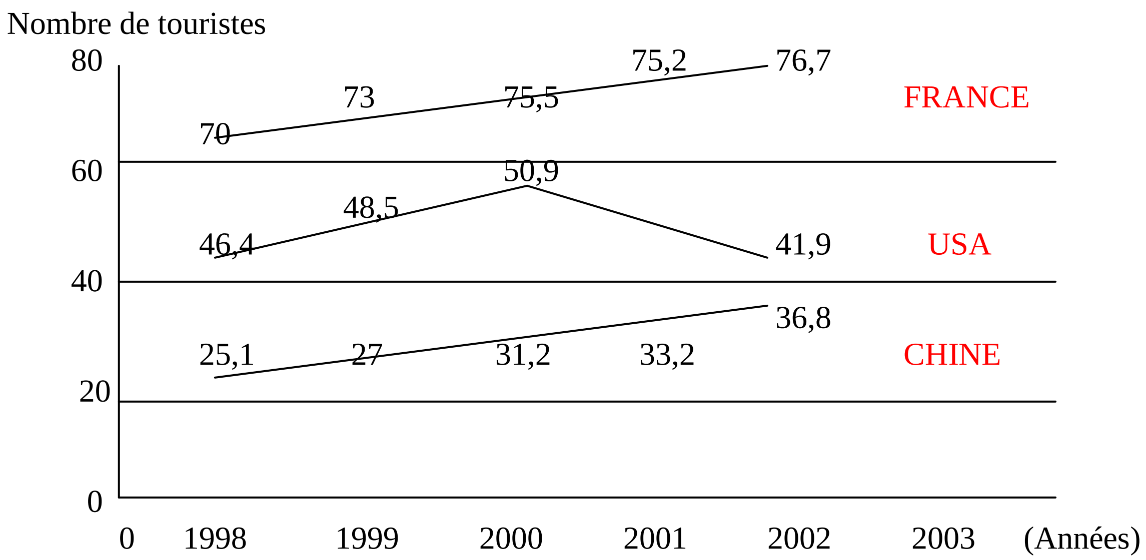
Quel est le taux global d'évolution réciproque ?

Exercice 2 – QCM

1) Si le taux d'évolution entre Q et Q' est une diminution de 60% alors l'indice de Q' par rapport à Q :
   a) – 60 b) 40 c) 60
2) Si l'indice de Q' par rapport à Q est de 70 alors le taux d'évolution est :
   a) –30% b) –70% c) 30%
3) Si $Q_1 = Q_2$ alors l'indice de Q_2 par rapport à Q_1 est :
   a) 0 b) 100 c) 1
4) Si l'indice de y_2 par rapport à y_1 est de 150 alors le taux d'évolution est de :
   a) 150% b) 1,5% c) 50%

Exercice 3 (Extrait de BAC)

La Chine, les USA et la France sont parmi les principales destinations de vacances dans le Monde. Le graphique ci-dessous montre l'évolution de nombre de touristes étrangers en millions venus dans ces trois pays entre 1998 et 2002.



1) On estime qu'en 2002, la Chine, les USA et la France avaient respectivement 1 300, 270 et 60 millions d'habitants. Pour 2002 et pour la France, le rapport du nombre de touristes étrangers au nombre d'habitants est $\frac{76{,}7}{60} \approx 1{,}28$. Calculer une valeur approchée de chacun des rapports pour les USA et pour la Chine. Ces trois rapports sont ils rangés dans le même ordre que le nombre des touristes ?

2) Le nombre de touristes étrangers arrivant en Chine n'a cessé d'augmenter entre 1998 et 2002. Cette croissance est-elle linéaire ? Chaque année combien est-il arrivé en moyenne de touristes supplémentaires entre 1998 et 2002 ?

3) Pour les USA, on constate une forte baisse durant la période 2000 – 2002.

Montrer que le taux d'évolution moyen annuel durant cette période de deux ans est $-$ 9,3%.

Sachant que la baisse de 2000 à 2001 a été d'environ 10,6%, calculer le nombre de touristes étrangers venus aux USA en 2001.

Calculer le taux d'évolution du nombre de touristes étrangers arrivés aux USA entre 1999 et 2000.

Calculer le nombre de touristes qui auraient dû arriver aux USA en 2002 si le taux précédemment calculé s'était maintenu durant les deux périodes 2000 – 2001 et 2001 – 2002 ?

Correction

Exercice 1

Taux d'évolution de y_1 à y_2	Evolution entre y_1 et y_2	Coefficient multiplicateur de y_1 à y_2
– 5%	Baisse	1 – 0,05 = **0,95**
0,04%	Hausse	1 + 0,0004 = **1,0004**
– 40%	Baisse	1 – 0,4 = **0,6**
120%	Hausse	1 + 1,2 = **2,2**

Les coefficients multiplicateurs sont de la forme 1 + T ou 1 – T selon qu'il y a augmentation ou diminution (T exprimé en décimal, exemple 40% = $\frac{40}{100}$ = 0,4)

Pour le dernier exemple, nous voyons que la quantité à plus que doublée en effet, 100% d'augmentation correspond à une quantité qui double (Q' = Q(1 + 1) = 2Q) et pour +120%, la quantité est multiplié par 2,2.

Exemple : Soit une marchandise qui coûte 20 €, plusieurs années après, elle vaut 44€.

$\frac{44-20}{20}$ =1,2 soit 120% d'augmentation ; 44 = 20(1 + 1,2) = 20(2,2).

Formules importantes :

Formule pour les augmentations Q' = Q(1 + T)   (Si on a + t%, T = $\frac{t}{100}$)

Formule pour les diminutions Q' = Q(1 – T)   (avec de même, si on – t%, T = $\frac{t}{100}$)

Le taux d'évolution global est pour une quantité x :

x(1 – 0,05)(1 + 0,0004)(1 – 0,4)(1 + 1,2) = x(0,95)(1,0004)(0,6)(2,2) = 1,2545016 soit

T = + 0,2545016 (soit 25,45016%)

T_M doit vérifier l'équation :

$1 + T_M = (1+0{,}2545016)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 + T_M \approx 1{,}0583$ donc $T_M \approx 0{,}0583$ soit **+ 5,83%**.

Pour calculer le taux d'évolution réciproque, nous devons considérer que nous sommes passés d'une quantité x à une quantité 1,2545016x donc à l'inverse le taux sera :

$$T' = \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{x - 1{,}2545016x}{1{,}2545016x} = \frac{x(1-1{,}2545016)}{1{,}2545016x} = \frac{-0{,}2545016}{1{,}2545016} \approx -0{,}2029$$

Soit environ une baisse globale d'environ **20,3%**.

Exercice 2

1) Nous avons Q' = (1 – 0,6)Q = 0,4Q donc $\frac{Q'}{Q} = 0{,}4$. $I = \frac{Q'}{Q}\times 100 = 0{,}4\times 100 =$ **40**.

ou directement T = 100(1 + T) = 100(1 – 0,6) = **40**.

Réponse b) exacte.

2) $T = \frac{I}{100} - 1 = \frac{70}{100} - 1 = 0{,}7 - 1 = -0{,}3$ soit **une baisse de 30%**.

Réponse a) exacte.

3) Si $Q_1 = Q_2$, alors $I_{Q2/Q1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times 100 =$ **100** car $\frac{Q_2}{Q_1} = 1$.

Réponse b) exacte.

4) $I_{y2/y1} = 150$ or $I_{y2/y1} = \frac{y_2}{y_1} \times 100 = 150$ donc $\frac{y_2}{y_1} = 1{,}5 \Leftrightarrow y_2 = 1{,}5\ y_1 = (1 + 0{,}5)y_1$.

Ce qui veut dire que y_1 a subit une augmentation de 50%.

Réponse c) exacte.

Exercice 3

1) Pour la France, le rapport du nombre de touristes au nombre d'habitants est : $\frac{76{,}7}{60} \approx 1{,}28$.

Pour la Chine, le rapport du nombre de touristes au nombre d'habitants est : $\frac{36{,}8}{1300} \approx$ **0,02**.

Pour les USA, le rapport du nombre de touristes au nombre d'habitants est : $\frac{41{,}9}{270} \approx$ **0,16**.

Pour le nombre de touristes nous avons 36,8 ; 41,9 et 76,7 et pour les rapports, 0,02 ; 0,16 et 1,28 ; les rapports sont classés dans le même ordre mais cela aurait pu être autrement car dans ces rapports, la quantité de référence, le nombre d'habitants du pays est variable !

2) Etude pour la Chine, calculons l'augmentation du nombre de touristes d'année en année :
De 1998 à 1999, nous avons 27 – 25,1 = **+1,9**.
De 1999 à 2000, nous avons 31,2 – 27 = **+ 4,2**.
Dés maintenant, nous pouvons dire que **la croissance n'a pas été linéaire** en effet, dans une croissance linéaire (Voir les suites, $u_{n+1} = u_n +$ **r**, r reste **constant**)
Cela continue les années suivantes car :
De 2000 à 2001, nous avons 33,2 – 31,2 = **+2**.
De 2001 à 2002, nous avons 36,8 – 33,2 = **+3,6**.
Nous pouvons donner ces résultats en pourcentage, c'est-à-dire en taux d'évolution :

De 1998 à 1999, $T_1 = \frac{27 - 25{,}1}{25{,}1} \approx 0{,}076$ soit environ **+7,6%**.

De 1999 à 2000, $T_2 = \frac{31{,}2 - 27}{27} \approx 0{,}156$ soit environ **+15,6%**.

De 2000 à 2001, $T_3 = \frac{33{,}2 - 31{,}2}{31{,}2} \approx 0{,}064$ soit environ **+6,4%**.

De 2001 à 2002, $T_4 = \frac{36{,}8 - 33{,}2}{33{,}2} \approx 0{,}108$ soit environ **+10,8%**.

Nous pouvons calculer le taux moyen T_m entre 1999 et 2002 :

Le taux global est : $\frac{36{,}8 - 25{,}1}{25{,}1} \approx 0{,}466$ soit 46,6%.

Nous aurons $1 + T_M \approx (1 + 0{,}466)^{\frac{1}{4}}$ soit $T_M \approx 1{,}100 - 1$; $\mathbf{T_M \approx 0{,}100}$ **soit +10%**.

3) Etude pour les USA :
Calculons le taux d'évolution moyen pour les années 2000 à 2002 :
Le taux d'évolution entre 2000 et 2002 est :

$T = \dfrac{41{,}9 - 50{,}9}{50{,}9} \approx -\,0{,}177$ (Baisse de 17,7%)

Le taux moyen sur ces deux années est : $1 + T_M = (1+T)^{\frac{1}{2}}$ ou plus simplement écrit :

$1 + T_M = \sqrt{1+T}$ donc $T_M = \sqrt{1-0{,}177} - 1 \approx -0{,}093$ donc **–9,3% environ**.

La baisse de 2000 à 2001 a été d'environ 10,6% donc le nombre de touristes venus aux USA en 2001 a été de :

50,9 (1 – 0,106) = 50,9 (0,894) = **45,50**.

Le nombre de touristes a donc baissé à 45,50 millions.

Entre 1999 et 2000, le taux d'évolution a été de :

$\dfrac{50{,}9 - 48{,}5}{48{,}5} = 0{,}049$ soit **une hausse de 4,9%**.

Si ce taux s'était maintenu, en 2002, nous aurions dû avoir :

$\underbrace{50{,}9(1 + 0{,}049)}_{\text{pour 2001}}(1 + 0{,}049) = 50{,}9(1{,}049)^2 =$ **56,0 millions de touristes.**

puis 2002